1.1.68

1.1.68

A

1.1.68 B.I

APOLLONII PERGÆI CONICORVM LIB. V. VI. VII.

&

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.

APOLLONII PERGAEI CONICORUM LIBRI QUATTUOR

APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.

PARAPHRASTE

ABALPHATO ASPHAHANENSI

Nunc primùm editi.

ADDITVS IN CALCE

ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER

EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.

SERENISSIMI

MAGNI DVCIS ETRVRIÆ

ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA

In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.

IO: ALFONSVS BORELLVS

In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.

AD SERENISSIMVM

COSMVM III.

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

FLORENTIÆ,

Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.

SVPERIORVM PERMISSV.

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM LIBRI VI VII
A HALLEIO
RESTITUTO ADJUMENTANTE
Mercurio alio.

ACCESSIT
ARCHIMEDIS ASSUMPTORUM LIBER
EX COD. ARABICO
MAGNI DUCIS ETRURIÆ
AMICHANTI PECORI LUCENSI NUNCUPATA.

IO. ALFONSUS BORELLUS
Messanensis Philosophus & Mathematicus.

AD SERENISSIMUM
COSMUM III.
ETRURIÆ PRINCIPEM.

FLORENTIÆ

AD SERENISSIMVM

COSMVM TERTIVM

ETRVRIÆ PRINCIPEM.

IO: ALFONSVS BORELLIVS F.

HAVD puto, Sereniſsime Princeps, timorem cœleſtis irę, ſed Amorem potius, & beneficentiam primùm in orbe Deos feciſse; nec alios ab initio habitos cum Prodico cenſeo, quàm res humano generi ſummopere vtiles, & ſalutares. Et ſanè conſentaneum eſt in primorum hominum mentibus, quibus reuelationis lumen non affulſit, excitatam fuiſſe notitiam cuiuſdam naturæ, quæ eſſet mundi veluti Princeps, & Parens, quotieſcumque non perfunctoriè attenderet animum præcipuè ad bonitatis affluentiam, mirabiliumque, & inſignium vtilitatum comprehenſionem, qua Solaris ſplendidiſſima machina lumine ſuo ordinatiſsimè circumacto cuncta viuificat, fouet, ac nutrit; mirarenturque liberalitatem Telluris, cùm tot opes, ac copias plantarum, frúctuum, animalium è ſinu ſuo veluti mater benigna mortalibus præbet. Hæc & ſimilia dum priſci homines contemplarentur, fieri non potuit, quin tantorum munerum largitores grato affectu proſequerentur. Neque alia ratione cùm viri heroica virtute præditi artes, & inuenta præclara valdè vtilia ingeniosè iuxta, ac liberaliter mortalibus con-

tuliſſent, ſumma veneratione talem, ac tantam bonitatem ſuſceperunt, & Diuinitatis honores eis deſignarunt, vt Cereri, Bacchò, Herculi, Mercurio, & alijs. Horum autem illi præſtantiora bona attuliſſe humano generi cenſendi ſunt, non qui fragilem, & limo affixam noſtram partem, ſed qui animum Diuinæ auræ participem eruditione, ac ſapientia perfecerunt, & ornarunt. Hinc artem, & facultatem illam tradentes, qua vaſti maris planitiem intrepidè perambulare non dubitamus coactis ventis imperata facere, ibidemque verſantes acu magnetica itinera ad vnguem menſuramus, & terræ plagas, & cœli, ſtellarumque loca, & ſitus medijs in tenebris conſtituti clarè conſpicimus. Vel hinc qua pondera immenſa puſillis noſtris viribus tanta facilitate mouemus, vt terram vniuerſam è ſuo loco transferre ſe poſſe non diffiteretur magnus ille Archimedes, ſi haberet, vbi pedem extra illam figeret. Aut qua naturæ miracula in elementis, plantis, animantibus perſcrutamur. Quaue ex fragili vitro linceos oculos veluti efformantes adeò cœlo proximi efficimur, vt ferè ſummas mundi partes, & ſtellas innumeras hactenus inconſpicuas contrectare videamur. Aut eam tandem doctrinam Aſtronomicam, qua in Cœlum transuolamus, duabus nimirum alis Geometriæ, & Arithmeticæ, quibus Diuinæ Sapientiæ theſauros contemplando, ſumma dulcedine in hac mortali vita, gloriæ, felicitatiſque illius ineffabilis participes efficimur.

Sed quia felices admirabilium rerum inuentores vel fortunæ, vel temporum iniuria plerumque nequeunt ſua ſtudia, licet illuſtria, & ſalutaria poſteritati

tranſmit-

tranſmittere, ideo viris principibus ſingulari virtute prædítis, ſine quorum auctoritate, & munificentia bonæ illæ artes omnino depreſſæ, contemptæ, & ſqualidæ deperirent, dum eas diuino inſtinctu promouent, augent, atque in vitam reuocant, ne dum pares, ſed maiores gratias ijs habendas priſci homines cenſuerunt, quàm inuentoribus ipſis, cùm ipſi bonis illis alioqui non duraturis genus hominum beauerint.

Atqui inter iſtos Heroas digniſsimum ſibi meritò locum vindicarunt Maiores tui, Princeps Sereniſsime, quibus gratitudinis perpetuam deberi memoriam eruditi omnes fatentur. Quippe poſtquam Barbarorum incurſionibus Europa vniuerſa, & Italia Princeps eius prouincia priſco nitore amiſſo, omni ornatu litterarũ, artium, bibliothecarum, lyceorum, imo humanitatis, & politiæ ſpoliata diù iacuiſſet, Diuino fauore primus omnium ſurrexit Magnus ille Coſmus Mediceus, qui viros doctrina eximios cum vniuerſa ſupellectile Græcæ ſapientiæ Conſtantinopolitani Imperij calamitatem fugientes eo affectu complexus eſt, vt omnium Muſarum parens appellari deberet, qui ob liberalitatem pluſquam regiam, & beneficentiam vbique terrarum effuſam, atque ob alia heroica geſta Pater Patriæ prius ſalutatus fuerat. In eius locum ſucceſsit Laurentius nepos, qui non ferro, & cæde, ſed ciuili prudentia, & alto conſilio Patriam, & pene Europam moderatus eſt: nec modo Poëticis leporibus ornatus, ſed profundiſsimæ Philoſophiæ Platonicæ innutritus, eamdem doctrinam opera, & ſtudio potiſsimum Marſilij Ficini è Græco translatam illuſtratamque poſteris tranſtulit. Bibliothecam inſuper Laurentianam à maioribus inchoatam comparatis

vndique

vndique manuſcriptis codicibus ſummo impendio, ſummaque cura locupletauit. Iſq; filium reliquit Leonem X. Pont. Max., qui vniuerſi orbis viros eruditos dilexit, fouit, amplificauit: Bibliothecam Vaticanã mirificè inſtruxit: Vrbis Lyceum à fundamentis erexit, codicibus, & viris doctrina magnis ornauit, atq; priſca barbarie omnino deleta aureum litterarum ſæculum reſtituit. Sed Coſmus ille primus Magnus Dux Etruriæ mihi nunc non reticendus, qui præter præclara bellica, & politica facinora, quibus Etruſcum Imperium auxit, atque firmauit, promouendis diſciplinis ſedulò intentus Athenæum Piſanum, vt cum maximè reparauit, vt profeſſoribus diſciplinarum fama præſtantibus nobilitauit: Florentinam Academiam inſtituit, Pandectarum libros ad fidem egregij, & vetuſtiſsimi codicis manuſcripti ampliſsimè excudi iuſſit: tot inſignes Græci, Latini, Etruſci idiomatis ſcriptores vigilijs, & labore eruditiſsimorum virorum illuſtratos typis edendos curauit: Paulum Iouium cum primis, & Io: Baptiſtam Adrianum ad ſui temporis hiſtorias conſcribendas ampliſsimis oblatis præmijs perſuaſit. Virtutes, atque opera tam Magni Parentis imitatus eſt Franciſcus, qui in Imperio ſucceſsit, & antiquitatis ſtudio maximè delectatus, præclaras, atq; innumeras venerandæ vetuſtatis reliquias, lapides, gemmas, numiſmata collegit. Hunc excepit Ferdinandus primus verè litteratorũ Mecoenas, qui Bibliothecam codicibus Hæbreis, Chaldæis, Syriacis, Egyptijs, Perſis, & Arabicis (inter quos hi libri Apollonij, & Archimedis extant) feliciſsimè ditatam reliquit, atque eruditiſsimos viros Hieronymum Mercurialem, Petrum Angelum, Iacobum Mazzonum, Io:

Bapti-

Baptiſtam Raimundum, totq; alios largiſsimis ſtipendijs euocauit, atq; aluit; Sacroſanctaq; Euangelia fidei propagandæ ſtudio imprimi, Euclidem quoque, Auicennam, Geographiam Nubienſem typis nitidiſſimis Arabicè omnia edi curauit. Non abſimilis litterarum amore Coſmus Secundus, cuius nomen, ac gloriam magnus ille Galilæus erga Principem de ſe optimè meritum gratiſsimus in cœlum vexit, ac inſculpſit; » Vir nempe (vt Gaſſendus ait) ſuper æthera notus; quo » alium non extulit ætas hæc noſtra glorioſiorem; quippe tametſi orbis terrarum laudatis virorum illuſtrium » dictis, factiſq; circumſtrepit, horum tamen omnium » memoriam ſilentium altum breui inuoluet: nomen, » quod ille cœlo inſcripſit, donec cœleſtia curæ erunt, » apud homines perennabit. Tandem Ferdinandus Secundus ingenij perſpicacia mirabilis, maieſtate imperij præclarus, virtutibus, & Philoſophia illuſtrior feliciter regnat: is eſt, cuius munificentia, ac fauore Europa vniuerſa in Etruſca hac regia (ne aulicum decus, aut cultum, nobilium obſequia, & famulitium, Muſæum ampliſsimum, ac ditiſsimum referam) eruditorum frequentiam philoſophantium, diſceptationes, ac perpetua exercitia literaria æſtimari, ac florere merito ſuſpicit, & veneratur; cum Muſæ reliquis in aulis tantũ non neglectæ huc ſe ſe recepiſſe veluti in ſedem ſuam videantur; hìc enim in delicijs habentur ſectiones anatomicæ, cœleſtes obſeruationes, chimica eſperimenta, vniuerſęque naturalis philoſophiæ accurata inquiſitio. Vno verbo hinc credula philoſophia exulat; non hominum libri in pretio habentur, ſed Dei volumen, ſcilicet rerum natura veris, accuratiſq; experimentis ſummo ſtudio indagatur, & colitur. Præcla-

ris

ris hiſce ſtudijs lactatus, & innutritus es, Princeps Sereniſsimè, tot tantorumq; heroum progenies, quorum virtutes incomparabiles, & egregia geſta conſentaneũ eſt in te vno veluti foco ſpeculi parabolici ſimul collecta, & vnita ſplendeſcere, vt totas vires ſuas ſumma virtus experiatur, atq; ineffabilem bonitatem, beneficentiæq; ſtudium, virtutum, artium, ſcientiarum cultum à maioribus acceptum ſtudioſè, & religioſè conſerues, atq; ad poſteros auctum tranſmittas.

Si igitur hominum genus natura dictante primum Deo Op. Max., & beneficentiſsimo gratias iuſtis honoribus, & memori mente perſoluendas eſſe decreuit, atq; ne memoria beneficiorum deleretur templa, fana, feſtos dies, & ludos inſtituit. Secundo loco eoſdem ferè honores Heroibus, ac Principibus ſtatuit, nõ his qui armis, & cæde potentiam violenter ſibi vindicarunt, ſed qui præſtantibus virtutibus ornati magna beneficia in homines contulerunt, ſique eos non humanis, ſed diuinis laudibus celebrari iuſsit, potiori iure tibi, Princeps Glorioſiſsimè, præclariſsimorũ heroum, ac virtutum hæredi plauſus debitus, honores, laudes, & grati animi monumenta ab eruditis Europæ viris offeruntur. Quandoquidem magna, & certa illos ſpes tenet ampliſsimum patrimonium heroicarum virtutũ, quod Coſmus Pater Patriæ, Laurentius magnificentiæ exemplar, Leo ſui ſæculi felicitas, inſequenteſque generoſiſsimi Principes, atq; Heroes de genere humano, & bonis litteris optimè meriti tibi reliquerunt non ad faſtum, ſed ad imitationem, & ſtimulum gloriæ, nec externè, ſed in animo, & cordis ſacrario piè a te, ac reuerenter curandum, ſeruandum, amplificandum ea præcipuè qua polles præclara indole, ingenijq; acumine,

mine, ac felicitate, amoreq; ſcientiarum, ac bonarum artium, quibus te Deus, & Natura indulgentiſsimè cumulauit. Hoc quidem ſummopere precatur, & vouet eruditorum Reſpublica, ò Princeps longe incomparabilis, idque vaticinatur ex hoc tuo pręclaro decore, & ſummæ bonitatis ſpecimine: Quippe, ò Principum decus, & ſtudioſorum delicium, perbellè docuiſti virtutis heroicę magis proprium eſſe benefacere, & alijs prodeſſe, quàm laudes meritas captare, & exigere; dum veluti epulo lautiſsimo in hac ſolemni pompa tuarum nuptiarum, ſcientiarum cultores donatos voluiſti; quid enim pretioſius, & magis expetitum veritatis ſtudioſis præbere poſſes, quàm Quintum, Sextum, & Septimum libros Conicorum Apollonij Pergæi hactenus deploratos, atq; lemmata Archimedis, quæ Sereniſsimus Ferdinandus Secundus inclytus, atque optimus parens tuus ex Arabico verti, & typis excudi ad communem reipublicæ litterariæ bonum iuſsit? Tanto ergo pro beneficio

— grates perſoluere dignas
— Non opis eſt noſtræ,
Numina tibi
— pręmia digna ferant, quę te tam lęta tulerunt
— ſęcula. qui tanti talem genuere parentes.

CAVE CHRISTIANE LECTOR.

ABalphatus Aſphahanenſis Apollonij Paraphraſtes religione Maumedanus fuit; quapropter aliquot locis more ſuę Gentis non modo Regi ſuo Abicaligiar Carſciaſeph nimium adulatur, verùm etiam impiè loquitur. Nihil tamen omiſsum eſt, vt antiquus Codex integrè, fideliterq; exhiberetur. Hęc eadem de Archimedis interprete dicta ſunto. De his te præmonitum volui, ne inter legendum piæ aures tuæ vel minimùm offenderentur.

Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS.

PROOEMIVM

ABALPHATHI FILII MAHMVDI, FILII ALCASEMI, FILII ALPHADHALI ASPHAHANENSIS.

LAVS DEO VTRIVSQVE SECVLI DOMINO.

MATHEMATICA quamuis practica sit scientia, ac disciplina, cuius legibus, & præceptionibus disponitur, atq; dirigitur intellectiua potentia ad absolutam, perfectamque imaginum cognitionem, præscindendo à materijs, qui est primus gradus ascensionis à sensibilibus ad intelligiqilia; nihilominus suarum claritate demonstrationum, non solùm ab alijs differt scientijs verùm

etiam longiſsimè ijs præſtat, atq; præcellit, eò quòd fæcium, ſordiumque dubitationum, & aliorum huiuſmodi generis accidentium expers omninò ſit, atq; libera. Ea autem propter ſe habet ad ſcientificam potentiam, quemadmodùm habent ſe limpidiſsima quæque orbi ſolis oppoſita ad viſiuam potentiam. Ex quo ad illam comparandam, conſequendamq; non excitatur intellectiua duntaxat vis, verùm etiam multùm exacuitur, atq; delectatur, ponderatis præſertim, expenſisq; illius demonſtrationibus, & certiſsima earum comprehenſa, & cognita veritate. Tunc quippè huius veritatis percepta animus odorationis ſuauitate, auidè, & ardentiùs appetit conſequi ea omnia, quæ illius ſuggerunt demonſtrationes, earumque potiri. Subindè verò procedere conatur vltrò ad vltimum finem, nempè ad proprietatum, & obiecti illius cognitionem, excelſitatem, atque præſtantiam comparandam, tandemque ad ea omnia, quæ ad ipſam ſpectant. Quod quidem luminis cùm ipſius affulſerit ſtudioſis, & quàm præcellens ſit, animaduerterint, omnes ſuos contulerunt conatus ad libros componendos, conſcribendoſq; de ipſius elementis, principijs, ac omnibus ijs, quę indè deriuantur, & eò ſpectant. Solidiora porrò profeſsionis huius fundamenta omnium primus iecit Euclides in eo libro, quem de elementis inſcripſit, in quo fundamentales continentur rationes linearum tam rectarum, quàm curuarum, nec non ſuperficierum prouenientium vel ex earum ſingulis vel ex omnibus ſimul ſumptis. Rationes præterea habentur ſolidorum prouenientium, vel

ex

ex ſuperficiebus rectilineis, qualia ſunt habentia baſes; vel ex curuis, qualia ſunt ſphœrica; vel ex hiſce compoſitis, quales ſunt ſuperficies Cylindrorum, & Conorum. Verùm enim verò figuris ex ſegmentis ſuperficierum planarum prouenientibus, & cuiuſlibet etiam Solidorum Sphœricorum, Cylindricorum, atque Conicorum nullum hactenùs iactum erat fundamentum, aut præmiſſa elementa, vel fundamenta aliqua. Ex quo illi priſci librorum Scriptores aliquid de ijs innuebant duntaxat, & quidem leuiter. De Sphœricis autem aliquid ex eorum legebant proprietatibus, & paſsionibus; ſiue ex proprietatibus ſegmentorum indè prouenientium; vel figurarum in ea incidentium; vel ex accidentibus quibuſdam ipſius Sphœræ, quæ ex eius procedunt motibus; vel quia ſe inuicem includunt, & componunt. Nam Sphœra aliqua opus illi erat ad Sphœræ vniuerſalis cognitionem conſequendam vna cum eius orbibus, ac motibus, & ad inuicem atque ſua centra applicatione. Et id tandem, donec librum Almageſti compoſuit Ptolomæus, in quo ea omnia recondidit copiosè, quæ illi anguſtè, & leuiter hoc de argumento ſuis innuebant ſcriptis, tradens non ſolùm methodum, ac rationem eorum aſſequendi cognitionem, ſed, & inſtrumentorum etiam vſum. Quod profectò iactum fuit tamquàm vniuerſale quoddam fundamentum, ac principium ea omnia comprehendens, quæ ad Sphœrica pertinent; vndè hac in re ſatis abundè ſtudioſorum ſiti, & deſiderio conſultum fuit. Porrò Appollonius profeſsionē, & diſciplinam hanc ad ſupremum per-

ſectionis perduxit gradum, Conicorum componendo librum, qui Conicarum ſectionum complectitur proprietates, quæ ſublimiorem, eminentioremque diſciplinæ huius ſibi vindicant locum. Et ſane tot propoſitionibus, totque figuris illum ditauit, vt admirabiles illæ nuncupari meruerint, eò quòd contineant lineas curuas, ſeu medias inter rectas, ac circulares ſeſe inuicem ſecantes; adeoque miros quidem fundunt ſenſus, & proprietates. Quos quidem omnes libros, qui diſciplinæ huius fundamenta ſunt, ad Arabicam tranſtulere linguam illius ſtudioſi. Quamuis autem liber iſte Conicorum præſtantiſsimus ſit, tam ratione ſui, quàm præclariſſimi Auctoris, nihilominùs nimiam ob illius obſcuritatem, difficultateſque obuiam occurrentes, ac profundiſsimos, quos continet ſenſus; tum etiam ob innumeras, & admirabiles figuras, & propoſitiones; tandemque ob temporis diuturnitatem, ingenteſque perferendos labores ab interprete, qui eùm ex Græca transferat lingua, dudum neglectus fuit, ac penè etærnæ datus obliuioni, vt nemò hactenùs illum, vel Commentarijs illuſtrauerit, vel congeſſerit in ordinem, quamquàm ſummè ſit neceſſarius, ac vtiliſsimas complectatur propoſitiones, & figuras. Quapropter diù ſepultus, & ignotus iacuit, & penè ad defectum vſque, ac interitum, cùm apud Diſciplinæ ſtudioſos, tum etiam ipſos profeſſores, & fragmenta ex illo circumferebantur aliqua, & ea ſanè faciliora, quia obſcuriora euitabant omnes, atque declinabant; vno verbo integrum hactenùs viderat nemo. Hinc mihi famulo

viſum

PROEMIVM.

visum est, me Reipublicæ Literariæ gratam rem facturum, si eum in integrum restituam, ac in vnum congeram volumen, vt ita redactus facilis sit portatu, sub omnium versetur oculis, omnium teratur manibus, & ad reliqua facilior reddatur aditus. * Quem etiam librum comparare studui Bibliothecæ domini nostri Regis præstantissimi, munificentissimi, doctissimi, iustissimi, victoris, triumphatoris, Fidei defensoris, celsitudinis Monarcharum, gloriationis sui generis, gloriæ religionis, solis Regum, Abicaligiar Carsciaseph Filij Alì, Filij Phrami, Filij Hasami, Principis Fidelium, quem incolumem, ac sospitem seruet Deus, eiusque deprimat hostes, & proterat osores. Nunc autem aliquid de ordine, & rerum dispositione, ac concisa breuitate dicendum nobis superest. Nam rerum ordo, & accommodata dispositio id intelligentiæ afferunt auxilij, quod in scientijs comparandis luculentissimæ demonstrationes; concisa verò breuitas, ac suis terminis necessarijs expedita, & ritè dispositа, eandem penè proportionem habet ad intelligentiam, ac causa ad causatum. Ea autem propter ordinis conseruatrix virtus venatio dici solita est, & satis quidem appositè, & eleganter. Nam concepti sensus, & in mente comparati, si intra ordinis cancellos includantur, singulos suis dispensare momentis procliuè poterit conseruatrix rerum illa virtus. Simillimi, alioquin erunt feris per vastas vagantibus solitudines, ac nullo coércitis vallo, quorum imagines, & motus ita sese offerunt conspicienti, & contemplanti, vt nullo negotio eas capere,

* *Impiè adulatur Regi suo Paraphrastes Arabicus.*

capere, & aucupari se posse arbitretur, at cum id præstare tentat, statim dilabuntur, atque euanescunt. Ea planè ratione termini rerum singulos in mente conceptos sensus designantes, nisi suo coércentur ordine dilabuntur, & euanescunt; præcipuè cùm modò hanc, modò illam fundant significationem, cùm iuxta labentis temporis varietatem, tùm diuersitatem regionum, & prouinciarum, vt non eadem vbique, & semper sit par ratio, licet ijdem in anima maneant habitus. Ex quo palam, & planè relinquitur, quòd acquisiti illi termini non inhæreant, quemadmodùm subsistenti essentiales inhærent differentiæ; neque etiam quemadmobùm proprietates necessariò consequentes suo inhærent subiecto; sed ea inhærent ratione, quá accidentia difficilè, ac tardè amouibilia. Quandoquidem termini eiusmodi vocabula sunt quædam rebus imposita, & applicata ad sensus commodè eliciendos, atque eruendos. Quod autem vel diuino factitatum est instinctu, vel Prophetica inspiratione edoctum, sicut indicat nobis Altissimus Deus dicens: *(in Alcorano) & docuit Adamum cuncta nomina; vel iudicio, & calculo sapientum virorum, quemadmodùm præstitisse legimus primos illos artium inuentores. & scientiarum; vel magna aliqua necessitas hominum coégit vulgus ad eiusmodi excogitandos terminos, rebusque imponendos, ac translatione quadam vocabula mutuanda, & ad alias, atque alias res transferenda, ex quo synonymorum ea enata est copia. Nec vllus profectò sapientum, qui has professi sunt Disciplinas, aut qui ipsorum

* *Insulsè ex Alcorano profert, quæ sunt in Sacra Genesi.*

ſorum ſecuti ſunt veſtigia, hanc imponendorum terminorum rationem aſpernatus ſubindè eſt, aut ab illa abhorruit; quinimò acceptiſsima ſemper omnibus fuit, vt quæ maximum rerum intelligentiæ ſplendorem affert, & claritatem. Eandem igitur hanc ob cauſam in colligendis, digerendiſque hiſce famulus libris, antiquorum ſapientum, & artium profeſſorum, inuentorumque inſiſtens veſtigijs, terminos, & vocabula ſingulis rebus imponere, & earum vim breui declarare definitione cenſuit, vt ita ſuis coércita omnia limitibus nequeant in varias partes, & ſenſus diffluere, ad conciliandam lectori inter legendum hos Apollonij libros eam, quæ fieri poteſt, facilitatem. Innui præterea eandem etiam ob cauſam obſcurioribus in locis expoſitionem aliquam, ne vlla ſubindè relinqueretur difficultas ad mentem Auctoris cumulatè aſſequendam.

Tandem lectorem meum enixè rogo, vt excuſatum me habeat, ſi mendum aliquod, aut erratum meam ſubterfugerit diligentiam.

Interea Deum ſupplicitèr deprecor Altiſsimum, vt nos ad ea, quæ vtiliora nobis ſunt, demùm perducat.

Ne vacaret pagina ipſiusmet Apollonij Pergæi ex Epiſtola ad Eudemum Argumenta in quatuor Conicorum libros poſteriores, qui Græcâ linguâ iniuria temporum perierunt, hic apponuntur, quorum tres ex Arabicis M.SS. nunc exhibentur.

Reliqui autem quatuor libri ad abundatiorem ſcientiam pertinent. Quintus de Minimis, & Maximis magna ex parte agit. Sextus de Æqualibus, & Similibus coni ſectionibus. Septimus continet Theoremata quæ determinandi vim habent. Octauus Problemata conica determinata.

Hæc eadem Pappus Alexandrinus lib. 7. Mathemat. Collect., atq; Eutocius in Commentar. ad Apollonium.

ABRAHAMI ECCHELLENSIS

IN LATINAM EX ARABICIS

Librorum Apollonij Pergæi versionem

PRAEFATIO.

APOLLONIVS Pergæus vetustissimus, ac magni nominis Græcus auctor otto de Sectionibus Conicis conscripsit libros. Horum priores quatuor hactenus omnium teruntur manibus; posteriores verò, nescio quo fato, & rerum vicissitudine sunt amissi, ac non sine magno literatorum animi mœrore iamdudum deplorati; & nusquam perdiligenter non quæsiti ab ijs præsertim, qui Geometriæ, & Matheseos operam nauant studijs, sed fustra diu. Tandem deprehensum est, hos, quemadmodum, & reliquam penè Grecæ sapientiæ supellectilem ad Arabum migrasse scholas, ibique Arabicè conuersos, & Arabicis indutos ornamentis, in illius gentis tamquam extorres, & inquilinos latitasse Bibliothecis. Quamobrem eorum miserti vicem Serenissimi Ma-

gni

gni Etruriæ Duces, inde magno soluto pretio redemerunt, ipsorumque tam præclara opera quasi iure postliminij vindicarunt, ac demum patrio solo reddiderunt. Attamen sat non fuit, aut visum est summis istis Principibus Apollonium in libertatem asseruisse, & ex Barbarorum eripuisse manibus, ac in celeberrima totius Europæ Auorum reposuisse Biblioteca; sed omnem nauarunt operam, & studium, vt Latinà etiam donati linguà in literatorum gratiam publici iuris fierent. * Ea propter verè Magnus ille in omnibus Ferdinandus primus celeberrimam eam erexit Typographiam è nomine gentilitio Sereniſſimæ familiæ *Mediceam* nuncupatam, cui nullam similem, aut parem vidit Christianus Orbis, aut visurus vnquàm est; siue characterum, præsertim Arabicorum, spectes copiam, siue varietatem, siue nitorem, siue elegantiam. Dictis hisce profectò nostris spectatissimam, ac manifestissimam fidem faciunt Sacrosanti Euangeliorum libri, Auicennæ, Euclidis, aliaque Arabica opera ijs edita typis, quæ omnibus Orientis gentibus admirationi sunt, atque adeo auidissimè expetuntur, ac magno comparantur pretio. Sed hæc non typis duntaxat excudi iussit munificentissimus Princeps, verùm etiam viros linguarum peritissimos ingenti conduxit stipendio, qui Arabicorũ Codicum vacarent versionibus. Hos autem inter principem obtinebat locum Ioannes Baptista Raimundus vir, & scientiarum cognitione, & linguarum peritia omnium ore celebratissimus. Is autem, & scriptis literis, & familiaribus cum amicis colloquijs Apollonij librorum versionem sæpenumerò pollicitus est. Imò erant, qui libris editis versionem iam à Raimundo confectam, & perfectam esse, in vulgus iactarent. Verùm cum nunquam visa fuerit eiusmodi versio, neque inter ipsius scripta reperta, neque in Aduersarijs notata, aut catalogo ipsius librorum adscripta, quæ omnia religiosè hactenùs conseruantur, hoc vnum credendum supereſt, eam votis solùm susceptam, & cogitatione delineatam fuisse; rem autem, aut quòd per otium ipsi non licuit, aut ob Codicis lectionem, & scripturæ difficultatem, quæ maxima est, vel ob orationis abstrusæ, & sermonis ancipitem, ac multiplicem verborum potestatem, vel tandem aliquam aliam ob causam, quàm, conijcere difficile est, perficere non potuisse.

* *Fallitur C.V. Ger. Io: Vossius hoc tribuens Sixto V. P. M. C. 17. 29. de scient. Mathem.*

Nihilo

Nihilo tamen minùs Magni Principis, Magni Filij, Magni Nepotes aut ab inceptis destiterunt, aut generoussimi animi dudum conceptum studium remiserunt. Quamobrem ante biennium scriptis à Sereniſſimo Principe Leopoldo literis officij plenis, & humanitate, tam proprio, quàm Magni Ferdinandi II. fratris nomine, impoſita mihi fuit hæc prouincia optatæ diu, & penè deſperatæ verſionis. Quo ſanè, vt ingenuè fatear, nihil iucundius, nihil carius, nihil antiquius accidere mihi poterat; quòd hac data occaſione, aliquam grati animi ſignificationem exhibere me poſſe putabam Sereniſſimo illi Principi, cuius ampliſſima in me beneficia ſum expertus. Memini profectò, nec ex animo meo excidet, imo clauo fixum trabali manet, quanta in me contulit Magnus Ferdinandus Secundus ornamenta, quanta in me vſus eſt liberalitate, & beneficentia, non tantùm dum fortuna mihi arridebat, non ſolùm dum res ſuccedebant proſperè, non modò dum ad illum ab Amiro Fachraddino miſſus ſingulari felicitate fruebar, ſed etiam in naufragio, & iactura illa barbarica, in Carrellina coniuratione, & proditione, in aduerſiſſima fortuna. Sed hæc omnia magis à me exprimi poſſunt profundiſſimo ſilentio, quàm verborum copia, aut oratione altius exaggerata. Verùm enim verò dum arbitrabar, mirificam nactum me eſſe opportunitatem gratificandi Principi de me optimè merito, & exhibendi aliquod grati animi ſignum, penè concepta excidi ſpe. Nam aperto Apollonij Codice, & coniectis in eum oculis duæ primo ferè intuitu ſeſe mihi obtulerunt difficultates, quas à me neque ſuperari, neque vinci poſſe prorsùs exiſtimaui. Hinc ſummus, & abſtruſus pudor, hinc plurimus ſudor ingenuè omnia fateor. Et eò magis intimis animi ſenſibus angebar, quod ea verſio non in ſeceſſu aliquo fiebat, & remotis arbitris, vbi aciem mentis abducere, difficultates commodè expendere, animoque intento, & libero luſtrare quæ in rem eſſent, ac per otium poſſem, ſed præſentibus grauiſſimis viris, & quidem, ex tempore, & nulla data præmeditandi facultate, interpretationem facere compellebar. Ea fortè illorũ præclariſſimorũ virorũ de me erat opinio, & exiſtimatio, quàm tamen parum abfuit, quin penitus perdidiſſem, cùm vix, & ne vix quidem ſcripturam illam legere poſ-

sem, quæ prima erat difficultas. Nam puncta aberant diacritica imprimis (de punctis vocalibus hic non loquimur, nec eorũ inter legendum à pentis linguæ habetur ratio, aut negotium aliquod faceſſunt), nempè ea, quæ formam dant literis, literaſque conſtituunt, & ſine quibus literæ ſunt pura, ac nuda materia omni ſpoliatæ forma. Quid autem ſit materia omni ſpoliata forma, neque ipſi ſciunt Philoſophi, quorum id ſcire intereſt. Eodem prorſus ſe habent modo Arabum literæ, ſeu potiùs literarum ductus, & lineæ diacriticis hiſce carentes punctis. Eadem enim figura, ſeu linea, exempli gratia, ſi vnum ei ſuperponitur punctum erit N. ſi verò ſupponatur, B. ſi duo ſuperponuntur, T. ſi tria Th. ſi duo ſupponantur, I. & ſic de cæteris ferè omnibus arguendum eſt. Si quis autem percontabitur, quid erit illa figura, & linea, ſi nullum adſit punctum è reſpondetur materia ſine forma, & quid ſit prorsùs ignoratur. Augebant etiam lectionis difficultatem ipſæ literarum figuræ, quæ ita raptim, & curſim, licet elegantiſſimè, ductæ erant, vt vix ab inuicem quandoque, & identim diſtinguerentur. Hæc autem difficultas terruit quidem primo aſpectu ſed breui, & citius quàm credebam, ſuperata fuit, tum ſtudio, & diligentia, tum experientia, quàm ab ipſa ineunte ætate ex lectione eiuſmodi ſcriptorum generis comparauimus.

Altera difficultas, quæ ſe nobis obtulerat, maioris quidem erat ponderis, & momenti; verſabatur quippè circa diſciplinæ vocabulorum intelligentiam, & notionem, quorum ignari eramus, & penitùs ieiuni. At hanc quoque difficultatem facili negotio ſuperauimus ope, & opera Clariſſimi, atque Doctiſſimi Viri D. Ioannis Alphonſi Borelli Matheſeos in Piſana Academia profeſſoris celeberrimi, qui, & verſionem ipſam promouerat apud Sereniſſimos Principes, & Codicem comportauerat idem Romam, ac perpetuus mihi aderat Dux, & Magiſter. Et ita ſanè ea omnia, quæ ad Diſciplinæ, eiuſque vocabulorum notionem pertinebant, clarè, dilucidè, & explicatè ordine inſinuauit, vt breui meis auditoribus Matheſeos profeſſor viderer. Porrò quod hac in re magis mirandum eſt, nec ſilentio prætereundum, ea erat Viro illi Doctiſſimo ſingularis ingenij perſpicacitas, vt ſæpe in abſtruſis quibusdam locis, non ex integris,

tegris, inquam, præmissis, sed ex vnica dictione totam illationem inde colligeret, non sensu, sed totidem penè verbis, ac si Arabica legeret verba, & linguæ veteranus esset professor. Proindè verius ipsi, quàm mihi adscribenda est hæc versio, longè tamen absit omnis adulatio, & animi propensio in virum amicissimum. Hac mutua contentione, & interpretandi, & vertendi trium Mensium spatio versio nostra confecta, & absoluta est, in qua horis tantummodò matutinis propter nimios calores æstiuos consumpsimus. Et hæc de ratione versionis posteriorum librorum Apollonij, & methodo satis dicta sint. Nunc de ipso Apollonio, eiusque librorum Arabica versione, & illius auctoribus nonnihil dicere, par, & consentaneum est.

Apollonium sub Achaz Filio Ioatham regis Iuda post Thaletem Milesium Floruisse, Arabes perhibent Scriptores. Sic enim lib. 3. Chronicorum in Achaz scriptum reliquit Gregorius Barhebræus: *Post Thaletem celebris fuit in Geometricis præcipuè discipulus Apollonius Naggiar.* (ideſt faber lignarius) *Is composuit Tractatum de scientia Conicor. nempè de lineis, quæ neque rectæ sunt, neque arcuatæ, seu curuæ, sed inclinatæ.* Notandum hìc est vocem *Naggiar*, quæ Apollonio tribuitur, vt cognomen, & nos *fabrum lignarium* vertimus, poni (vt opinor) pro *Geometra*, & id fortè exindè, quòd instrumenta, quibus vtebantur Geometræ ex lignis olim conficiebantur. Quod, & indè conijcio, quia hoc idem vocabulum Euclidi quoque tribuitur apud eundem Gregorium sic de illo scribentem. *At Euclides Naggiar ex Vrbe Tyro erat.*

De versione autem librorum Apollonij in Arabicam linguam ita statim subdit mox laudatus Gregorius: *Ex his autem versi sunt in Arabicam linguam tempore Almamuni septem libri, eius tamen præfatio indicat, octo fuisse libros; qui quidem Tractatus cum alio Tractatu eiusdē Apollonij causam dedere Euclidi suorum componendorum librorū longum post tempus.* In his longè videtur discrepare Gregorius à communi Chronologorum sententia, & opinione, qui Apollonium Floruisse scribunt anno periodi Iulianę 4474. ideſt annis ante Christum Dominum 240. adeoque multò iunior est, quàm facit illum Gregorius. Discrepat præterea ab ijsdem Chronologis in ætate Euclidis, quem Apollonio iuniorem agnoscit,

vbi

vbi illi cum collocant in anno periodi Iulianæ 4430. ideſt ante Chriſtum Dominum annis 284. iuxta quàm opinionem Apollonius iunior erit Euclide annis 44.

Almamun autem ſub quo facta eſt librorum Apollonij verſio in Arabicam linguam ex laudato Gregorio Chalipha ſecundò ſalutatus eſt An. Heg. 203. ex omnium ſcriptorum ſententia, qui annus ex Tabula Aerarum Iſmaelis Sciahinſciah, quàm refert in hiſtoria Gentium, reſpondet Anno Chriſti Domini ſolari 826. plùs minuſue. Nam Hegiram accidiſſe anno Chriſti 631. habet Iſmaèlis Tabula contra omnium Chronologorum Orientalium opinionem, qui eam reponunt in ann. Chriſti 622. & vndecim Heraclij, vno excepto Eutychio Alexandrino, qui eam reponit in ſua hiſt. Eccles. in an. Chriſti 614. ſcribit enim ibi: *A Chriſto Domino noſtro vſque ad Hegiram ſunt anni 614.* In quo octennio integro diſcrepat ab alijs Chronologicis. Sed hæc leuiter tetigiſſe, ſatis eſt; non eſt enim animus hic temporum apices data opera excutere, nec id ſanè vacat, nec huius loci eſt.

Principem autem Almamunum, eam procuraſſe verſionem librorum Apollonij, non ſolùm facilè, ſed procerto credendum eſt. Nam is omnium ſcientiarum ſtudijs vehementiſſimè ardebat, proindeque congerendorum vndique librorum nunquàm finem faciebat, eratque in eorum interpretes prolixiſſimus. Mira ſanè, quæ de illius, ac proaui Abugiahphar Almanſur animi propenſione in literas, & literatos viros refert Sahadus Filius Ahmedi Andaluſij in Hiſt. Arabum. *Is*, inquit ibi, *erat ſtatus Arabum in gentilitate. Poſtquàm verò fauoribus proſequutus eſt Deus Altiſsimus Hacſemitas, deuoluitque ad eos imperium, conuerſæ mentes ſunt, & intellectus à ſtupore, in quo iacebant, & exſuſcitata ingeniorum acumina poſtquàm extincta erant. Horum autem primus, qui promouendis ſcientijs operam nauauit, erat Abugiahphar Almanſur ſecundus Chalipha. Qui tametſi Iuriſprudentiæ deditiſsimus eſſet, & peritiſsimus; nihilominus, & Philoſophiæ vacabat ſtudio, ſed ardentius Aſtronomiæ. Cùm verò Imperij ſuſcepiſſet ſceptra Chalipha ſeptimus Abdalla Almanſun filius Aaronis Raſcidi, abſoluit ea, quæ inceperat Auus ipſius Almanſur, operamque dedit ſcientijs vbique inquirendis. Hinc Græcorum ſcripſit Imperatoribus rogans ſibi mitti quotquot*

haberi

haberi possunt Philosophorum libri, qui quotquot comparare potuerunt miserunt ipsi. Quibus ille vertendis peritissimos quosque selegit interpretes, & curam munxit interpretandi, & versi sunt eo studio maiori, quod fieri potest. Quo autem facto homines non solùm incitabat, sed & cogebat quodammodò, vt ijs legendis, & ediscendis operam darent. Ipse verò sapientes viros familiarissimè conueniebat, eorumque peramicè vtebatur consuetudine, atque plurimum illorum delectabatur colloquijs. Nouerat, & quippe optimè, sapientes viros Deo Altissimo mortalium esse carissimos, ac ipsi coniunctissimos, eò quod sese dederunt animæ rationalis virtutibus comparandis, posthabitis, & contemptis ijs, quibus Sinenses, ac Turcæ, eorumque similes incumbunt. Hi enim ostentare amant artium Mechanicarum subtilitatem, animæ irascibilis gloriantur potentijs, & concupiscibilis iactant se se facultatibus. Cùm tamen hæc omnia communia cum ijs ipsa habere bruta, scire debeant; imò longè ab illis superantur. Peritia, & subtilitate artis ab Apibus, quæ sua examina, seu penarium sexangula mirà construunt arte. Audacia, & fortitudine à Leonibus, aliisque feris, quibus in hisce haud comparandus est homo. Libidine, & Luxuria à suibus, atque alijs, quæ hic memorari necesse non est. Hacque de causa sapientes viri sunt lampades in tenebris, & mortalium omnium Domini. Et heu quàm turpe, atque deforme est terrarum hoc orbis theatrum, quoties suis caret sapientibus. Hæc Sahedus in Historia Arabum.

Nostram autem versionem hanc Arabicam quod attinet, alia prorsùs est ab ea, quæ sub Almamuno confecta est. Hoc planè patet ex ipsius Auctoris Abalphathi in præfatione verbis. Dicit quippè ibi, se eam adornasse versionem pro regis Abicaligiar Bibliotheca. Abicaligiar autem rex salutatus est, teste Sciahinsciah, Gregorio, & alijs, Hegiræ anno 372. nempè annis 169. post Almamuni inaugurationem ijsdem, quos mox laudauimus, auctoribus.

Versionem tamen illam, quæ sub Almamuno facta est, nequaquàm vidit nostræ huius versionis auctor Abalphath, quemadmodùm ex verbis eius, quæ ad septimi libri adiecit calcem, patet luculenter. Ibi enim, *puto* inquit, *me in hoc*, nempè in hac versione concinnanda, *quoscunque alios anteuertisse*. Itaque existimat is noster Auctor, se omnium primum Apollonij versionem Reipublicæ literariæ dedisse. Quod, & in ipsa quoque

innuit

innuit præfatione, asserens vsque ad sua tempora nullam integram librorum Apollonij extitisse inter Arabes versionem; sed fragmenta quædam. Ex quo arguere est, aut eum minimè antiquiorem Almamuni vidisse versionem, aut istam non fuisse integram, sed Epitomem aliquam ex septem Apollonij decerptam libris, de qua ille in præfatione. Vt vt sit nostra hæc alia prorsùs est ab ea, & ad ipsius auctoris calculos redacta, atque adeò integra, & omnium perfectissima, atque absolutissima.

Cæterùm admonitum volumus benignum lectorem, nos in hac versione adornanda satis presse Arabicam secutos esse phrasim, nec omninò elegantiam, & venustatem linguæ expressisse, arbitrantes id maximè pertinere ad fidelis interpretis partes, & officium.

Ea autem quæ occurrunt circa ipsam phrasim, & vocabula nonnulla obseruanda, Arabicæ Editioni reseruauimus, rati ea commodius, & magis ad rem ibi exponenda esse, & suis exprimenda characteribus. Interim benè vale, & hoc qualicunque fruere studio, & labore.

IO: ALFONSI BORELLI

PRÆFATIO AD LECTOREM.

ACCIPE tandem, ſtudioſe Lector, in ſolemni hac pompa nuptiarum Sereniſſimi Principis Etruriæ Regio ſplendore à Sereniſſimo Magno Duce parata tamdiu deploratos, & expetitos libros poſtremos Conicorum Apollonij Pergæi, vtque ſine mora mens tua epulis hiſce lautiſſimis ſaturari poſsit, non te demorari diutine patiar in limine, recenſendo ſcilicet nomen Apollonij, patriam, ætatem, & opera ab eo conſcripta, neque inſuper doctrinæ conicæ ortum, & progreſſum à primis incunabulis ad virilem vſque, & vegetam ætatem, ad quàm Apollonius eam euexit, propter quod facimus magnus Geometra cognominatus eſt; hæc enim trita iam ſunt, & vulgaria: breuiter tantummodo percurram, quæ ad notitiam horum librorum facere videntur.

Illius pretioſiſsimæ bibliothecæ orientalis, quàm Sereniſsimo Ferdinando Primo gratitudinis ergo reliquerat Ignatius Neama Patriarcha Antiochenſis libellum nitidiſsimè Arabicè ſcriptum mihi oſtenderat Sereniſſimus Princeps Leopoldus Muſarum decus, & gloria, noſtrique ſæculi lumen eruditum. Codici inſcripſerat Raimundus, ſiue quis alius: Otto libri de Conici d'Apollonio del Patriarca. *Summa lætitia libellum exoſculatus, licet Arabici idiomatis ſim prorſus ignarus, non potui me continere, quin ſaltem contrectarem, atque reuoluerem paginas illas; cumque præter figuras mihi ſatis notas quatuor priorum Apollonij librorum vidiſſem alias conicas figuras, in quibus ab vno puncto in eis collocato eductæ erant plurimæ rectæ lineæ ad coniſectionem, illico in mentem venere illa Eutocij verba in expoſitione epiſtolæ Apollonij ad Eudemum:* Quintus, *inquit*, liber de Minimis, & Maximis magna ex parte agit; quemadmodum enim in elementis didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concauam ipſius circumferentiam pertinent, maximam eſſe, quæ per centrum tranſit, earum vero, quæ ad conuexam, minimam eſſe, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur, ita & de

coniſectionibus in quinto libro inquirit. Sexti, ſeptimi, & octaui libri propoſitum manifeſtè ab ipſo Apollonio explicatur. *Cùmq; poſteà à quodam Maronita Arabicè callente accepiſſem tractatum, ſeu librum quintum Apollonij eſſe illum, in quo figuræ prædictæ delineatæ erant, pariterque in ſubſequenti libro ſexto conſpexiſſem figuras alias exprimentes æqualitatem, & ſimilitudinem ſectionum conicarum, mihi certum fuit, verè Apollonij eſſe libros illos. Haud tamen negabo ſcrupulum, ac dubitationem iniectam, ex eo quod textus ille Arabicus non præferebat in fronte Apollonij, vel vllius alterius nomen, & definitiones primi libri centuriam ſuperabant, cum Apollonius non niſi nouendecim ſuo primo libro appoſuiſſet. Inſuper in prioribus quatuor libris non totidem figuras conſpiciebam, nec omnino ſimiles, eaſdemque, nec eodem ordine diſpoſitas, ac in textu Græco Eutocij videre eſt; quare cenſui librum prædictum epitomen eſſe Conicorum Apollonij ab aliquo alio conſcriptam. Hanc quoq; præclariſsimi Torricellij fuiſſe ſententiam poſtea didici ex eius Epiſtola ad eruditiſsimum Michaelem Angelum Riccium miſſam. Perſtiti tamen debere latinè verti lucubrationem tam eximiam, eruditiſq; optatiſsimam, nam niſi ipſiſsimum opus eſſet Apollonij, ſaltem ex ijſdemmet libris epitome illa deſumpta, & tranſcripta exiſtimari debuerat.*

Igitur Sereniſsimus Ferdinandus Secundus Magnus Dux munificentia verè regia, qua bonas artes promouere ſtudet, annuente, & ſummopere coadiuuante Sereniſsimo Principe Leopoldo fratre Matheſeos, atque omnigenæ Sapientiæ perito cultore, atq; egregio vindice, præcepit, vt volumen Arabicum Romæ latinè redderetur ab Abrahamo Ecchellenſe linguarum Orientalium doctiſsimo, & peritiſsimo profeſſore. Is quidem ſumma alacritate negotio ſuſcepto primùm bono me eſſe animo iuſsit; monuit enim nouum non eße apud Arabes libros nomine auctoris in fronte carere, oſtenditque in proemio eiuſdem codicis apertiſsimè declarari eſſe libros Conicorum Apollonij paraphraſticè expoſitos: deinde ex translatione priorum quatuor librorum patuit demonſtrationes propoſitionum penè non differre quoad doctrinam à textu Græco Eutocij, licet verbum verbo non reſponderet: nec mirari paucitatem figurarum, quandoquidem vna, eademq; figura quatuor, aut quinque propoſitionibus inſeruiret. Incomparabili igitur gaudio perfuſus Apollonium penè è manibus ſublatum iterum amplexibus ſtrinxi, & exoſculatus ſum. Sed moleſtum ſummopere fuit octauum librum deeſſe: collegi tamen Io: Baptiſtam Raimundum opuſculum arithmeticum (quod in hoc codice Arabico ſubſequitur libro Septimo Apollonij) pro octauo

eiuſdem

eiusdem libro accepisse, pariterq; Hieronymum Lunadorum in libro de Romana Curia nobis imposuisse, cum octo Apollonij libros ex Arabico transtulisse latinè Raimundum typis publicauit; qui enim fieri potuit, vt octo libros dedisset is, qui an septem, aut octo libri essent non animaduerterat?

Modo operæ pretium erit ante oculos ponere formam, & dispositionem huius paraphrasis ab interprete Abalphatho editæ. Et primo sciendum est eum collegisse simul septem integros libros Conicorum Apollonij ex fragmentis, quæ hactenus apud Arabes sparsim circumferebantur, dispositisque propositiones eorumdem librorum alio ordine, ac diuerso ab Apolloniano, relictis tamen numeris antiquis, nam in primo libro post primam, & secundam propositiones subsequuntur vndecima, tertia, quarta, septima, & sic vlterius semper ordine perturbato procedendo. Hac nempe ratione simul collectis in eadem figura pluribus propositionibus, quas in locis dissitis collocauerat Apollonius, putauit Abalphathus breuius se eas demonstraturum retenta semper Apollonij sententia, scilicet ijsdem mediis, & eodem progressu, quo vsus est Apollonius, demonstrat Paraphrastes easdem propositiones. An vero variare noluerit reuerentia retentus, vel potius nequiuerit virium defectu, (quippe ingenio non admodum felici, et inuemendi sagaci à natura donatus) non ausim affirmare. Superaddit quoq; numerosam farraginem aliarum definitionum, quibus compendiosius, & clarius demonstrationes absolui posse profitetur, quod quidem non rarò ipse assequitur; aliquando verò ob affectatam nimiam breuitatem obscurior efficitur: accidit quoque, vt aliquæ definitiones inutiles, & otiosæ sint, vel repetitio declarationis earumdem prolixitatem creet maiorem.

Animaduersione dignum est, quod Manuscriptum licet non distinguatur capitibus, aut paragraphis, sed continuo, perpetuoque sermone procedat more Arabum, in eo tamen numerorum tria genera passim occurrunt, qui omnes ferè interlineares, pauci quidem in margine positi, aliqui rubris characteribus depicti, alij verò positi super alios numeros in eadem linea, veluti fractiones numerorum describi solent, hac ratione $\frac{9}{49}$. 50. *vel* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71., *& licet rarò synceri, & veridici sint, conieci tamen supremos numeros indicare partes, seu sectiones, in quas Abalphathus librum distribuit, atq; partitur: infimi verò numeri docent quotnam propositiones in vnaquaque sectione contineantur: itaque hi numeri* $\frac{16}{68}$. 69. 70. 71. *significant in lib. 5. Sect. 16. contineri Apollonij Propositiones 68. 69. 70. 71. reliqui numeri interlineares sic dispositi 24. ex 5., vel 37. ex 6. citationes sunt, indicantque Prop. 24. lib. 5. Conic.*

Apoll., *vel Prop.* 37. *lib.* 6. *Sed mirum quàm mendoſi ſint omnes ferè numeri huius codicis! in ſolo enim quinto libro frequenter duæ, vel tres propoſitiones diuerſæ vno, & eodem numero deſignantur, & è contra plures, & ſeparati numeri nulli propoſitioni tribuuntur; nuſpiam enim reperies propoſitiones* 16. 17. 18. 24. 40., *& quamplurimas alias. Citationes poſtea inter propoſitiones interpoſitæ mendoſiſſimæ, obſcuriores tenebras obducunt, quare non parum laboris, & moleſtiæ habui, vt propoſitionibus horum ſubſequentium librorum numeros debitos, & legitimos aſsignarem; nam prioribus quatuor in libris propoſitionum numeri licet perturbato ordine diſpoſitarum facilè reſtitui, & corrigi potuerunt ex Græco exemplari, at in libris* 5. 6. *&* 7. *numeros erroneos ſerie propoſitionum alterata niſi ariolando aßequi quis poterit? Cum ex Arabico codice mendas haſce numericas corrigi poſſe Excellentiſsimus Abrahamus Ecchellenſis deſperaſſet, repetitis litteris, vt coniecturis negotium perficerem, iuſsit; & ſiquidem propoſitiones Apollonij vno, vel altero tantum ordine diſponi potuiſſent, forſan mentem auctoris conijcere arduum non fuiſſet, ſed inter multas, & varias ſeries, quibus conica doctrina exponi poſſet, ſi eam, quàm Abalphathus elegit, aſſecutus fuero, fortunæ tribuendum erit.*

Sed quid ego minutias numerorum conſector, cum in textu ipſo inſuperabiles ferè, & maioris momenti difficultates ſuperſint? nulla propoſitio fuit, in qua ſententiæ, verba, aut numeri, aut litteræ non fuerint multifariam permutatæ, mutilatæ, aliæ pro aliis repoſitæ, atque in propoſitionibus pleriſque tituli ipſi, & expoſitiones ſummopere deprauatæ, vt prorſus ignoraretur quid nam demonſtrandum propoſuerit Apollonius. Itaque verba, litteræ, numeri, citationes, imò ſententiæ deficientes, aut permutatæ vna cum affectata Paraphraſtis Arabici breuitate, & multiplici, & noua nomenclatura cimmerias tenebras effundebant. Haſce in anguſtias redactus, quod potui, feci, vt germanum ſenſum Apollonij, & correctiſsimum exhiberem textum.

Hanc tamen cautionem adhibui, vt in notis ſemper bona fide apponerem ipſiſsima verba textus, quæ tranſtulerat ex codice Arabico me præſente Excellentiſsimus Ecchellenſis, ibidemque rationes appoſui mutationis, & correctionis factæ. Itaque perſæpe vbi ſententia videbatur obſcura, neque diſtinctè explanata, tunc quidem meis verbis declaraui. Et quia multoties ob nimiam paraphraſtis breuitatem, vel librariorum vitio propoſitiones nõ ſolide demonſtrantur, vel nequeunt ex præcedentibus deduci, addidi ex meo penu lemmata nonnulla, quibus euidenter confirmantur, quæ in

textu

X VII

textu ambiguitatem aliquam præseferebant. Apposui quoque prolixè propositionum casus omnes neglectos in textu, eorumque demonstrationes. Sed hisce omnibus in rebus religiosus adeò fui, vt omnia diuerso charactere in notis memorauerim, exceptis tamen ijs, quæ minoris momenti sunt, vt litteræ transpositæ, & deficientes, & verba aliqua impropria, & non significantia, quæ commemorare non censui, ne volumen in immensum excresceret.

Tandem potuissem quidem abundantioris doctrinæ gratia non pauca meo marte hisce libris superaddere non omnino forsan contemnenda, sed parcus adeo fui, vt tantummodo quæ ad illustrationem, & ornatum operis facere videbantur, adiecerim suntq; nonnullæ propositiones additæ, quæ nouæ, & forsan inelegantes non erunt.

Considerandæ modo sunt difficultates à præstantissimo, et doctissimo Claudio Midorgio propositæ contra Manuscriptum Arabicum Apollonij, quod Clarissimus, & de bonis litteris optimè meritus Golius ex oriente detulit, eademq; difficultates eodem iure nostrum Manuscriptum, quod Golianum, petunt. Verba Mersenni in præfatione Conicorum Apollonij suæ synopsis Mathematicæ hæc sunt. Suspicatur autem Claudius Midorgius hos tres libros, (*scilicet 5. 6. & 7. Conicorum Apollonij*) esse cuiusdam Arabis sub Apollonio latentis, quòd in quinto suo libro primam propositionem sexti Apollonij superius allatam non solum in cono recto, sed in quouis etiam scaleno, & illorum portionibus quibuscumque datis possibilia quæque demonstrat. *Hæc quidem ratio quanti ponderis sit æqui rerum æstimatores iudicent, & si quidem omnes, qui in Geometricis mediocriter versati sunt optimè norunt succesiuè aliquid vlterius inueniri præter ea, quæ diuini Præceptores Euclides, Archimedes, Apollonius, & Ptolemæus ediderunt, facile enim esse inuentis addere quis ignorat? Nulli vnquam venit in mentem librum Spiralium non ab Archimede, sed ab aliquo alio scriptum fuisse, propterea quod vniuersaliùs quarumcumque spiralium passiones Neoterici demonstrarunt; Nec quia admirabilis Maurolicus in suo quinto Conicorum libro, & alij recentiores, sicuti præclarus Physiosophus, & Mathematicus Vincentius Viuianus Patritius Florentinus in suo erudito libro de Maximis, & Minimis alia longè diuersa ab Apollonij speculationibus excogitarunt, hos libros adulterinos esse ausi sunt affirmare. Et sicuti ipsemet Midorgius non repudiauit librum primum Conicorum ab. Eutocio editum, licet ipse in suo libro tertio melius se demonstrasse propositiones 52. 53. 54.*

libri

libri primi ſummopere glorietur, pari iure hi libri adulterini cenſendi non erunt non alia de cauſa, niſi quia propoſitiones horum librorum non correſpondent, nec aſsimilantur admirandis cogitationibus in eius ſublimi mente repoſitis. Et ſane non dubito, quòd ſi Midorgius ipſe hos libros vidiſſet, & contrectaſset, omnino illius magni Apollonij eſſe abſq; vlla hæſitatione affirmaſſet. Nam primi quatuor libri continent eaſdem propoſitiones, & ſæpe numero eadem verba, quæ in textu Græco Eutocij leguntur: reliqui libri ſubſequentes docent ea, quæ in epiſtola ad Eudemum propoſuerat ſe demonſtraturum Apollonius, & quæ Pappus, & Eutocius diſtinctè, & expreſsè ibidem tractari affirmant. Rurſus profunda mentis perſpicacia, methodus ſcribendi, & genius Apollonij adhuc ibidem conſpicitur, nec fieri potuit, vt à translatoribus, à Paraphraſte, à temporis diuturnitate prorſus deleretur, atque mirandum ingenium Apollonij à tanta barbarie omnino occultaretur. Rurſus in confeſſo eſt opera Euclidis, Archimedis, Apollonij, Ptolomæi, & aliorum magnorum virorum Arabicè translata fuiſſe, & expreſsè grauiſsimi ſcriptores Arabi, præcipuè Gregorius Bar-Hebræus lib. 9. Chronicorum ait, opera Apollonij Arabicè translata primò fuiſſe anno 200. AEgyræ Maumettanæ ſub Almen Kalypha à Ioanne Patricida, & poſtea ab alijs recentioribus. Quare dubitandum non eſt hos eſſe veros, atque legitimos tres poſtremos Conicorum libros Apollonij Pergæi Paraphraſticè ab Abalphatho deſcriptos.

Fruere modo, mi lector, præclaro, & admirando beneficio Seremiſſimi Principis Etruriæ, qui regali magnificentia, et liberalitate pretioſisſimum hunc theſaurum humaniſsimè largitur. Vale.

INDEX

INDEX

Propositionum Lib. V. VI. VII. Conic. iuxta seriem numerorum ab Apoll. seruatam, cum Lemmatibus, & Propositionibus additis,

Vbi indicantur sectiones, & paginæ, in quibus propositiones reperiri debent.

Lib. V. Propos.	Sect.	Pag.
i	1	5
ii	1	5
iii	1	6
iv	2	8
v	2	8
vi	2	8
vii	4	24
viii	3	16
ix	3	18
x	3	18
xi	5	26
xii	4	24
xiii	6	27
xiv	6	27
xv	6	27
xvi	16	112
xvii	16	113
xviii	16	113
xix	17	116
xx	17	117
xxi	17	117
xxii	17	117
xxiii	17	118
xxiv	17	118
xxv	17	119
xxvi	7	29
xxvii	7	29
xxviii	7	29
xxix	12	72
xxx	12	72
xxxi	12	72
xxxii	18	124
xxxiii	18	125
xxxiv	18	125
xxxv	18	125
xxxvi	18	126
xxxvii	18	126
xxxviii	18	127
xxxix	18	128
xxxx	18	128
xxxxi	15	109
xxxxii	15	109
xxxxiii	15	110
xxxxiv	10	67
xxxxv	10	68

Prop.	Sect.	Pag.
xxxxvi	18	126
xxxxvii	18	128
xxxxviii	18	129
xxxxix	8 32	33
l	8	33
li	8	34
lii	8	35
liii	8	35
liv	8	39
lv	8	39
lvi	8	39
lvii	8	40
lviii	9	60
lix	9	60
lx	9	61
lxi	9	61
lxii	9	60
lxiii	9	60
lxiv	13	74
lxv	13	74
lxvi	13	75
lxvii	13	76
lxviii	11	70
lxix	11	70
lxx	11	71
lxxi	11	71
lxxii	13	77
lxxiii	14	88
lxxiv	14	90
lxxv	14	90
lxxvi	14	91
lxxvii	14	92

Lib. V. Lemm. additæ	Paginæ.
i	13
ii	14
iii	15
iv	15
v	30
vi	31
vii	31
viii	57
ix	78
x	78
xi	79
xii	92

Lib. V. Prop. additæ.	Paginæ.
i	11
ii	11
iii	22
iv	23
v	54
vi	86
vii	101
viii	103
ix	103
x	104
xi	105
xii	106
xiii	107
xiv	107

Lib. VI. Propos.	Sect.	Pag.
i	1	138
ii	1	139
iii	2	146
iv	1	141
v	3	152
vi	2	147
vii	2	147
viii	3	153
ix	2	148
x	1	141
xi	4	154
xii	4	155
xiii	4	156
xiv	4	157
xv	6	175
xvi	6	177
xvii	6	178
xviii	7	191
xix	7	191
xx	8	193
xxi	8	195
xxii	8	197
xxiii	8	198
xxiv	8	198
xxv	9	207
xxvi	10	237
xxvii	10	238
xxviii	10	240

INDEX

Prop.	Sect.	Pag.
xxix	11	247
xxx	11	248
xxxi	11	251

Antiquæ Propos. Præmissæ.

i	5	168
ii	5	168
iii	5	168
iv	5	168
v	5	168
vi	5	171

Lib. VI.

Lemm. additæ.

i	150
ii	158
iii	159
iv	160
v	161
vi	183
vii	184
viii	186
ix	229
x	246

Lib. VI.

Prop. additæ.

i	1	151
ii	2	210
iii	2	211
iv	2	214
v	2	216
vi	2	219
vii	2	220
viii	2	222
ix	2	226
x	2	227
xi	2	230
xii	2	231
xiii	2	233
xiv	2	236
xv	2	261
xvi	2	262
xvii	2	265
xviii	2	267
xix	2	267

Prop.	Sect.	Pag.
xx	2	268
xxi	2	269
xxii	2	270

Lib. VII.

Propos.	Sect.	Pag.
i	1	272
ii	2	276
iii	2	276
iv	2	277
v	1	274
vi	2	278
vii	2	278
viii	3	282
ix	3	283
x	3	283
xi	3	283
xii	4	291
xiii	4	291
xiv	4	291
xv	3	283
xvi	3	283
xvii	3	283
xviii	3	283
xix	3	283
xx	3	283
xxi	5	299
xxii	4	291
xxiii	1	274
xxiv	5	298 303
xxv	4	291
xxvi	5	298 300
xxvii	4	291
xxviii	5	299 300
xxix	4	291
xxx	4	291
xxxi	11	370
xxxii	11	370
xxxiii	6	314
xxxiv	6	315
xxxv	6	316
xxxvi	6	316
xxxvii	5	304
xxxviii	7	323
xxxix	7	324
xxxx	7	325
xxxxi	9	341 343

Prop.	Sect.	Pag.
xxxxii	5	301
xxxxiii	5	298 302
xxxxiv	8	333
xxxxv	8	333
xxxxvi	8	335
xxxxvii	9	342 344
xxxxviii	9	342 347
xxxxix	10	358
L	10	358
Li	10	358

Lib. VII.

Lemm. additæ.

i	306
ii	318
iii	318
iv	318
v	319
vi	327
vii	327
viii	328
ix	328
x	336
xi	336
xii	337
xiii	349
xiv	350
xv	350
xvi	361
xvii	361
xviii	364

Lib. VII.

Prop. additæ.

i	1	322
ii	1	323
iii	1	331
iv	1	332
v	1	341
vi	1	341
vii	1	357
viii	1	357
ix	1	368
x	1	368

APOL-

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. V.

DEFINITIONES.

I.

SI à puncto aliquo in axe sectionis conicæ sumpto egrediantur aliquę rectæ lineæ ad sectionem, vocabo punctum illud, ORIGINEM.

II.

Et lineas, RAMOS.

III.

Segmentum autem axis intèr illud, & verticem sectionis ei proximiorem, MENSVRAM.

IV.

Sed si fuerit mensura æqualis semissi erecti, vocabo illam, COMPARATAM.

V.

Et perpendiculares cadentes ab extremitatibus ramorum super axim vocabo, POTENTES illorum ramorum.

VI.

Abscissa verò illarum potentium, ABSCISSA ramorum.

VII.

Et inuersa illarum potentium, INVERSA ramorum.

VIII.

Atque rectangulum contentum sub inclinato, & aggregato inclinati, & erecti, vel differentia transuersi, & erecti vocabo, FIGVRAM COMPARATAM.

IX.

In quolibet rectangulo applicato ad ſegmentum axis, ſi illud ſegmentum ad latitudinem illius rectanguli eandem proportionem habuerit, quam axis ad latitudinem figuræ comparatæ vocabo illud, EXEMPLAR.

X.

Si ex puncto ſuper axim educatur perpendicularis ad vtraſque partes ſectionis, & ex puncto aliquo illius perpendicularis educantur lineæ terminatæ ad ſectionem ex vtraque parte, vocabo punctum illud in perpendiculari ſumptum, CONCVRSVM.

XI.

Et lineas etiam, RAMOS.

XII.

Et qui ſecant menſuram, & terminantur ad ſectionem ex altera parte concurſus, RAMOS SECANTES.

XIII.

At qui non ſecat illam, & tranſit per concurſum, & terminatur ad axim, & ſectionem ſimul, RAMVM TERMINATVM.

XIV.

Sed cuiuſcumque rami ſecantis, cuius portio inter ſectionem, & axim intercepta eſt linea breuiſſima, vocabo illum, BREVISECANTEM.

XV.

Et vocabo ſegmentum axis inter perpendicularem, & verticem ſectionis proximior em interceptum, MENSVRAM, quoque.

XIV.

Et portionem ſectionis conicæ diſſectam ab ordinatione axis tranſeuntis per originem, ſiuè per concurſum propè verticem proximiorem ſectionis, vocabo, SEGMENTVM illius puncti.

NOTÆ

1.168

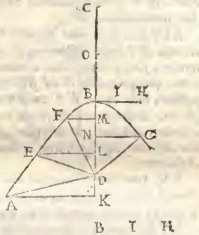
NOTÆ.

HÆ definitiones non sunt Apollonij, sed Interpretis Arabici, qui in præmio huius operis apertè ait, addidisse plurimas definitiones in libris Apollonij, quibus theoremata breuissimè proponi posse profitetur, vt in prioribus quatuor libris videre est. Eas autem exemplis illustrare conabor.

I. *Sit quælibet coni sectio A B C, cuius axis B D, & in eo sumatur quodlibet punctum D intrà sectionem, à quo educantur rectæ lineæ D A, D E, D F, D C vsque ad sectionem. Tunc vocatur punctum D, Origo.*

II. *Et lineæ D A, D E, & cæteræ vocantur, Rami.*

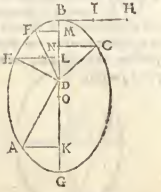
III. *Portio verò axis B D inter originem D, & verticem B interposita vocatur Mensura. Sed in ellipsi A B C G, si axis portiones D E, & D G inæquales fuerint, tantummodò minor portio B D vocatur Mensura, non autem maior D G.*



IV. *Sit posteà recta B I semissis lateris recti B H iam si mensura D B æqualis fuerit semirecto B I, vocatur D B, Mensura comparata.*

V. *At si à terminis ramorum A, F, F C educantur ad axim perpendiculares A K, E L, F M, C N, ipsum secantes in K, L, M, N vocantur illæ rectæ lineæ Potentes illorum ramorum.*

VI. *Recta verò K B vocatur Abscissa rami D A, & L B Abscissa rami D E, & sic reliquæ omnes.*



VII. *Sit posteà O centrum sectionis, iam axis portio ex centro O vsquè ad potentialem A K educta, scilicet O K vocatur Inuersa rami D A, pariterque O M est Inuersa rami D F.*

VIII. *Si ponatur recta linea B P ad axim perpendicularis, quæ in hyperbola fiat æqualis aggregato, in ellipsi verò fiat æqualis differentiæ laterum recti B H, & transuersi G B, tunc rectangulum contentum sub G B, & B P vocatur, Figura comparata.*

IX. *Posteà si, vt G B ad B P ità fiat segmentum*

mentum axis D B ad D R, & compleatur parallelogrãmum rectãgulum B R, tunc spatium B R vocatur Exemplar. Pari ratione si, vt G B ad D P ità fiat segmentum axis D K ad latitudinem K S, compleaturque parallelogrammum rectangulum D S, vocabitur paritèr D S Exemplar.

X. *Et si C D perpendicularis fuerit ad axim B D, & producatur vltrà axim in E, atquè à punctо E extendantur vsquè ad sectionem rectæ lineæ E B, E F, E G, vocabitur E punctum Concursus.*

XI. *Et lineæ rectæ E B, E F, E G vocantur etiam Rami.*

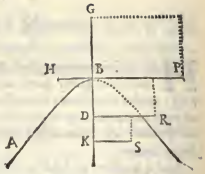
VII. *Atquè linea rectа E F secans axim in H vocatur Ramus secans.*

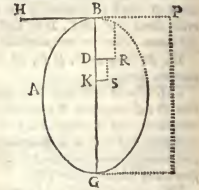
XIII. *Et rectа linea E B conueniens cum axi in vertice sectionis vocatur Ramus terminatus.*

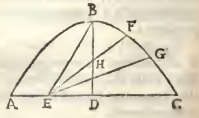
XIV. *Si verò rami secantis E F portio eius H F inter sectionem, & axim intercepta fuerit breuissima omnium linearum, quæ ex punctо H ad sectionem duci possunt, tunc ramus E F vocabitur Breuissecans. In textu Arabico secans ramus vocabatur, mendosè, vt arbitror, non enim hæc definitio distingueretur à duodecima definitione.*

XV. *Similitèr segmentum axis D B sectum à perpendiculari ad axim ex origine E ductа, vocatur quoquè Mensura.*

XVI. *Tandem si per punctum originis D, vel concursus E ducatur ordinata A C, tunc figura contenta ab ordinata A C, & sectione conica A B C, vocatur Segmentum illius punctі,*







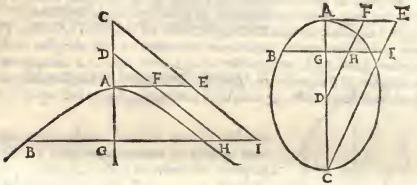
SECTIO

SECTIO PRIMA

Continens propoſitiones I. II. & III. Apollonij.

PROPOSITIO I.

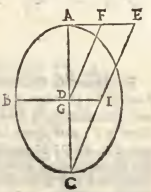
Si ex centro D ſectionis A B (habentis centrum) egrediatur linea recta D F H bifariam diuidens A E erectum illius axis, quod ſit perpendiculare ſuper axim C A G, ſecans axis ordinationem B G I; vtiquè dimidium illius ordinationis, videlicet B G, poterit duplum plani, quod producit illa linea cum axi inter erectum, & illam ordinationem, nempè duplum A G H F.



a b QVia B G poteſt comparatum applicatum ad abſciſſam A G, & planum G F dimidium eſt illius comparati; ergò B G poterit duplum plani G F; & hoc erat oſtendendum.

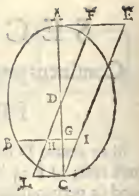
PROPOS. II.

PAritèr quoquè oſtendetur, ſi potens tranſierit per centrum ellipſis, quod B G poterit duplum trianguli A F G.



PROP.

PROPOS. III.



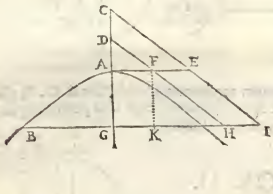
SI verò in ellipsi cadat B G infrà centrum, poterit duplum differentię duorum triangulorum D A F, & D G H, nempè duplum plani G L. Et hoc erat propositum.

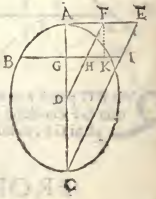
Notæ in Propositionem primam.

VOcat in primo libro interpres sectiones habentes centrum hyperbolem, & ellipsim, & vocat erectum latus rectum sectionis, vocat etiam ordinationem axis eam, quam nos ordinatim ad axim applicatam appellamus.

Quia B G potest comparatum applicatum ad abscissam A G, &c. *Vocat insuper parallelogrammum comparatum applicatum ad axis abscissam A G rectangulum ipsum A G I, quod quidem adiacet lateri recto A E latitudinem habens abscissam A G excedens in hyperbola, & deficiens in ellipsi rectangulo simile ei, quod latere recto, & transverso continetur; scilicet rectangulo C A E.* a

12. 13. lib. primi.



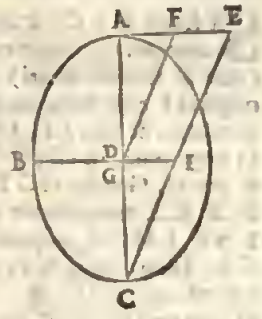


Et planum G F dimidium est illius comparati, &c. *Non erit inutile paulo fusius ostendere id quod ob nimiam facilitatem Apollonius tantummodò innuit. Ducatur rectà linea F K parallela axi D A secans ordinatam B G productam in K: quia figuræ latera C A, & A E sunt ipsarum D A, A F duplicia, ergo C E, & D F H parallelæ sunt, estque K H parallela A E, cum ambo positæ sint perpendiculares ad axim, & C A, F K sunt quoquè æquidistantes, ergò triangulum F K H simile est triangulo C A E, & propterea parallelogramma rectangula F K H, & C A E similia erunt. Et quoniam quadratum ordinatæ B G æquale est rectangulo contento sub latere recto E A, & abscissa A G excedente* b

Ibidem.

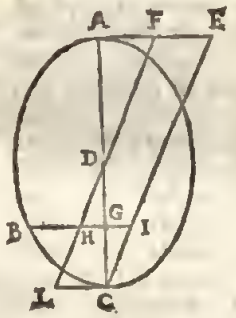
dente in hyperbola, & deficiente in ellipſi rectangulo F K H ſimile eì, quod lateribus recto, & tranſuerſo continetur, ſcilicet C A E, & eſt A F ſemiſsis lateris recti, igitur quadratum B G æquale eſt ſummæ in hyperbole, & differentia in ellipſi rectanguli G A F bis ſumpti, & rectanguli F K H, quod eſt æquale duplo trianguli F K H: ſed quadrilaterum A G H F æquale eſt aggregato in hyperbola, & differentia in ellipſi rectanguli G A F, & trianguli F K H, ergò quadratum B G æquale eſt duplo quadrilateri A G H F, ſeù differentiæ triangulorum D A F, & D G H.

Notæ in Propoſitionem ſecundam.



SEcunda propoſitio facilè ex prima deducitur; nam, quando ordinata B G H I tranſit per centrum D ellipſis; tunc tria puncta G, D, H conueniunt, & triangulum D G H euaneſcit, & ideò differentia trianguli D A F, & trianguli D G H nullum ſpatium habentis, erit triangulum ipſum D A F.

Notæ in Propoſitionem tertiam.



IN tertia propoſitione ſimiliter, quandò ordinata B H G I cadit infrà centrum D ellipſis, tunc ducta C L parallela ipſi A E, erunt duo triangula D A F, & D C L æqualia inter ſe, cum ſint ſimilia, & latera homologa D A, D C ſint æqualia, quia ſunt ſemiaxes; propterea differentia triangulorum D G H, & D A F, ſeù D C L erit trapezium C G H L, quod ſubduplum eſt quadrati ordinatæ B G.

SECTIO SECVNDA

Continens propoſitiones IV. V. VI. Apollonij.

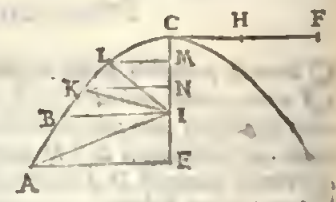
COmparata eſt minima ramorum egredientium ex ſua origine (4) in parabola (5) & hyperbola (6) pariterque in ellipſi (ſi comparata fuerit portio maioris duorum axium, & tunc maximus eſt reſiduum tranſuerſi axis.) Reliquorum verò propinquior

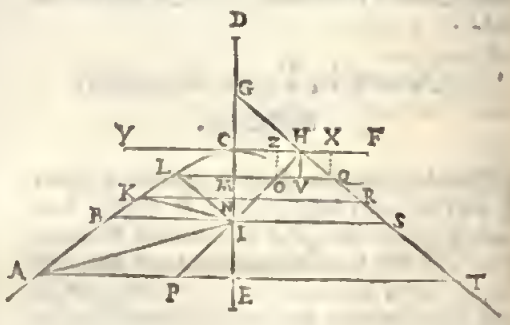
minimo

minimo remotiore minor est. Quadratum autem mensuræ minus est quadrato cuiuslibet rami assignati (4) in parabola quidem quadrato suæ abscissæ (5) & in hyperbola (6) & ellipsi exemplari applicato ad abscissam illius rami.

PROPOSITIO IV.

SIt sectio A B C, & axis eius C E, & inclinatus, siue transuersa D C centrum G, atque erectum C F, & ex C E secetur C I æqualis C H (quæ sit semissis erecti) & ex puncto originis I educantur rami I B perpendicularis, & I K, I L, I A, & per H, I in hyperbola, & ellipsi ducatur H I P, & per H, G recta H G T, ad quam ex A, B, K, L extendantur A P E T, B I S, K N R, L M O Q perpendiculares super C E. Dico, quod C I, comparata minor est, quam I L, & I L, quam I K, & I K, quam I B, & maximus ramorum in ellipsi est I D, & quod quadratum mensuræ I C minus est quadrato I L, in parabola quidem quadrato C M, & in hyperbola, & ellipsi exemplari applicato ad C M. Quoniam in parabola L M potest duplum M C in C H, nempè C I (12. ex primo) & quadratum I L æquale est aggregato duorum quadratorum L M, & M I, quadratum itaque L I æquale est quadrato M I, & M C in C I bis, quæ sunt æqualia duobus quadratis C I, M C. Quadratum igitur C I minus est quadrato L I quadrato ipsius M C, quæ est eius abscissa, & pariter ostendetur, quod quadratum C I minus est quadrato I K quadrato N C, & minus quadrato I B quadrato C I, & minus quadrato A I quadrato E C.





a

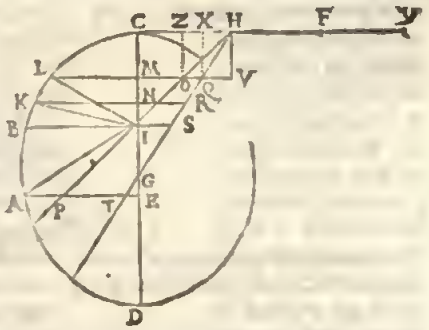
PROPOSITIO V. & VI.

AT verò in hyperbola, & ellipsi producantur ex Q, O, H lineæ parallelæ ipsi M C, & quia I C ex hypothesi æqualis est H C, erit I M æqualis M O, quadratum itaque I M duplum est trianguli I M O, & quadratum L M duplum est trapezij C M Q H (prima ex 5.) ergo quadratum I L

a b

tum IL duplum eſt trianguli ICH vnà cum duplo trianguli QHO, nempe cum plano rectanguli QZ; ſed quadratum IC eſt duplum trianguli IHC (eò quod CH æqualis eſt CI) ergo quadratum CI minus eſt quadrato LI plano rectanguli QZ.

c Deindè ponamus in ellipſi YF æqualem differentiæ, & in hyperbola
d æqualem aggregato DC, CF; ergo propter ſimilitudinem duorum trian-
e gulorum GMQ, HVQ, & HVO, MIO, erit HV æqualis VO, & HV, vel ei æqualis OV ad VQ eſt, vt MG ad MQ, nempe vt GC ad
f HC, ſeù vt DC ad CF, igitur VO ad VQ eſt vt DC ad CF, & comparando ſummas terminorum ad antecedentes in hyperbola, & differentias eorundem ad antecedentes in ellipſi fiet OQ ad VO (quæ æqualis eſt OZ, nempè MC) vt YF ad YC, & eſt YC, æqualis DC, & YF æqualis ſummæ in hyperbola, & differentiæ in ellipſi ipſarum DC, & CF; quadratum igitur IC minus eſt quadrato IL, rectangulo QZ, quod eſt exemplar ſimile plano rectanguli CD in YF, quæ eſt figura comparata. Atque ſic demonſtrabitur, quod quadratum IC minus ſit quadrato IK exemplari applicato ad NC, & minus eſt quadrato BI exemplari applicato ad IC, & minus quadrato AI exemplari applicato ad EC: Eſtque MC minor, quàm NC, & NC, quam CI, & CI, quàm CE; igitur LI maior eſt, quàm IC, & IK maior, quàm LI, & IB maior, quàm IK, & IA, quàm IB. Et hoc erat oſtendendum.

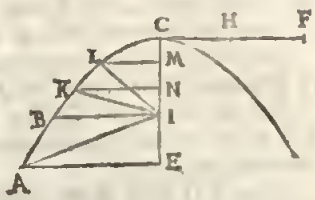


g

h Def. 8. 9. huius.

Notæ in propoſitionem quartam.

a QVoniam in parabola LM poteſt duplum MC, &c. *Quadratum enim LM æquale eſt rectangulo ſub abſciſſa MC, & latere recto CF, eſtque CH ſemiſſis erecti CF; ergo LM poteſt duplum rectanguli MCH.*



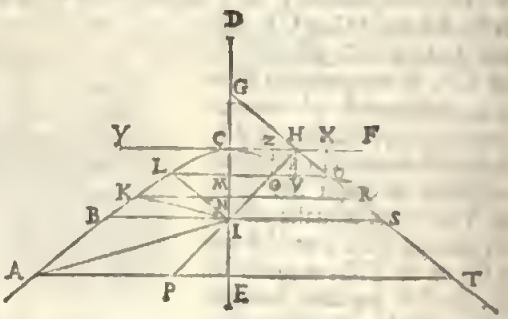
11. Lib. 1.

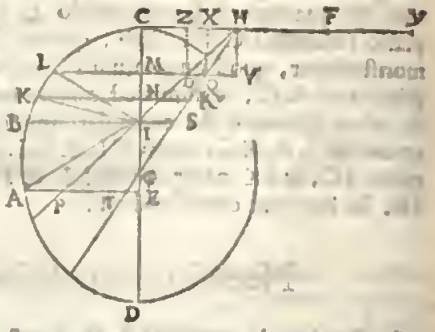
Notæ in propositionem quintam.

ERit I M æqualis M O, &c. *Propter parallelas M O, C H, & similitudinem triangulorum I M O, & I C H.* a

Ergo quadratum I L duplum est triãguli I C H, &c. *Eo quod quadratum I L æquale est duobus quadratis I M, M L in rectangulo triangulo I M L; Quadratis autẽ I M, & L M æqualia sunt triangulum I M O bis sumptum cum trapezio C M Ω H bis sumpto; & quia trapezium C M Ω H æquale est trapezio C M O H, cum triangulo H O Ω; at triangulo I M O, & trapezio C M Ω H simul sumptis æqualia sunt triangulum I C H, cum triangulo H O Ω. Ergo quadratum L I æquale erit duplo trianguli I C H cum duplo trianguli H O Ω.* b

1. huius.





Deindè ponamus in ellipsi Y F æqualem D C, & in hyperbola, &c. *Textus videtur corruptus, quem sic corrigendum puto. Ponamus Y F in ellipsi æqualem differentia, & in hyperbola æqualem aggregato D C, & C F.* c

Propter similitudinem triangulorum, &c. *Sunt enim duæ rectæ lineæ C G, & V H æquidistantes, quæ secant rectas lineas conuenientes in Ω, & O.* d

Erit H V æqualis V O, &c. *Eo quòd M I ostensa est æqualis M O, estque H V ad V O in eadem proportione æqualitatis propter iam dictam similitudinem triangulorum.* e

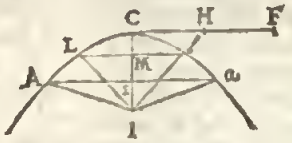
Igitur V O ad V Ω est, vt D C ad C F, & conuersa proportione deindè componendo in hyperbola, & inuertendo in ellipsi fiet in hyperbola Ω O ad O V, &c. *Textum corruptum, atque confusum clariùs exponi posse censeo per Lemma inferius appositum hac ratione. Et comparando summas in hyperbola, & differentias terminorum in ellipsi ad antecedentes.* f

Vt Y F ad Y C, & in ellipsi, vt F C ad C F, & Y F in ellipsi æqualis D C, g

DC, quadratum igitur, &c. *Textum corruptum sic corrigendum puto; & est TC aqualis DC, atque TF aqualis summa in hyperbola, & differentia in ellipsi laterum DC, & CF.*

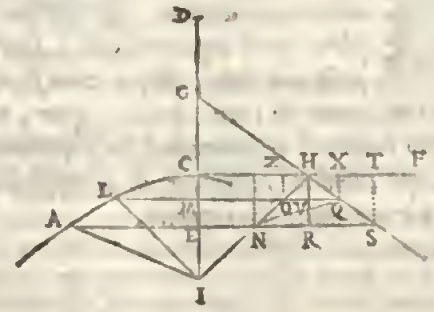
h Exemplar simile plano rectanguli CD in YF in hyperbola, & YC in ellipsi, &c. *Hæc postrema verba expungenda duxi, tanquam supernacanea.*

Potest etiam ad imitationem Euclidis reperiri multitudo ramorum inter se aqualium, qui ex origine duci possint in eadem coniectione. Itaque quotes PROP. I. Additar. *mensura fuerit comparata, scilicet aqualis semissi lateris recti, tunc duo tantum rami inter se aquales a puncto originis ad vtrasque partes axis duci possunt in qualibet coniectione, eruntque illi, qui ad terminos L l cuiuslibet ordinatim applicata L l ducuntur ab origine I, nam efficiuntur duo triangula I M L, & I M l, qua circa angulos aquales ad M, nempe rectos, habent latera aqualia, scilicet L M, & l M medietates ordinatim applicatæ, & segmentum axis I M inter ordinatam, & originem est latus commune; ergo bases, seu rami I L, & I l sunt aquales. Reliqui verò rami supra, vel infra terminum eiusdem ordinatim applicata minores, aut maiores sunt ramo ad eius terminum ducto; quare duo tantum rami ad vtrasque partes axis inter se aquales duci possunt.*



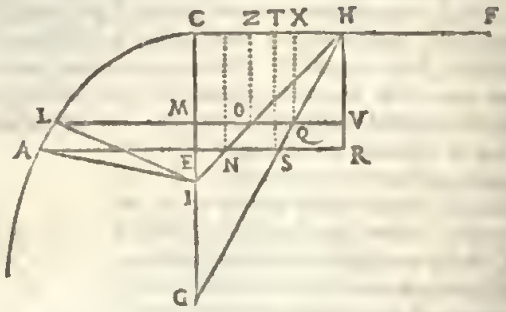
Rursus quadratum rami I A remotioris a comparata superat quadratum ra- PROP. II. Add. *mi I L propinquioris (in parabola quidem) rectangulo sub differentia, & sub aggregato abscissarum eorundem ramorum; in reliquis verò sectionibus rectangulo sub differentia abscissarum, & sub recta linea, ad quam summa abscissarum eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum transuersi, & recti.*

Et primò in parabola, quia quadratum I A aquale est quadrato I C cum qua- 4. huius. *drato abscissa C E; pariterque quadratum I L aquale est quadrato eiusdem I C* Ibidem. *cum quadrato abscissa C M; ergo excessus quadrati I A supra quadratum I L aqualis est differentia quadratorum E C, & C M; sed excessus quadrati E C supra quadratum M C aqualis est rectangulo, cuius basis aqualis est summa laterum E C, & C M; altitudo verò aqualis est E M differentia laterum eorundem quadratorum (vt deducitur ex elementis) igitur excessus quadrati I A supra quadratum I L aqualis est rectangulo, cuius basis est summa abscissarum E C, C M, altitudo verò E M differentia earundem abscissarum.*



Secundò in hyperbola, & ellipsi fiat exemplar N T applicatum ab abscissam C E. Et quia quadratum I A aquale est quadrato eiusdem

I C cum exemplari N T, & quadratum I L æquale eſt quadrato eiuſdem I C cum exemplari Q Z. Ergò exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt differentiæ exemplarium N T, & Q Z. Poſtea ducatur recta Q N: quia triangula Q N S, O N Q æqualia ſunt triangulo, cuius baſis æqualis eſt ſummæ rectarum N S, & O Q, altitudo verò V R, vel M E, ſuntque illa duo triãgula æqualia trapezio N O Q S ſiue exceſſui trianguli N H S, ſupra triangulum H O Q: ergo triãgulum cuius baſis æquatur ſummæ ipſarum N S, O Q altitudo verò E M, æquale eſt differentiæ triãgulorum N H S, O H Q. Et ſimiliter eorum dupla, ſcilicet rectangulum, cuius baſis æqualis eſt ſummæ N S, O Q, altitudo verò æqualis M E, erit differentia exemplarium rectãgulorum N T, & Q Z; ſed ſumma altitudinum V H, H R, ſeu ſumma abſciſſarum C M, C E ad ſummam baſium N S, O Q eandem proportionem habet, quam vna H V ad vnam O Q, ſeu quam latus tranſuerſum D C ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi D C, & recti C F: Igitur differentia exemplarium N T, Q Z, ſeu exceſſus quadrati I A ſupra quadratum I L æqualis eſt rectangulo contento ſub E M differentia abſciſſarum, & ſub ſumma ipſarum N S, & O Q, ad quam ſumma abſciſſarum eandem proportionem habet, quam latus tranſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, quod fuerat propoſitum.



MONITVM.

EX varia diſpoſitione terminorum proportionalitatis ſcilicet duorum antecedentium, & duorum conſequentium conſurgunt plures modi argumentandi, quorum aliqui in elementis expoſiti non ſunt, aliqui verò ſignificantiſſimis vocibus, & breuiùs indicantur in textu Arabico, igitur, ne ſæpiùs repetatur prolixa expoſitio modorum argumentandi in proportionalibus, & non proportionalibus, qui cumulatè inſeruntur in demonſtrationibus Apollonij opere pretium erit eos ſemel hic exponere.

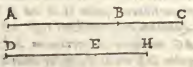
LEM-

LEMMA I.

Si quatuor quantitates eandem proportionem habuerint, antecedentes, vel consequentes ad terminorum summas, vel differentias in eadem ratione erunt; & è contra.

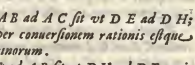
Habeat AB ad BC eandem proportionem, quàm DE ad EH: sequitur primò, quod AC ad CB sit, vt DH ad HE; & huiusmodi argumentatio vocatur in elementis compositio terminorum proportionis: itaque summæ antecedentium, & consequentium ad easdem consequentes sunt etiam proportionales: si vero ex eadem hypothesi concludatur, quod AC ad AB, sit vt DH ad DE, vt nimirum summæ terminorum proportionis ad antecedentes sint proportionales: quod quidem manifestum est, nam posita fuit AB ad BC, vt DE ad EH; erit inuertendo CB ad BA, vt HE ad ED, & componendo CA ad AB erit vt HD ad DE: modo huiusmodi argumentandi forma innominata est; potest autem breuitatis gratia appellari, Per comparationem summæ terminorum ad antecedentes.

Secundò concludi potest, quod AB ad AC sit vt DE ad DH; quia, vt in prima parte dictum est, AC ad AB erat vt DH ad DE, ergo inuertendo AB ad AC erit vt DE ad DH: hæc argumentandi forma vocari potest, Per comparationem antecedentium ad terminorum summas.



Tertiò concludi potest: quod BC ad CA, sit vt EH ad HD; nam componendo AC ad CB, erat vt DH ad HE, quare inuertendo BC ad CA erit vt EH ad HD, & hæc argumentatio fieri dicetur comparando consequentes ad terminorum summas.

Deindè sint eadem quatuor proportionales in secunda figura, nimirum totum AB ad segmentum eius BC sit vt totum DE ad portionem eius EH; tunc residuum AC ad CB erit, vt residuum DH ad HE; hæc argumentatio fieri dicitur in elementis, dividendo terminos proportionis, estque comparatio differentiarum terminorum ad consequentes.



At si concludatur ex eadem hypothesi quod AB ad AC sit vt DE ad DH; hæc argumentatio in elementis fieri dicitur per conuersionem rationis estque comparatio antecedentium ad differentias terminorum.

Postea ex eadem hypothesi sequitur quod AC ad AB sit vt DH ad DE: quia per conuersionem rationis, seu referendo antecedentes ad differentias terminorum est AB ad AC, vt DE ad DH; ergo inuertendo AC ad AB erit vt DH ad DE, & hæc argumentatio innominata fiet comparando differentias terminorum ad antecedentes.

Tandem

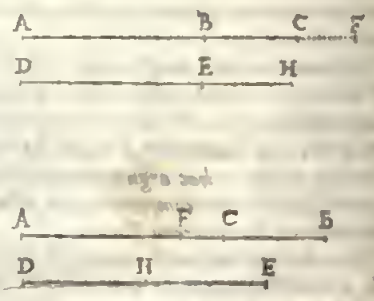
Tandem ex eadem hypothesi sequitur, quod C B ad C A sit vt E H ad H D: nam diuidendo est vt A C ad C B, ita D H ad H E; ergo inuertendo B C ad C A erit vt E H ad H D: & hæc argumentatio innominata fieri dicetur comparando consequentes ad dereliquias terminorum.

LEMMA II.

Si prima A B ad secundam B C maiorem proportionem habuerit quàm tertia D E ad quartam E H: comparando antecedentes ad terminorum summas habebit A B ad A C maiorem proportionem quàm D E ad D H.

Lem. 1. *Fiat A B ad B F, vt D E ad E H; erit B F maior quàm B C, atque A F maior quàm A C; ergo A B ad A F eandem proportionem habebit quàm D E ad D H, sed eadem A B ad minorem A C maiorem proportionem habet quàm ad A F maiorem, ergo A B ad A C maiorem proportionem habet quàm D E ad D H.*

Secundò ijsdem positis, dico comparando terminorum summas ad antecedentes A C ad A B habere minorem proportionem quàm D H ad D E. Quoniam ex præcedenti casu A B ad A C maiorem proportionem habebat quàm D E ad D H; igitur inuertendo C A ad A B minorem proportionem habebit quàm D H ad D E.



Tertiò, dico quod comparando consequentes ad terminorum summas B C ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D; quia (ex hypothesi) A B ad B C maiorem proportionem habet quàm D E ad E H componendo A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E, & inuertendo B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E H ad H D.

Quartò, ijsdem positis in quarta figura, dico quod comparando differentias terminorum ad consequentes A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm D H ad H E: quia ex constructione A B ad B F est, vt D E ad E H, diuidendo A F ad F B erit vt D H ad H E; sed A C maior est quàm A F, & C B minor, quàm F B; igitur A C ad C B maiorem proportionem habebit quàm A F ad F B; & propterea A C ad C B maiorem proportionem habebit, quàm D H ad H E.

Quintò, dico quod è contra, comparando consequentes ad differentias terminorum C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D. Quia (ex præcedenti casu) A C ad C B maiorem proportionem habebat quàm D H ad H E; ergo inuertendo C B ad C A minorem proportionem habebit quàm E H ad H D.

Ibidem. *Sextò, dico quod comparando antecedentes ad differentias terminorum B A ad A C minorem proportionem habebit quàm E D ad D H. Quia ex constructione*

A B ad

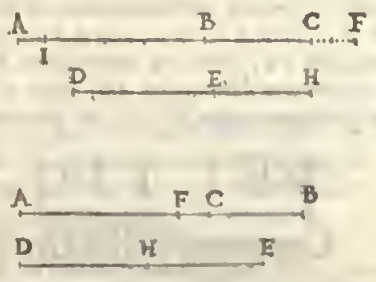
AB ad BF eſt, vt DE ad EH; ergo AB ad AF eſt, vt ED ad DH; ſed BA ad maiorem CA habet minorem proportionem quàm ad FA; igitur BA ad AC minorem proportionem habet quàm ED ad DH.

Septimò, dico è contra, quod comparando differentias terminorum ad antecedentes CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE. Quoniam, ex precedenti caſu, BA ad AC minorem proportionem habebat quàm ED ad DH; igitur inuertendo CA ad AB maiorem proportionem habebit quàm HD ad DE.

LEMMA III.

Si quatuor quantitates eandem rationem habuerint homologorum ſummæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt.

Oſtenſum enim fuit in elementis, quod proportionalium omnes antecedentes ad omnes conſequentes eandem proportionem habent, quàm vna antecedentium ad vnam conſequentium. Similiter oſtenſum fuit, quod ſi totum ad totum eandem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquũ, vt totum ad totum ſe habebit; ſed vno verbo homologorum ſummæ, vel differentiæ in eadem ratione erunt iuxtà Arabici expoſitoris compendium.



LEMMA IV.

Si prima AB ad ſecundam DE maiorem proportionem habuerit, quàm tertia BC ad quartam EH: dico, quod comparando homologorum ſummas AB ad DE maiorem proportionem habebit, quàm prima cum tertia, ideſt AC ad ſecundam cum quarta, ideſt DH.

Fiat BF ad EH, vt AB ad DE: ergo AB ad DE eſt, vt AF ad DH; ſed AF maior eſt quàm AC, igitur AF ad eandem DH maiorem proportionem habet, quàm AC: & ideo AB ad DE maiorem proportionem habet, quàm AC ad DH. Lem. 3.

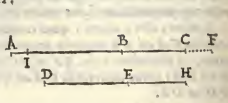
Secundò iiſdem poſitis, dico, quod tertia BC ad quartam EH minorem proportionem habet quàm AC ad DH.

Fiat vt BC ad EH, ita IB ad DE, ergo CB ad EH eſt, vt CI ad HD; ſed AB maior eſt quàm IB, & ideo CA maior quàm CI; igitur IC ad eandem Ibidem.

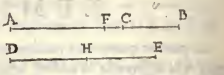
DH

DH minorem proportionem habet quàm AC, & propterea BC ad EH minorem proportionem habebit quàm AC ad DH.

Tertiò ijſdem poſitis in ſexta figura, dico quod comparando homologorum differentias prima AB ad ſecundam DE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH.



Lem. 3. *Fiat BF ad EH, vt AB ad DE, ergo AF ad DH eſt vt AB ad DE, ſed AF minor eſt quam AC, ergo AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC: & propterea AB ad DE minorem proportionem habet quàm AC ad DH.*



Ibidem. *Quartò, dico, quod tertia CB ad quartam HE minorem proportionem habet quàm differentia AC ad differentiam DH. Quoniam ex conſtructione AB ad DE eſt vt FB ad HE, erit FB ad HE, vt AF ad DH; ſed CB minor eſt quàm FB, atque AC maior quàm AF, & AF ad eandem DH minorem proportionem habet quàm AC; igitur CB ad HE eo magis habebit minorem proportionem quàm AC ad DH quæ erant oſtendenda.*

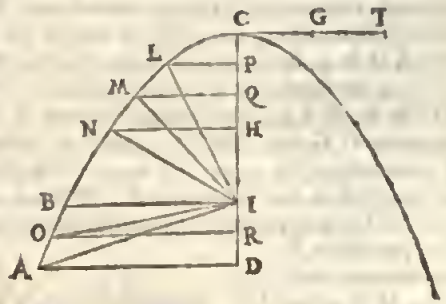
SECTIO TERTIA

Continens VIII. IX. X. Propoſ. Apollonij.

SI menſura fuerit maior comparata, dummodo in ellipſi minor ſit medietate axis tranſuerſi, tunc minimus ramorum in ſectionibus eſt, cuius potentjalis abſcindit à menſura verſus originem in parabola (8) lineam æqualem comparatæ, in hyperbola verò (9) & in ellipſi (10.) lineam, cuius inuerſæ proportio ad illam eſt, vt proportio figuræ; & reliqui rami, quo accedunt ad minimum ſunt minores remotioribus; & quadratum minimæ minus eſt quadrato cuiuslibet rami aſſignati in parabola quidem (8) quadrato exceſſus ſuarum abſciſſarum, & in hyperbola (9) & ellipſi (10.) exemplari applicato ad exceſſum ſuarum inuerſarum. a

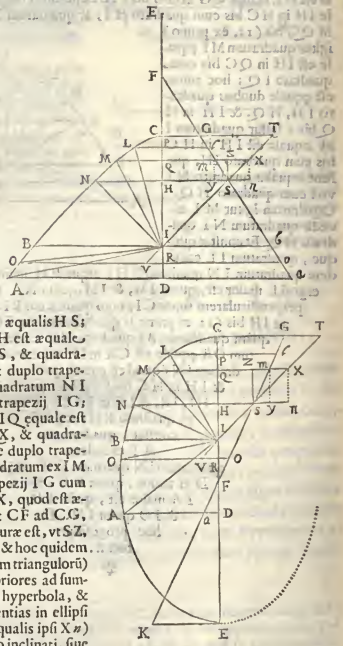
SIt itaque ſectio ABC, & menſura IC, inclinatus, ſiue tranſuerſa EC, dimidium erecti CG, centrum F, origo I, & IH in parabola ſit æqualis CG, & in hyperbola, & ellipſi FH ad HI ſit, vt FC dimidium inclinati, ſeu tranſuerſæ ad CG, dimidium erecti, & educta ex H perpendiculari HN, & coniuncta recta NI; Dico NI minimum eſſe ramorum egredien- b

egredientium ex I, & insuper, propinquiores illi minores esse remotioribus ramis ex vtraque parte, & quod quadratum I N minus est quadrato M I (exempli gratia) in parabola quadrato Q H, in hyperbola, & ellipsi
c exemplari applicato ad Q H. Quoniam quadratum H N in parabola æquale est H I, nempe C G in H C bis (11. ex primo) erit quadratum I N æquale I H in H C bis cum quadrato H I; at quadratum M Q æquale est H I in Q C bis (11. ex primo) igitur quadratum M I æquale est I H in Q C bis cum
d quadrato I Q; hoc autem est æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis; igitur quadratum I M æquale est I H in H C bis cum quadrato I H, quæ sunt æqualia quadrato N I vnà cum quadrato H Q. Quadratum igitur M I excedit quadratum N I quadrato H Q. Et constat quoque, quadratum I L excedere quadratum I N quadrato P H; atque P H maior est, quàm Q H, ergo I L maior est, quàm I M, & I M, quàm N I. Ponamus iam B I perpendicularem super C I, ergo quadratum B I æquale est I C in I H bis (11. ex primo); quadratum igitur I N minus est
e quàm quadratum B I quadrato I H. Et quia quadra-
f tum O R æquale est C R in I H bis excedet quadratum I N (quod est æquale quadrato I H, & I H in H C bis) duobus quadratis H I, I R, & I H in I R bis, nempè quadrato R H; atquè sic constat, quadratum A I excedere quadratum I N quadrato D H; estque D H maior, quàm R H, igitur I A maior est, quàm I O, & I O quàm I N. Et hoc propositum fuerat.



PROPOSITIO IX. & X.

AT in hyperbola (10.) & ellipsi educamus rectas lineas, GF quidem secâtem AD in *a*, & NH occurrêtem FG in S, & IS secantem CG in T, pariterque MQ secantem FG in *m*, & IT in X, & ex punctis *m*, S, *x* educamus inter NS, MX rectas *m y*, X*n*, SZ parallelas ipsi CI. Et quia CF ad CG, nempe FH ad HS posita est, vt FH ad HI erit HI æqualis HS; quadratum igitur IH est æquale duplo trianguli IHS, & quadratum NH æquale est duplo trapezij HG; quare quadratum NI æquale est duplo trapezij IG; similiter quadratum IQ æquale est duplo trianguli IQX, & quadratum MQ est æquale duplo trapezij QG; itaque quadratum ex IM æquale est duplo trapezij IG cum duplo trianguli *m*SX, quod est æquale plano *m n*: Et CF ad CG, nempe proportio figuræ est, vt SZ, nempe ZX ad Z*m* (& hoc quidem propter similitudinem triangulorũ) quare comparãdo priores ad summas terminorum in hyperbola, & ad eorundem differentias in ellipsi fiet XZ (quæ est æqualis ipsi X*n*) ad X*m*, vt proportio inclinati, siue transuersæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* est exemplar, estque applicatum ad X*n*, nempe



Prop. 1. h.

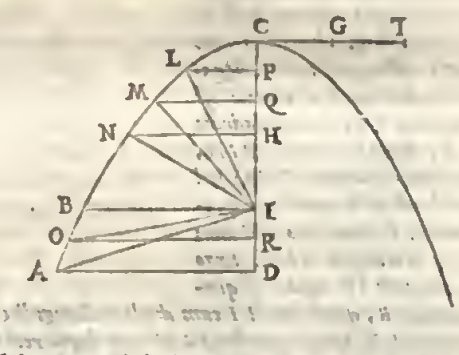
Lem. 1. h.

Def. 9.

nempe ad QH. Eodem modo conſtat, quod quadratum IL excedit quadratum I N quantitate exemplaris applicati ad H P, & quod quadratum B I excedit quadratum IN exemplari applicato ad IH, & quod quadra-
m tum I O excedit quadratum I N exemplari applicato ad R H (eo quod quadratum RI æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R æqua- Prop. 1. h.
le eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F
æquale eſt duplo trapezij R K; quadratum igitur O I in ellipſi æquale eſt Prop. 3. h.
n duplo trianguli K E F, quod eſt æquale F C G cum duplo trapezij V F,
igitur quadratum O I in hyperbola, & ellipſi excedit duplum trapezij I G
o (quod eſt æquale quadrato N I) duplo trianguli V S o, quod eſt æquale
exemplari applicato ad R H: & ſimiliter patet, quod quadratum A I ex-
cedit quadratum N I exemplari applicato ad D H, eſtque D H maior
p quàm RH, & RH maior quàm IH; quare A I maior eſt, quàm O I, &
OI maior, quàm BI, & BI, quàm NI, & quodlibet horum duorum ex-
cedit NI poteſtate plano iam dicto, & hoc erat oſtendendum.

Notæ in Propoſitionem VIII.

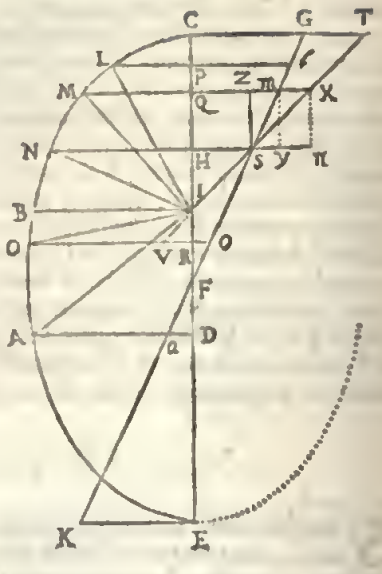
a SI menſura fuerit maior comparata, dummodò in ellipſi ſit portio tranſuerſæ, non maior medietate ipſius, tunc minimus, &c. *Sic puto legendum: Si menſura fuerit maior comparata, dummodo in ellipſi minor ſit medietate axis tranſuerſi, tunc minimus, &c. Nam ſi menſura ſumi poſſet æqualis ſemitranſuerſo, tunc quidem origo eſſet in centro ellipſis, quare vndecima propoſitio huius eſſet ſuperflua, in qua ſupponitur origo in ipſomet centro ellipſis. Animaduertendum eſt quod in hac propoſitione menſura neceſſariò ſumi debet in axe maiori ellipſis, quandoquidem menſura I C ponitur maior, quàm C G, & C F maior quàm C I, ergo C F maior eſt quàm C G, & illius duplum ſcilicet axis E C maior erit duplo huius, ſed vt E C ad duplum C G, ita eſt quadratum E C ad quadratum Recti axis eiuſdem ellipſis: ergo E C eſt maior duorum axium ellipſis A B C.*



b Et educta ex H perpendicularis H N, &c. *Ideſt ex H educta H N perpendicularis ad axim C I, qua ſecet ſectionem in N, & iuncta recta N I, pariterque ductis reliquis ramis I M, I L, I B, I A, atque ab eorum terminis ad axim extenſis perpendicularibus, vt in propoſitionibus quarta, quinta, ſexta factum eſt.*

c Quadratum H N in parabola æquale eſt H I nempè C G in H C bis (prima ex quinto) &c. *Hoc deduci non poteſt ex prima propoſitione huius libri,*

ſed potius ex vndecima libri primi; eſt enim quadratum H N æquale rectangulo contento ſub abſciſſa H C, & ſub latere recto, eſtque rectangulum ſub H C, & ſub ſemirecto C G ſemiſsis illius; igitur quadratum H N æquale eſt duplo rectanguli H C G.



d

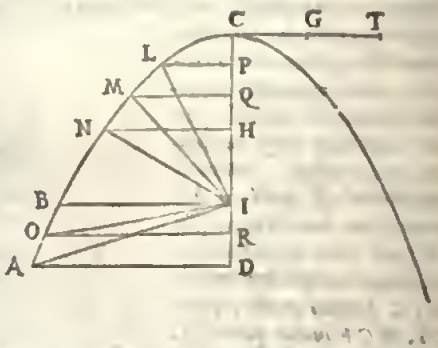
Hoc autem eſt æquale duobus quadratis I H, H Q, & I H in H Q bis, &c. *Poſt hæc verba ſubiungo claritatis gratia, atque C H in H I bis æquale eſt duplo C Q in H I vna cum duplo Q H in H I.*

e

Ergo quadratum B I æquale eſt I C in I H bis, &c. *Hic pariter, vt clarior reddatur demõſtratio, ſubiungo, ſcilicet duplo rectãguli C H I vna cum duplo quadrati H I; erat autem quadratum N I æquale duplo rectanguli C H I, & vnico quadrato H I, ergo, &c.*

f

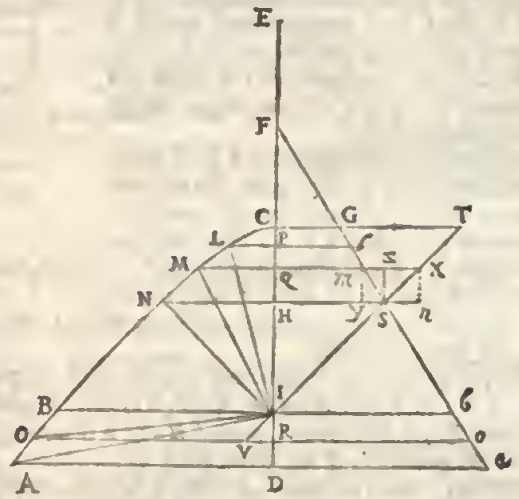
Et quia quadratum O R æquale eſt C R in I H bis, &c. *Subiungo hanc declarationem. Scilicet duplo rectanguli C H I, & duplo quadrati H I cum duplo rectanguli R I H. Quare quadratum I O æquale eſt quadrato R I, duplo quadrati H I, duplo rectanguli R I H, & duplo rectanguli C H I: ſed quadratũ H R æquale eſt quadrato R I, quadrato I H cum duplo rectanguli R I H. Ergo quadratum I O æquale eſt quadrato H R, quadrato H I cum duplo rectanguli C H I; erat autem prius quadratum I N æquale quadrato I H cum duplo rectanguli C H I. Igitur exceſſus quadrati I O ſupra quadratum I N eſt quadratum H R.*



Notæ

Notæ in Propoſitionem IX. & X.

g AT in hyperbola, & ellipſi educamus G F ad *a* ex A D, & H N ad *s* ex F G, & I S ad T ex C G, ſi educta occurrat ſectioni ad A, & M Q poſita ad *m* ex *a*, F G, & X in I T, & ex *m*, S X, *my*, *xn*, S Z inter N S, M X, &c. *Eadē phraſi inconcinna exponitur vniuerſa conſtructio huius propoſitionis, ideo curaui eam reddere clariorem, dicendo;*



Educamus rectas lineas G F quidem ſecantem A D in a, &c.

h Quadratum igitur I H eſt æquale triangulo I H S, &c. *Quia nimirum, Quadratum I H eſt æquale duplo iſoſcelei, & rectanguli trianguli I H S.*

i Et ſimiliter quadratum I Q æquale eſt duplo trianguli I Q X, &c. *Scilicet duplo trapezij I S m Q cum duplo trianguli S m X.*

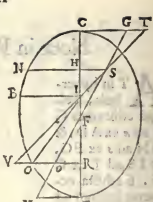
k Et hoc quidem propter ſimilitudinem triangulorum, at componendo proportionem in hyperbola, tum inuertendo, & reflectendo in ellipſi fit, &c. *Huiuſmodi verba inepta ad concluſionem inferendam commutaui dicendo; Quare comparando priores ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad eorum differentias in ellipſi fit, &c. Qua quidem expeditè (vt in primo præcedentium Lemmatum oſtenſum eſt) progreſſum declarant.*

l Vt proportio inclinati, ſiue tranſuerſæ ad latitudinem figuræ comparatæ; igitur planum *m n* eſt exemplar, &c. *Subiungo: nam, vt dictum eſt in quinta, & ſexta huius, poteſt hic demonſtrari, quod figura m n ſimilis eſt ei, qua continetur latere tranſuerſo E C, & ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi laterum tranſuerſi, & rectis iuxta definitiones octauam, & nonam.*

m Quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R in hyperbola æquale eſt duplo trapezij R G, & in ellipſi æquale eſt duplo trapezij R K, &c. *Legendum puto quadratum R I æquale eſt duplo trianguli R V I, & quadratum O R æquale eſt duplo trapezij R G, at in ellipſi quando O R cadit infra centrum F æquale eſt duplo trapezij R K, &c. Deindè quum triangulum R V I ſimile ſit triangulo I H S propter parallelas V R, S H; ideò triangulum R V I erit quoque iſoſceles, & rectangulum.. Poſtea quadratum* 1. huius.

Prop. 1. h.

dratum O R æquale est duplo trapezij R C G O; Sed in ellipsi quando ordinata O R cadit infra centrum F, tunc quidem ducta E K parallela C G, quæ secet G F in K, erit quadratum O R æquale duplo differentiæ triangulorum F R o, & F C G, seu F E K, quæ differentia æqualis est trapezio R E K o, idcoque duo quadrata ex I R, & ex R O, ideſt quadratum ex I O æquale erit triangulis F C G, & I R V bis sumptis dempto duplo trianguli F R o.



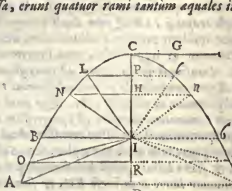
Quod est æquale triangulo F C G cum duplo trapezij V F, &c. *Addo, quæ videntur in textu deficere, seu cum duplo differentiæ triangulorum I V R, & F R o. In hyperbola verò quadratum O I æquale est spatio rectilineo V I C G o bis sumpto, quare in hyperbola, & ellipsi quadratū O I æquale est duplo trapezij I C G S cum duplo trianguli V o S.* n

Quod est æquale exemplari applicato ad R H, &c. *Hoc enim constat ex ijs, quæ supra dicta sunt.* o

Estque D H maior in hyperbola, quàm R H, itaque A I maior, quàm O I, & O I in omnibus maior, quàm B I, &c. *Textum hunc corruptum sic restituo: Estque D H maior, quàm R H, & R H maior quàm I H; itaque A I maior est, quàm O I, & O I maior quàm B I.* p

PROP. III. Add.

Similiter, vt in præcedenti sectione factum est, reperietur multitudo ramorum inter se æqualium, qui ex origine ad sectionem duci possunt. Existente mensura I C maiore, quàm comparata, si differentia abscissarum rami maioris, & breuissimi æqualis fuerit abscissæ rami breuissimi, erunt tantummodo tres rami inter se æquales; si verò maior fuerit, duo rami solummodo æquales erunt; at si fuerit minor eadem abscissa, erunt quatuor rami tantum æquales inter se.



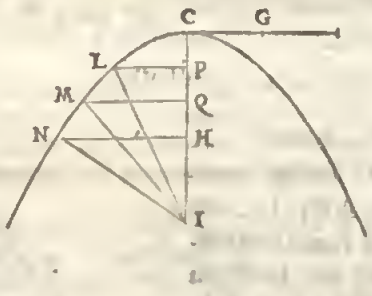
Et primò ramorum I O, & breuissimi I N abscissæ sint R C, H C, & eorum differentia R H, fiatque R H æqualis H C, & producatur O R perpendicularis ad axim quousque secet sectionem ex altera parte in puncto o, coniungaturque ramus I o. Dico quod tres rami I O, I o, I C tantùmodo inter se æquales sunt; quoniam quadrata in parabola rectarum R H, & H C, 8. huius. 9. 10. h. *seu in hyperbola, & ellipsi, rectangula exemplaria inter se similia applicata ad R H, & H C æqualia sunt inter se, cum eorum latera homologa R H, H C æqualia supposita sint, estque excessus quadrati rami I O, vel I o, seu I C supra quadratum rami breuissimi I N æqualis quadrato R H, vel C H in parabola, & in reliquis sectionibus, exemplaribus similibus applicatis ad easdem rectas æquales R H, H C;*

H C ; igitur prædicti excessus tam in parabola, quàm in reliquis sectionibus æquales sunt inter se, & ideò quadrata ramorum I O, I o, I C, & rami ipsi æquales erunt: cumque quilibet alius ramus supra, vel infra ramum I O maior, vel minor sit illo, non erunt plures, quam tres rami inter se æquales.

Secundò H D differentia abscissarum rami I A, & breuissimi I N supponatur maior, quàm H C qua est abscissa breuissimi rami I N ; & producta similiter ordinata D A vltra axim ad sectionem in a, & coniuncta I a ; Dico, quod duo rami tantummodo I A, & I a inter se æquales sunt: Quia H D maior est, quàm H C, erit quadratum ex H D maius quadrato H C; parilerque exemplar applicatum ad H D maius erit exemplari ei simili applicato ad H C, & ideo tam quadratum I A, quàm I a maius erit quadrato I C, cum quodlibet illorum maiori excessu superet quadratum breuissimi rami I N quam quadratum I C, quare tam ramus I A, quàm I a (qui æquales sunt) maiores erunt, quàm I C, & ideo maiores quàm intercepti inter I C, & I N, parilerque maiores, quàm interpositi inter I N, & I A, & minores omnibus alijs, qui infra ipsos cadunt. Quapropter duo tantùm rami I A, I a ab origine ad sectionem duci possunt inter se æquales:

Tertiò sint duæ abscissarum differentia H P, & H I æquales inter se, & qualibet earum minor H C abscissa rami breuissimi, & producantur perpendiculares ad axim L P, B I, donec conueniant ex altera parte cum sectione in l, & b, coniungunturque rami ad l, b. Dico, quatuor ramos I B, I L, I l, I b æquales inter se tantummodo duci posse; quia, vt dictum est, quilibet eorum superat ramum breuissimum I N potentia eodem excessu, erunt radij ipsi I B, I L, I l, I b æquales inter se, reliqui verò supra, & infra ipsos maiores, aut minores erunt, & ideo non possunt duci plures, quàm quatuor rami iam dicti æquales. Quod erat ostendendum.

PROP. IV. Add.



Et insuper quadratum rami à breuissimo remotioris superat quadratum rami propinquioris, in parabola quidem rectangulo sub excessu, & sub aggregato differentiali suarum abscissarum ab abscissa rami breuissimi, in reliquis verò sectionibus rectangulo sub eodem excessu differentiali, & sub recta linea, ad quam summa differentialis eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad summam in hyperbola, & ad differentiam in ellipsi laterum recti, & transuersi.

Quoniam in parabola quadratum I L superat quadratum I M eodem excessu, quo quadratum H P superat quadratum H Q (cum quadratum H P, atque quadratum I N simul sumpta æqualia sint quadrato L I, & quadrata ex H Q, & ex I N æqualia sint quadrato I M) sed excessus quadrati H P supra quadratum H Q æqualis est rectangulo sub P Q differentia, & P H, H Q, summa laterum eorundem quadratorum contento; igitur quadratum I L superat quadratum rami I M propinquioris breuissimo I N rectangulo sub P Q excessu, & P H Q Ex 8. hu.

aggregato

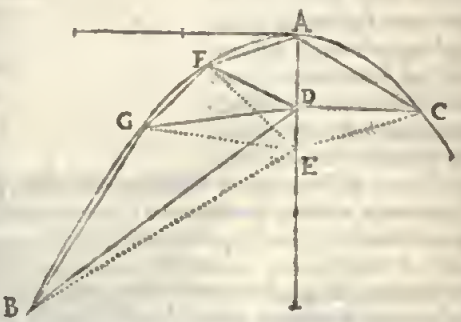
aggregato differentiali abſciſſarum ramorum I L, I M ab abſciſſa rami breuiſſimi.

Pari modo in hyperbola, & ellipſi quadratum I L ſuperat quadratum I M eodē
Ex 9.10.h. *exceſſu, quo exemplar applicatum ad H P ſuperat exemplar applicatum ad H Q; ſed differentia exemplarium applicatorum ad H P, & H Q æqualis eſt rectangulo ſub P Q exceſſu differentiali, & recta linea compoſita ex X m, & u l, ad quam ſumma differentialis P H Q eandem proportionem habet, quam latus trāſuerſum ad ſummam in hyperbola, & ad differentiam in ellipſi laterum tranſuerſi, & recti, vt in nota propoſitionis 5. oſtenſum eſt; igitur quadratum I L ſuperat quadratum I M iam dicto rectangulo ſub P Q, & ſub X m, & u l, quod erat oſtendendum.*

SECTIO IV.

Continens Propoſit. VII. & XII. Apollonij.

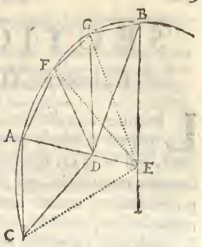
SI fuerit menſura A D minor comparata A E, (12.) aut ſit pars lineæ breuiſſimæ, & axis in ellipſi ſit maior, erit A D breuiſſimus ramorum egredientium ex origine eius in omnibus ſectionibus, vt ſunt F D, G D, B D, C D, & proximior illi minor eſt remotiore, nempe F D quam G D, & G D, quàm B D.



a

Quia

b QVia AE est linea breuissima, igitur FE maior est illa; itaque angulus FAE maior est, quàm
c AFE; Ergo ille est multò maior quàm AFD, quare FD maior est; atque sic patet quod GE maior sit quàm EF, &
d ideo angulus GFE maior est, quàm EGF; igitur angulus GFD multò maior est, quàm FGD, & propterea GD maior est, quàm DF, & similiter BD, quàm GD, & DC, quàm AD, & hoc erat propositum.



NOTÆ.

a SI fuerit mensura AD minor comparata AE, &c. *Sensus propositionis clarior sic reddetur; Si fuerit mensura AD minor comparata AE, quæ in ellipsi sumi debet in axi maiori eius (12.) aut sit pars lineæ breuissimæ; erit AD minimus ramorum FD, GD, BD, CD, egredientium ex origine eius in omnibus sectionibus, & proximior illi, &c.*

b Quia AE est linea breuissima, igitur, &c. *Vt constructio compleatur subiungo: Igitur si coniungantur rectæ lineæ EF, EG, EC, EB, & rectæ lineæ AF, FG, GB, AC erit FE maior, quàm AE.*

c Ergo hic est multò maior, quàm AFE, &c. *Sensus clarior reddetur hac ratione: Ergo angulus FAE multò maior erit, quàm AFD, qui est portio minoris anguli, quarè FD subtendens angulum maiorem est maior, quàm AD.*

d Igitur ipse multò maior est, &c. *Superaddo rationem illationis dicendo; Et propterea angulus GFD maiorem excedens erit multò maior, quàm FGD, qui portio minoris est.*

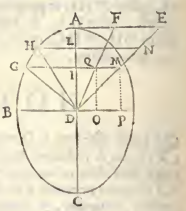
Manifestum est in prima figura propositionis 7. quando AD est portio axis minor comparata, quod tunc ex origine D duo tantummodo rami inter se æquales ad vtrasque partes axis duci possunt ad sectionem, & erunt illi, qui ad terminos eiusdem ordinatim ad axim applicatæ iunguntur ab origine D, vt constat ex superiùs dictis.

At in secunda figura propositionis 12. possunt quidem ab origine D ad sectionem duci hinc inde à breuissima DA, aliquando duo tantùm rami inter se æquales, aliquando tres, atque etiam quatuor inter se æquales, quæ cognitio pendet ex propositione 72. huius libri.

SECTIO QVINTA

Continens XI. Propositi. Apollonij.

LInearum egredientium ex D centro ellipsis A B C, breuissima est semiaxis minor rectus illius, qui sit B D, maxima verò est semiaxis transuersus, qui sit A D, & propinquiores maiori sunt maiores remotioribus, vt H D, quam G D, & quadratum cuiuslibet rami, vt G D (exempli gratia) excedit quadratum breuissimę B D exemplari applicato ad inuersam illius I D.



a

EDucamus itaque E A æqualem A D, & abscindamus ex illa A F æqualem dimidio erecti; & iungamus D F, D E, & perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & sint G I M, H L N. Quia quadratum G I æquale est duplo trapezij I F (prima ex quinto) & quadratum I D est æquale duplo trianguli I D M, eo quod I D est æqualis I M, erit quadratum D G æquale duplo trianguli A D F (quod est æquale quadrato B D (2. ex quinto) vnà cum duplo trianguli Q M D, quod est æquale rectangulo Q P; igitur quadrati G D excessus supra quadratum B D est æqualis plano Q P, & quia D A, nempe E A ad A F est, vt D I, nempe M I ad I Q, & per conuersionem rationis A E ad E F, scilicet dimidium transuersæ ad illius excessum super A F dimidium erecti, est, vt M I, nempe M P ad M Q; igitur planum Q P simile est figuræ comparatæ, & M P æqualis est D I. Similiter patet, quod quadratum D H excedit quadratum B D exemplari applicato ad D L, & quadratum D A superat quadratum B D exemplari applicato ad D A: Est verò D I minor, quàm D L, & D L, quàm D A; igitur B D (quæ est dimidium recti) minor est, quàm G D, & G D, quàm D H, & D H quàm D A, quod erat ostendendum.

b c d e

Def 8. 9. huius.

f

NOTÆ.

ET debet esse linea breuissima perpendicularis ad mensuram, nempe B D perpendicularis D A, &c. *Hæc omnino expungi debent, tanquam supernacanea, axes enim esse nequeunt, nisi ad inuicem perpendiculares sint; quare censeo ab aliquo verba illa addita textui Apollonij fuisse.*

a

Edu-

b Educamus itaque E A, &c. *Lego: Educamus itaq; E A perpendicularem, & æqualem A D.*

c Et perducamus ex G, H perpendiculares, &c. *Et perducamus ex G, H perpendiculares ad D A, & sint H L N, & G I M, quæ secent F D in 2, & D E in M, & N, atque à punctis 2, M educantur M P, 2 O, parallelæ D A, quæ secent rectum axem B D in O, P. Addidi hæc postrema verba, vt constructio completa sit.*

d Eo quod I D est æqualis I M, &c. *Quoniam sicuti in triangulo D A E simili triangulo D I M (propter angulum D communem, & rectos angulos ad I, & A) latus D A æquale erat E A, ita latus D I æquale est I M.*

e Nempe M I ad I Q, & è contra, &c. *Lego: Nempe M I ad I 2, & per conuersionem rationis.*

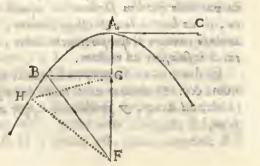
f Cumque B D sit dimidium axis recti erit perpendicularis ad A D mensuram, &c. *Hæc verba postrema pariter expungi debent, nisi forte corollarium propositionis exponunt, & tunc textus sic restitui deberet. Ex dictis constat, lineam breuissimam è centro ellipsis ad sectionem ductam, perpendicularem esse ad axim eius maiorem.*

Manifestum est ex centro ellipsi ad sectionem duci non posse plures, quàm quatuor ramos inter se æquales, neque pauciores duobus; tres autem nequaquam; nam duæ medietates cuiuslibet axis æquales sunt inter se, & quatuor rami ad extremitates duarum applicatarum ad axim æqualiter è centro distantium ductí æquales sunt inter se.

SECTIO SEXTA

Continens Propos. XIII. XIV. XV. Apollonij.

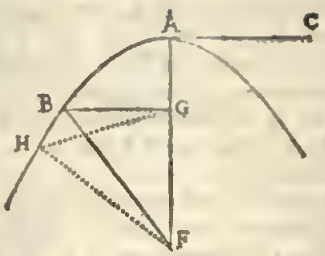
OStendamus modò eõ uersum harum propositionum; & est, quod linea breuissima B F continet cum sua mensura A F angulum acutum, vt B F A in omnibus sectionibus, & ellipsi (si tamen non egrediatur ex eius centro) eiusque potentialis abscindet



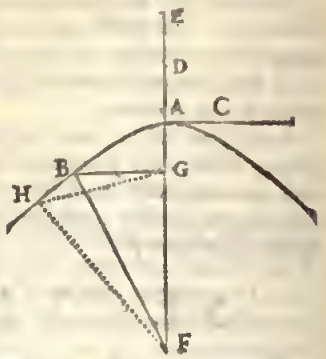
a mensuram (13) in parabola æqualem comparatæ (14) & in hyperbola (15) & ellipsi lineam, ad quam inuersa est, vt proportio figuræ.

SIt centrum D, & dimidium recti A C. Quia B F est linea breuissima, erit A F maior quàm A C, eo quòd si esset æqualis (4. 6. ex quinto)

aut minor illa (7. ex quinto) esset linea breuissima AF, aut pars illius, quod est falsum, igitur maior est, quàm AC; & propterea AD ad AC maiorem proportionem habet, quàm ad AF; ponamus ergo, vt AD ad AC, ita DG ad GF in hyperbola, & ellipsi; at in parabola ponamus GF æqualem AC, & ducatur ex G perpendicularis ad sectionem. Dico, quod ei occurret ad B. Nam si occurrat sectioni ad aliud punctum, vt H coniuncta HF erit HF breuissima (8. 9. 10. ex quinto) sed supposuimus BF esse breuissimam, quod est absurdum, ergo perpendicularis occurrit sectioni in B. Et quia angulus BGF est rectus, erit angulus BFG acutus, quod erat ostendendum.



b

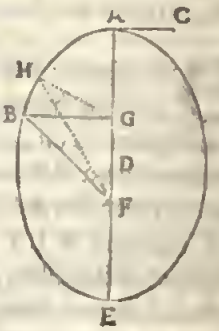


a

NOTÆ.

ET eius potentialis secet mensuram, &c. in parabola, &c. *Idest, & eius potentialis abscindet ex mensura vsque ad originem, in parabola quidem segmentum æquale comparata, & in hyperbola, & ellipsi lineam, ad quam inuersa eandem proportionem habet, quam latus transuersum ad rectum.*

Et ducatur ex G perpendicularis ad sectionem, &c. *Et ducatur ex G recta linea perpendicularis ad axim, & producatur vsque ad sectionem.*



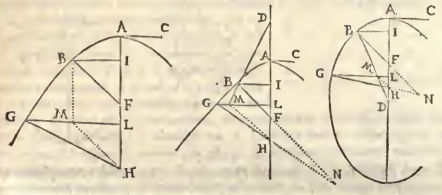
b

SECTIO SEPTIMA

Continens XXVI. XXVII. XXVIII. Propoſ. Apollonij.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

ANgulorum ab axi ſectionis A H, & à lineis breuiſſimis F B, H G contentorum proximiores vertici ſectionis minores ſunt remotioribus, nempe angulus A F B minor eſt A H G.



a SIt itaque centrum D, & ſemi inclinatus axis A D, ſiue ſemitranſuerſus, & dimidium erecti A C: educamus itaque duas perpendiculares G L, B I, & ſi ſectio fuerit parabole, erit F I æqualis L H, quia quælibet
b earum æqualis eſt A C (13. ex quinto) & L G maior eſt, quàm B I; angulus igitur F minor quàm H; ſi verò ſectio fuerit hyperbole, aut ellipſis,
c erit F I ad I D, vt H L ad L D, quia quælibet earum eſt, vt A C ad A D
d (14. 15. ex quinto) & permutando, erit I D ad L D nempe B I ad M L, vt I F ad L H, & anguli I, & L ſunt recti; igitur duo triangula B I F, M L H ſunt ſimilia, ideoque angulus A H G maior eſt, quàm angulus A F B, & hoc erat propoſitum.

PROPOSITIO XXVIII.

Hinc patet, lineas breuiſſimas ſibi occurrere ad partes axis ſectionis.

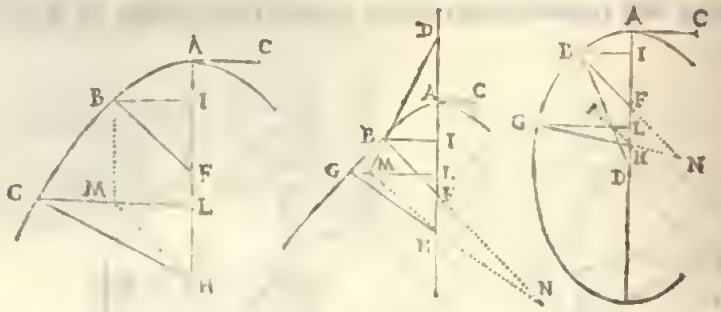
e QVia angulus A F B minor eſt, quàm angulus A H G; quare ſibi occurrunt ad partes F, H, & hoc erat oſtendendum. 26. 27. h.

NOTÆ

NOTÆ.

EDucamus itaque duas perpendiculares, &c. *Educamus itaque ex punctis B, G duas G L, B I perpendiculares ad axim ei occurrentes in L, I.* a

Et L G maior est, quàm B I, &c. *Subiungo: Eo quod potentialis G L magis recedit à vertice, quàm B I; si iam ducatur B M parallela axi in parabola, & ex centro educta in reliquis sectionibus, secans G L in M, coniungaturque H M, erit in parabola M L minor quàm G L, & aqualis B I, & ideo angulus M H L minor erit angulo G H L, & aqualis angulo F, & propterea angulus F minor est, quàm G H L.* b



31. lib. 1. Si verò sectio fuerit hyperbole, aut ellipsis, &c. *Addo: Manifestum est rectam B D ex centro ductam sectionem secare in B, & propterea occurrere potentiali G L à vertice remotiori, quàm B I inter puncta G, & L, & erit F I, & catera.* c

Erit I D ad L D, nempe B I ad M L, &c. *Addo (propter parallelas B I, M L, & similitudinem triangulorum D B I, & D M L.)* d

Quia angulus A F B minor est, quàm angulus A H G, &c.. *Addo: Et sumpto communi angulo F H N erunt A F B, seu H F N, & F H N simul sumpti minores duobus angulis G H A, F H N, qui duobus rectis aequales sunt; quare B F, G H, concurrunt ad partes F, & H, vt in N.* e

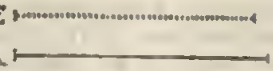
Pro intelligentia sequentium propositionum hæc præmitti debent.

LEMMA V.

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico, rectangulum sub extremis A, D contentum maius esse eo, quod sub mediis B, C continetur, & è conuerso.

Fiat vt C ad D, ita E ad B; patet ex elementis, A excedere ipsam E; quare rectangulum A D maius erit rectangulo E D: est vero rectangulum B, C sub

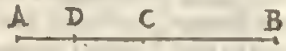
C ſub intermedijs contentum æquale eſt, quod ſub extremis E, D quatuor proportionalium continetur; ergo rectangulum A D maius eſt rectangulo B C. Poſtea ſit rectangulũ A D maius rectangulo B C; Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D; Si enim hoc verum non eſt, habebit A ad B eandem, aut minorem proportionem quàm C ad D, quare rectangulum A D æquale, aut minus erit rectangulo B C, quæ ſunt contra hypotheſim; igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D.



LEMMA. VI.

Si recta linea AB ſecetur bifariam in C, & non bifariam in D: Dico, quod ſemiſsis C B ad alterum ſegmentorum inæqualium D B habet maiorẽ proportionẽ, quàm reliquum inæqualiũ A D ad alterã medietatẽ A C.

Quoniam quadratum ſemiſsis C B, ſeu rectangulum B C A maius eſt rectangulo A D B ſub inæqualibus ſegmentis contento; ergo ex præcedenti lemmate C B ad D B maiorem proportionem habet, quàm A D ad A C; Aſſumitur in ſequenti prop. 52. problema antiquum inuentionis duarum mediarum continuè proportionalium inter duas rectas lineas datus, cuius conſtructio, & demonſtratio ab Apollonio inuenta adhuc legitur apud Eutocium, ſed organica quidem illa eſt, & ad manuum operationes maximè accomodata, non omninò diuerſa ab ea, quàm Hero, & Philo ediderunt. At Parmenian aliam eiuſdem problematis demonſtrationem Apollonio tribuit paulò diuerſam ab ea, quàm Eutocius recenſuit: eam ſane nec percepit, nec rite expoſuit, Philoponus, quàm enim petitionem non demonſtratam ipſe vocat conſequẽtia eſt neceſſaria ex deſcriptione hyperboles, qua omnino ſubintelligi, & adiungi debet, vt colligitur ex Pappi verbis: hi enim (ſcilicet Hero, & Philo) aſſerentes problema ſolidam eſſe, ipſius conſtructionem inſtrumentis tantum perfecerunt congruenter Apollonio Pergæo, qui reſolutionem eius fecit per coniectiones. Erit igitur Apollonij propoſitio huiuſmodi.



Cõm. lib. 2. Arch. de Sphę. a, & Cylin. Prop. 2.

In lib. 5. Poſt Analit. comm. 36.

Coll. lib. 3. Prop. 4.

LEMMA VII.

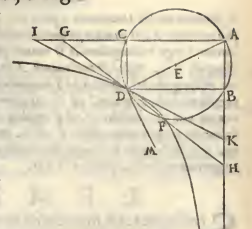
Inter rectam lineam A C maiorem, & B C minorem duas medias proportionales reperire.

Conueniant illa ad angulos rectos in A, & compleatur Parallelogrammum A B D C, cui circumſcribatur circulus diametro D A, & per punctum D circa aſymptotos C A B deſcribatur hyperbole D F, & ducatur recta D M circulum tangens in D, & recta I D K ſectionem ibidem contingens, occurrens aſymptotis in I, & K, erunt quidem I D, & I K æquales inter ſe, & D C parallela eſt A K, ergo I C æqualis eſt C A: pari ratione K B æqualis erit B A, ſed poſita fuit C A maior quàm A B, ergo in triangulis I A D, & K D A baſis I A maior erit, quàm A K, & latera I D, D K æqualia ſunt, & D A eſt commune, igitur angulus A D I maior erit angulo A D K, & propterea recta linea I K ſectionẽ con-

Prop. 4. lib. 2.

Prop. 34. lib. 1.

3. lib. 1.



contingens in D intra circulũ cadet ad partes acuti anguli A D K, ſed qualibet rectæ lineæ ex D inter tangentes K D, & D M incedens ſecat circulum, &
36. lib. 1. *hyperbolam D F, ergo circuli peripheria, & hyperbole non ad eaſdem partes cauæ ſe mutuo ſecant in duobus punctis: concurrant in D, & F, & con-*
33. lil. 4. *iungatur rectæ lineæ D F, quæ pro-*
8. lib. 2. *ductæ ſecet aſymptotos in punctis G, & H: oſtendendũ eſt rectas B H, & G C eſſe duas medias proportionales quæſitas. Quoniã eiuſdem rectæ lineæ portiones G*
Ibidem. *D, & F H inter hyperbolen, & aſymptotos intercepta æquales ſunt inter ſe, addita communi D F, erunt F G, & G H inter ſe quoq; æquales quare rectangulum D H F æquale erit rectangulo F G D, ſed rectangulũ A H B æquale eſt rectangulo D H F, (eo quod ab eodem puncto H extra circulum poſito ducuntur duæ rectæ lineæ circulum ſecantes): ſimili modo rectangulũ A G C æquale eſt rectangulo F G D, igitur duo rectangula A G C, & A H B æqualia inter ſe erunt, & ideo vt G A ad A H, ita erit reciprocè B H ad G C, ſed vt G A ad A H; i. a eſt D B ad B H, nec non G C ad C D, (propter æquidiſtantiã ipſarum D B, G A, & ipſarum C D, & A H, & ſimilitudinem triangulorum), quare D B, ſeu C A ad B H eandem proportionem habebit, quàm B H ad G C, & eandem, quàm habet G C ad C D, ſeu ad A B, & propterea quatuor rectæ lineæ C A, B H, C G, & B A erunt in continua proportionalitate, quod erat propoſitum.*

SECTIO OCTAVA

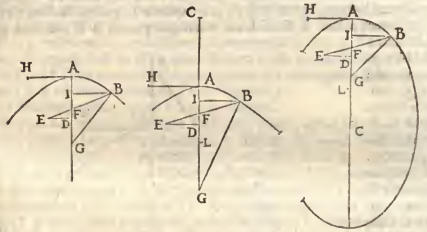
Continens Prop. IL. L. LI. LII. LIII. Apoll.

SI menſura non excedit comparatam, nullus ramorum ſecantiũ ex concurſu egredientium erit Breuiſecans: & lineæ breuiſſimæ ab extremitatibus ramorum ductæ in ſectione abſcindunt ex axi lineam maiorem, quàm abſcindunt rami (51. & 52.) Si verò menſura excedit comparatã exponi debet linea certis quibuſdam legibus inuenienda, quæ vocabitur **TRVTINA**. Et ſiquidẽ perpendicularis maior fuerit illa, tunc rami habebunt proprietates memoratas; ſi verò æqualis fuerit, tunc inter ramos vnicus breuiſecans aſſignari poteſt, & propietates reliquorũ ramorũ erunt illæ eædem ſuperius expoſitæ; ſi verò minor eſt illa, ramorũ omniũ duo tantum breuiſecantes erunt, reliquorum verò, qui non intercipiuntur inter duos breuiſecantes, eædem propietates erunt; eorũ verò, qui intercipiuntur, lineæ breuiſſimæ egredientes ab earum extremitatibus abſcindunt ex axi lineas minores, quàm ſecant rami ipſi. Oportet autem in ellipſi, a

in ellipſi, vt menſura ſumatur in maiori duorum axium, & rami egrediantur ad eius ſectionem.

PROPOSITIO IL. & L.

b EX E concurſu ſuper perpendicularem E D educamus E B ſecantem menſuram A D in F, & ſectionem A B in B, & ſit A H dimidium erecti; ſitque menſura A D non maior, quàm
c H A. Dico quod B F non erit breuiſſima, & minima egrediens ex B abſcindit ex ſagitta maiorem lineam, quàm F A: at ſi fuerit A D maior, quàm A H, tunc B F poteſt eſſe linea breuiſſima.

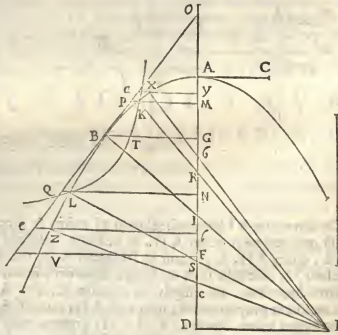


d EDucamus iam B I perpendicularem ad axim, & ſupponamus prius A D non maiorem quàm A H, & ſit ſectio parabole; igitur D I minor eſt, quàm A H, & ponatur G I æqualis A H, erit B G minima (8. ex quinto) & abſcindit G A ex ſagitta maiorem, quàm A F; ſi verò ſectio fuerit hyperbole, aut ellipſis, ſit centrum C; ergo A C ad A H non
e habet maiorem proportionem, quàm ad A D, quare C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad A H; ponatur ergo I C ad I G, vt A C ad A H; ergo B G eſt minima, & abſcindit (9. & 10. ex quinto) G A maiorem, quàm F A, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LI.

DEindè sit D A maior quàm A C, sitque prius sectio parabole, & secetur ex D A ipsa D F æqualis A C, & A G fiat pars tertia ipsius A F, educaturque B G perpendicularis ad axim, & vt D F ad F G, ita fiat B G ad lineam H (& hæc est Trutina) coniungaturque B E; & siquidem D E fuerit maior quàm H. Dico, quod nullus ramus breuisecans duci potest. a

Quoniam D E maior est, quàm H habebit D E ad B G, nempe D I ad I G maiorem rationem, quàm G F ad F D, & componatur proportio, vt demonstretur, quod I G minor sit, quàm D F, quæ æqualis est ipsi A C; breuissima itaque egrediens ex B abscindit ex sagitta A D maiorem lineam, quàm A I (13. ex quinto); postea ducamus ex E ad sectionem ramos E K, E L ad vtramque partem B E, & duas perpendiculares KM, LN, producamus vsq; ad Q O tangẽtem sectionem in B; & quoniã sectio est, parabole, & O Q tãgens est, igitur O G est dupla ipsius A G, quę est semissis ipsius F G; ergo G F æqualis est G O, erit igitur G O ad O M, nempe B G ad P M in maiori proportione, quã M F ad F G; b 35. lib. 1. c



itaque M K in F M minus est, quàm B G in G F, quod est minus quàm E D in D F propterea quod E D maior est quàm H; igitur E D in D F multò maius est, quàm K M in M F, quare E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & componendo patet, quod D F maior sit, quàm R M. Igitur breuissima egrediens ex K (13. ex quinto) cadit extra R K; Et simili modo constat, quod breuissima egrediens d e f

egrediens ex puncto L cadit extra L S, quapropter duci non potest ex E ad sectionem L B A linea, aliqua cuius portio intercepta inter axim, & sectionem, sit linea breuissima.

Pariter demonstrabitur, quemadmodum iam ostensum est, quod si E D
g fuerit æqualis H, tunc G I æqualis erit D F, quæ est æqualis ipsi A C; & ideo B I (8. ex quinto) vna est ex breuissimis, non autem R K, quia demonstrabitur, quod E D ad M K, nempe D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, & propterea D F maior erit, quàm R M; breuissima ergo cadit extra R K. (13. ex quinto) Et S L quoque non est ex breuissimis, quod ita demonstrabimus; Si N S minor est, quàm D F; ergo breuissima egrediens ex L cadit extra S L; Non igitur ex E duci potest ad sectionem linea breuisecans præter E B, & hoc erat ostendendum.

Tertio loco sit E D minor quàm H, & ostendetur quod E D in D F
h minus est, quàm B G in G F; postea ponamus T G in G F æquale illi, & erigamus super F perpendicularem F V, & ducamus per T sectionem hyperbolicam circa duas continentes A F, & F V; duæ sectiones se mutuò secabunt in duobus punctis, & sint K, L, & educamus ex illis duas L N, P K M perpendiculares ad A D. Et quoniam perpendiculares K M, T G, L N parallelæ sunt continenti V F, erit K M in M F æquale L N in N F (12. ex secundo) & quodlibet eorum æquale est T G in G F, quod factum est æquale E D in D F; igitur E D ad K M, nempe D R ad R M est
i vt M F ad F D, & componendo patet, quod D F est æqualis R M, & propterea K R est linea breuissima (8. ex quinto.)
k Et similiter patebit, quod L S sit breuissima.
l Et cum B I intercipiatur inter illas patet etiam, quod B G in G F maius sit, quàm E D in D F, ostendetur vt dictum est, quod I G maior sit, quàm D F; breuissima ergo ducta ex B cadit inter I, & A.

Deindè ex concursu E ad sectionem parobolicam A B Z educamus E X,
m E Z; quas intersecant / Z, X Y perpendiculares ad A D, quæ parallelæ sunt continenti F V secantes K T L hyperbolen, ergo a Y in Y F æquale est G T in G F, quod factum est æquale E D in D F, itaque E D in D F maius est, quàm X Y in Y F; igitur E D ad X Y, quæ est vt D b ad b Y maiorem rationem habet, quàm Y F ad F D, & componendo patet, quod F D maior est quàm b Y; itaque breuissima egrediens ex X abscindit ex A D lineam maiorem, quàm b A; Simili modo demonstrabitur, quod Z c
n non sit breuissima, & quod breuissima egrediens ex Z abscindit ex A D lineam maiorem, quàm A c, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LII. LIII.

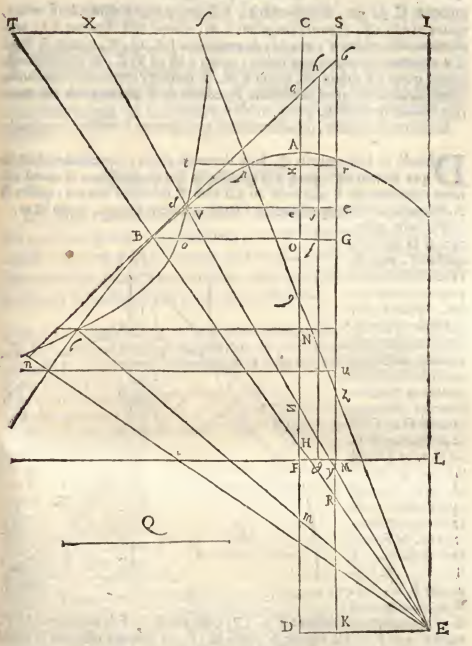
Deindè sit sectio hyperbole, aut ellipsis A B, & axis illius C A D, centrum C, & D A mensura, quæ sit maior dimidio erecti, & perpendicularis E D. Dico, quod rami egredientes ex E
a habent superiùs expositas proprietates.

+ lib. 2.

ITaque per C producamus CI parallelam perpendiculari ED, & ponamus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & EK ad KD, vt proportio figuræ, & educamus ex E, K rectas E I, KS parallelas ipſi C AD, & interponamus inter FC, CA duas medias proportionales CN, Lem. 7. CO, & erigamus per O perpendicularem B O, quæ occurrat ſectioni in B; & ponamus proportionem alicuius lineæ, vt Q ad B O compoſitam ex C D ad DF, & FO ad OC, & ſit ED maior, quàm Q Trutina: Dico, quod nulla breuiſecans egreditur ex E ad ſectionem, & linea breuiſſima, egrediens ab extremitate cuiuslibet rami affignati, abſcindit cum A ab axi maiorem lineam, quàm ſecant illi rami. Producatur priùs EB ſecans axim in H, & quia ED maior eſt, quàm Q, ergo proportio ED ad BO (quæ componitur ex E D ad D K, nempe I C ad C S, & ex D K, nempe G O ad O B) maior eſt proportione, quàm habet Q ad B O, quæ ex hypotheſi componebatur ex CD ad DF, & ex FO ad OC; ſed ED ad DK eſt, vt CD ad DF (quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ compoſitæ, vel diuiſæ) remanet proportio OG ad OB maior ea, Lem. 5. præm. quàm habet FO ad OC; igitur OG in OC, nempe rectangulum CG maius eſt, quàm BO in OF: & ponamus rectangulum FG commune, erit rectangulum FS maius, quàm BG in GM; eſt verò rectangulum FS æquale rectangulo EM (eo quod EK ad KD, nempe ad FM eſt, vt SM ad MK, quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ; itaque rectangulum EM maius eſt, quàm MG in GB, & propterea EK ad BG, ibidem. nempe KR ad RG maiorem rationem habet, quàm GM ad MK, ergo componendo, patet, quod KM, nempe DF maior eſt, quàm GR, & ideo EI ad KM, nempe CD ad DF, ſeu IC ad CS minorem proportionem habet, quàm EI ad GR, quæ eſt, vt IT ad BG, propter ſimilitudinem duorum triangulorum EIT, BGR, ergo IT ad BG maiorem Lem. 4. præm. rationem habet, quàm IC ad CS, ſeu ad OG; & comparando homologorum differentias in hyperbola, & eorum ſummas in ellipſi, habebit CT ad BO, nempe CH ad HO maiorem rationem, quàm IC ad CS, nempe CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi CO ad OH, habebit maiorem proportionem quàm CF ad FD, quæ eſt, vt proportio figuræ; igitur breuiſſima egrediens ex B (9. 10. ex quinto) abſcindit cum A maiorem lineam, quàm AH.

Poſteà educamus ex E lineam occurrentem ſectioni in V, & producamus eam, quouſque occurrat C I ad X, & ducamus per B lineam tangentem ſectionem, quæ occurrat inclinato, ſiue tranſuerſæ in *a*, & per V ducamus perpendicularem ſuper axim, cui occurrat ad *c*, & occurrat tangenti B *a* in *d*; & quoniam O G ad O B, quemadmodum demonſtrauimus, maiorem proportionem habet, quàm FO ad OC, ponamus *f* O ad O B, vt F O ad O C, & per *f* producamus *f g h* parallelam axi AD: Et quia *f* O ad OB eſt, vt FO ad OC, erit rectangulum *f* O C æquale BO in OF, & ponamus rectangulum *f* F communiter fiet B *f* in *f g* æquale *g* F in FC, & quia C O inuerſa in trutinatam C *a* æquale eſt quadrato C A dimidij inclinati, ſiue tranſuerſæ (39. ex primo) erit OC ad CA, vt 37. primi. C A ad C *a*; igitur C *a* eſt linea quinta proportionalis aliarum quatuor linearum proportionalium aſſignatarum; ergo FC ad CO eſt, vt CO ad

C *a*



C *a*, & comparando homologorum differentias erit F O ad O *a*, vt F C ad C O, quæ eſt, vt *f* B ad B O, nempe *f b* ad O *a*; igitur proportiones ipſarum F O, *f b* ad eandem O *a* cædem ſunt; ergo ſunt æquales; & propterea *f i* ad *i b* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, & componendo *f b* ad *i b*, nempe B *f* ad V *i* maiorem proportionem habet, quàm *i g* ad *g f*; ergo B *f* in *f g*, nempe rectangulum *g* C maius eſt quàm *i* V in *i g*, & ponamus rectangulum *g e* commune, erit aggregatum rectangulorum Lem. 4.

p

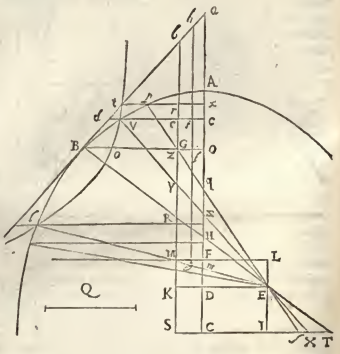
q

gulorum C g; e e, in hyperbola, vel eorum excessus in ellipsi maior, quàm Me in eV, ergo rectangulum CM, nempe rectangulum EM multò maius est, quàm Ve in eM, & propterea EK ad eV, nempe KY ad
Lem.5. Y e maiorem proportionem habet, quàm eM ad MK, & componendo r
patet, quod eY minor sit, quàm KM, & constat (quemadmodum antea demonstrauimus) quod breuissima egrediens ex V abscindit ab axi maiorem lineam quàm eZ. s

Simili modo constat, quod breuissima egrediens ex l eiusdem sit rationis. t

DEindè sit ED æqualis Q, inde demonstrabitur, (quemadmodum supra factum est) quod BH tantùm sit linea breuissima, & quod minima egrediens ex V abscindit ab axi cum A maiorem lineam, quàm A a
Z, & quod minima egrediens ex l secet maiorem lineam, quàm Am.

Tandem ponamus ED minorē, quàm Q, ergo ED ad BO minorē proportionem habet, quàm Q ad eandem; & demōstrabitur (quemadmodum dictū est) quod GO ad OB minorem proportionem habeat, quàm FO ad OC; & ponamus OG ad Oo, vt FO ad OC; & producamus per o sectionē hyperbolicam circa duas continentes SM, MF, quę secet sectionem AB in V, l, & iungamus EV, El, & producamus ex



V, l duas perpendiculares Ve, lP, quæ parallelæ sint continenti MF, ergo oG in GM est æquale Ve in eM (12. ex secundo) & quia GO ad Oo est, vt FO ad OC erit oO in OF æquale rectangulo GC, & ponamus rectangulum FG commune fiet rectangulum CM (quod erat æquale rectangulo ME) æquale ipsi oG in GM, quod est æquale ipsi Ve in e d
M; ergo rectangulum EM æquale est ipsi Ve in eM. Tandem prosequamur superiorem demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarum e
propositionum, & hoc erat propositum.

PROP.

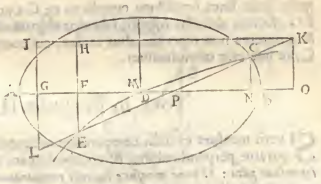
PROPOSITIO LIV. LV.

a ITaque oſtenſum eſt, vti memorauimus, quod ex concurſu duarum breuiſſimarum ad coniſectionem non egrediatur alia breuiſecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concurſu educti ad ſectionem habent proprietates ſuperiùs expoſitas.

PROPOSITIO LVI.

In ellipſi ramorum, ſecantium vtrumque axim, à concurſu vltra centrum poſito egredientium, vnius tantum portio, inter
a axim maiorem, & ſectionem intercepta, erit linea breuiſsima, ſiue menſura ipſam comparatam, nec non perpendicularis ipſam trutinam ſuperet, æquet, vel ab ea deficiat.

b SIt ſectio ellipſis A C B, & axis maior tranſuerſus A B perpendicularis E F, centrum D, & ponamus D G ad G F, vt proportio figuræ, & ſimiliter E H ad H F, & producamus per H rectam I H K parallelam ipſi A B, & per G rectã I G L ipſi E F, quæ ſibi occurrant
c in I, & ducamus per punctum E ſectionem hyperbolen E M C circa duas eius continentes L I, I K, quæ occurret ſectioni A C B ellipticæ, quia I L, I K ſunt duæ cõtinentes ſectionem E M C, & proportio E H ad H F poſita eſt, vt D G ad G F;



4. lib. 2.

d ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam, æquale eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam: ergo punctum M eſt in illius diametro, & propterea ſectio hyperbole E M C tranſit per centrum
e ſectionis ellipſis A C B; quare duæ ſectiones ſe inuicem ſecant, ſitque concurſus in C, & producamus per E, C lineam occurrentem duabus continentibus ſectionem in L, K, & producamus duas perpendiculares C N, K O ſuper A B. Et quia K C, L E ſunt æquales (16. ex ſecundo) erit G F
f æqualis O N; quare F O æqualis eſt ipſi G N; atque E H ad H F, nempe E K ad K P, ſeu F O (quæ eſt æqualis ipſi G N) ad O P eandem proportionem habet, quàm D G ad G F, quę eſt æqualis ipſi O N, & ideo G N ad O P eſt, vt D G ad O N, & comparando homologum differentias D N ad N P

8. lib. 2.

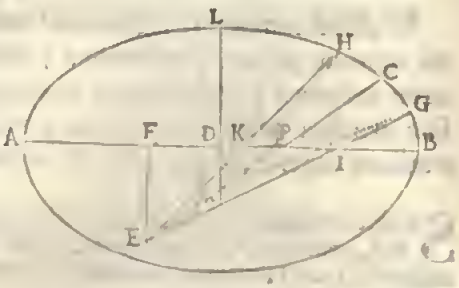
Lem. 5.

ad N P erit, vt D G ad G F, quæ eſt proportio figuræ; ergo C P eſt linea breuiſſima. (10. ex quinto) Et hoc fuit propoſitum.

PROPOSITIO LVII.

Et dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, à quo abſcindi poſſit inter ſectionem, & D B linea breuiſſima. g

NAm ſi producantur E H, E G ad vtraſque partes ipſius E C ſecantes D B in K, I, & producamus per D perpendicularem ad A B, quæ occurrat ſectioni ad L, & ipſi E C ad M, quia iam productæ ſunt ex concurſu M duæ breuiſecantes M C, M L (51. ex quinto) igitur linea educta ex M ad H abſcindit ex D B cum B maiorem lineam, quàm ſecat breuiſſima egrediens ex H (11. ex quinto) & linea educta ex M ad G abſcindit ex D B lineam minorem ea-, quàm ſecat linea breuiſſima egrediens ex G (51. ex quinto) ſed E H, & E G efficiunt abſciſſas oppoſito modo; ergo non ſunt duæ breuiſecantes, & propterea non reperitur alius ramus, cui competat proprietas ipſius E C, & hoc erat oſtendendum. h i k



Notæ in Propoſit. IL. L.

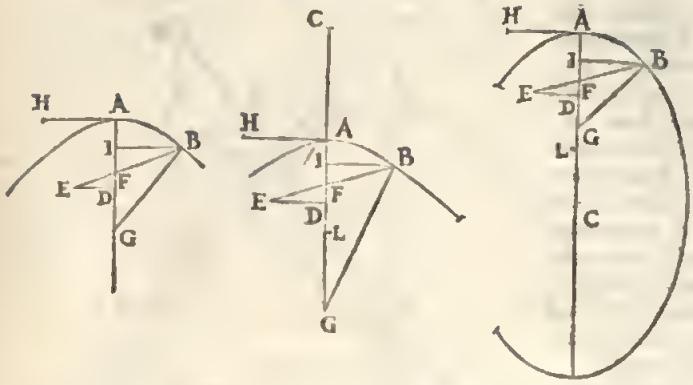
SI verò menſura excedit comparatam educatur linea, ad quam comparatur perpendicularis, & vocabo lineam illam Trutinam, &c. *Sic legendum puto: Si verò menſura excedit comparatam exponi debet linea certis quibuſdam legibus inuenienda, quæ vocabitur Trutina.* a

Ex E concurſu ſuper perpendicularem, &c. *Ideſt. Ex E concurſu perpendicularis E D ad axim A G, & ramorum ſecantium educamus E B ſecantem menſuram, &c.* b

Tunc B F non eſt ex minimis, &c. *Dico quod B F non erit recta linea minima earum, quæ inter punctum ſectionis B, & axim intercipitur.* c

Et ponatur G I æqualis A H, &c. *Et ponatur G I æqualis A H, iungaturque B G, cumque A D poſita ſit non maior, quàm H A, erit illius portio F I minor, quàm A H, ſeu quàm G I, ergo B G eſt breuiſsima, &c.* 8. huius. d

Ergo C A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm ad A D; quare D I ad I F, &c. *Ergo G A ad A H non habet maiorem proportionem-, quàm ad A D, & addatur indirectum recta A L æqualis A H in hyperbo-, & anſ-ur* e

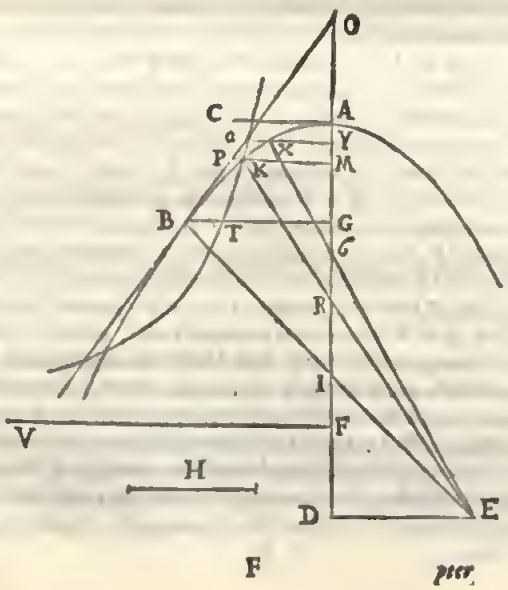


auferatur in ellipſi; quare C A ad A L non habet maiorem proportionem, quàm ad A D, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi C L ad A L, non habet maiorem proportionem, quàm C D ad D A, ſed C D ad A D minorem proportionem habet, quam ad eius ſegmentum I D, ergo diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi habebit AC ad A D, & adhuc ad A L, ſeu A H minorem proportionem, quàm C I ad I D, habet verò C I ad I D minorem rationem, quàm ad eius ſegmentum I F; igitur C I ad I F maiorem proportionem habet, quàm C A ad AH.

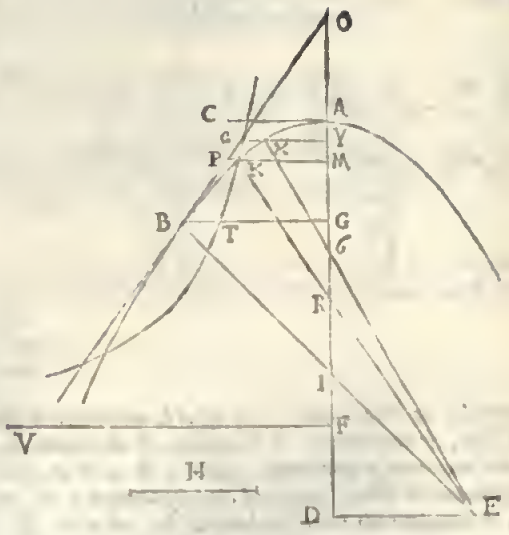
Notæ in Propoſit. LI.

a Dico quod nullus ramus breuiſecans duci poteſt, &c. *Dico, quod ex concurſu E ad ſectionem nullus ramus breuiſecans duci poteſt.*

b Quoniam D E maior eſt, quàm H, &c. *Quoniam D E maior eſt, quàm H habebit E D ad B G maiorem rationem, quàm H ad eandem B G; poſita autem fuit inuersè G F ad F D, vt H ad B G; ergo E D ad B G maiorem rationem habet, quàm G F ad F D; & pro-*



F *pter*



pter parallelas D E, B G, & similitudinẽ triangulorum E D I, & B G I, eſt D I ad I G, vt E D ad B G; igitur D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & componendo D G ad G I maiorem rationem habebit, quàm eadem G D ad D F; & ideo I G minor eſt, quàm D F.

Igitur G F æqualis eſt G O, ergo G O ad O M, &c. *Igitur G F æqualis eſt G O, & quia F O ſecatur bifariam in G, & non bifariam in M (ex lemmate ſexto huius libri) habebit ſemiſis G O ad vnum ſegmentorum inæqualium M O maiorem proportionem, quàm reliquum ſegmentum M F ad alteram medietatem F G, ſed propter parallelas P M, B G, & ſimilitudinem triangulorum B G O, P M O eſt G O ad O M, vt B G ad P M, ergo B G ad P M maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G: habet verò B G ad minorem M K maiorem proportionem, quàm ad M P (eum punctum P tangentis cadat extra ſectionem); ergo B G ad K M adhuc maiorem proportionem habet, quàm M F ad F G.* c

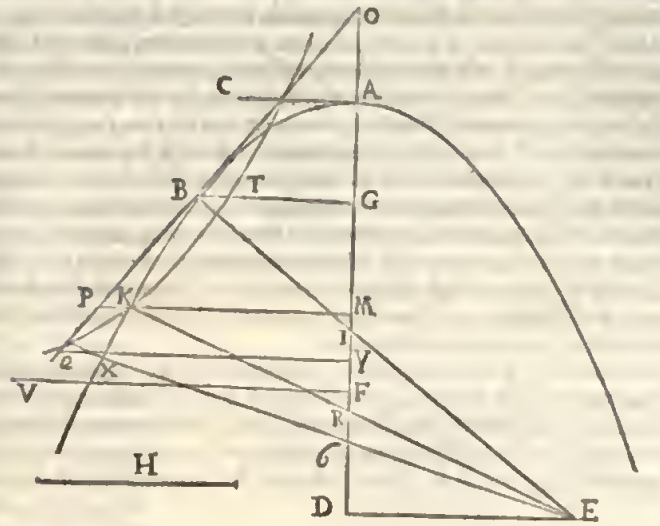
Itaque K M in M F minus eſt, quàm B G in G F, &c. *Quoniam prima B G ad ſecundam K M maiorem proportionem habet, quàm tertia M F ad quartam F G; ergo ex lemmate quinto huius libri rectangulum ſub intermedijs contentum K M F minus erit rectangulo B G F ſub extremis cõtento; poſtea, quia H ad B G ex hypotheſi erat, vt G F ad F D, poſita autem fuit E D maior, quàm H, quæ eſt prima proportionalium; ergo E D ad B G maiorem proportionem habet, quàm G F ad F D, & propterea rectangulum ſub extremis E D F maius erit rectangulo ſub intermedijs contento B G F; fuit autem rectangulum B G F maius rectangulo K M F; igitur rectangulum E D F multò maius eſt, quàm rectangulum K M F, & ideo, ex eodem lemmate quinto, E D ad M K, nempe D R ad R M (propter ſimilitudinem triangulorum E D R, & K M R) maiorem rationem habet, quàm M F ad F D.* d

Lem. 5.

Et componendo patet, quod D F, &c. *Quoniam D R ad R M maiorem rationem habet, quàm M F ad F D, componendo D M ad M R habebit maiorem proportionem, quàm eadem M D ad D F, & propterea D F maior eſt, quàm R M, eſt verò ſemiſis erecti A C æqualis D F ex conſtructione, igitur M R minor eſt A C medietate lateris recti, & propterea breuiſſima educta ex K ſecat ex axi ſegmentum maius, quàm M R; ideoque cadit extra, ſcilicet infra ramum K R E.* e

8. huius.

Et



f Et ſimili modo conſtat, quod breuiſſima egrediens ex puncto L. cadit extra S L, &c. *Ad vitandam confuſionem figuræ, & prolixitatem demonſtrationis appoſui duas figuras, in quibus duo caſus ijſdem caracteribus notantur, itaque abſq; nouo labore, ſi inſpiciatur ſecunda figura, ijſdem verbis prioris caſus, oſtendetur caſus ſecundus.*

g Pariter demonſtrabitur, quemadmodum iam oſtenſum eſt, &c. *Pars ſecunda huius propoſitionis innititur tantummodo pauciſsimis verbis; quare maioris claritatis gratia integram demonſtrationem hic afferre libuit.*

Demonſtratio ſecundæ partis.

PROPOSITIONIS LI.

Eſto E D æqualis trutinæ H: Dico ex concurſu E vnicum tantùm breuiſecantem ramum duci poſſe.

In eadem figura, quia ex conſtructione H ad B G eſt, vt G F ad F D, ponitur verò E D æqualis H; ergo E D ad B G, ſeu D I ad I G (propter ſimilitudinem triangulorum E D I, B G I) eſt, vt G F ad F D, & componendo D G ad G I eſt, vt eadem G D ad D F; ideoque I G æqualis eſt D F, ſeu A C ſemirecto; igitur B I eſt breuiſſima. 8. huius.

Poſtea ducto quolibet ramo E K ſupra breuiſecantem E B (in prima figura, & infra in ſecunda) occurrente axi in R, & ducta K M perpendiculari ad axim, quæ cum ſecet in M, & tangentem O B in P. Quoniam (vt dictum eſt) O F ſecatur biſariam

in G, & non bifariam in M, ergo (ex lemmate ſexto huius libri) G O ad O M, ſeu G B ad P M (propter ſimilitudinem triangulorum B G O, & P M O) & multo magis G B ad illius portionem K M habebit maiorem proportionem, quàm M F, ad F G; ideoque rectangulum K M F ſub intermedijs contentum minus erit rectangulo B G F contento ſub extremis nõ proportionalium; ſed rectangulum B G F æquale eſt rectangulo E D F (propterea quod D F, ad F G erat, vt B G ad H, ſeu ad ei æqualem E D) igitur rectangulum K M F minus erit rectangulo E D F, & propterea E D ad K M, ſeu D R ad R M (propter ſimilitudinem triangulorum E D R, K M R) maiorem rationem habebit, quàm M F ad F D, & componendo, eadem D M maiorem rationem habebit ad R M, quàm ad F D, & propterea R M minor erit, quàm F D, ſeu quàm A C; igitur minimus ramorum ex K ad axim cadentium ſertur infra K R; Quapropter ramus E K ſupra, vel infra breuiſecantem E B ad ſectionem ductus non eſt breuiſecans, & abſcindit ex axi ſegmentum A R minus, quàm abſcindat breuiſſima ex K ad axim ducta, quod erat oſtendendum.

Lem. 5. præmiſ.

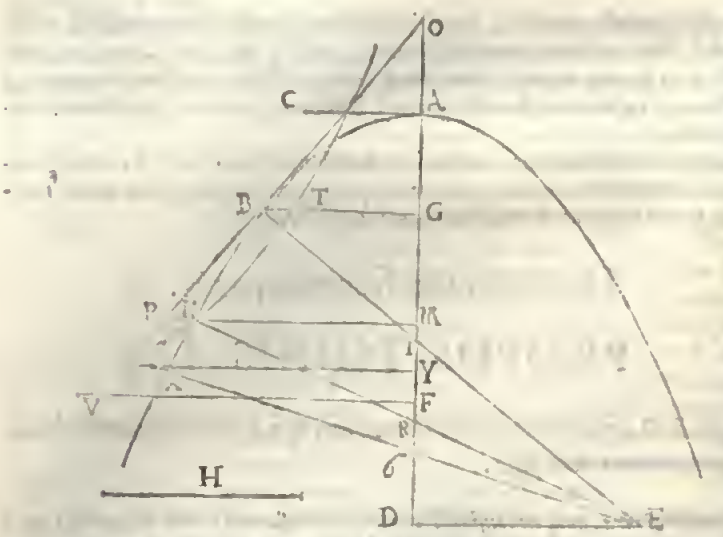
Lem. 5. præmiſ.

ex 8. 13. huius.

Tertio loco ſit E D minor, quàm H, & oſtendetur, &c. *Quia H ad B G eſt, vt G F ad F D, eſtque E D minor, quàm H; ergo E D ad B G minorem proportionem habet, quàm G F ad F D; & ideo rectangulum E D F ſub extremis contentum minus eſt rectangulo B G F, quod ſub intermedijs continetur; ponatur iam rectangulum T G F æquale rectangulo E D F, & per F ducatur F V perpendicularis ſuper axim A D,*

h

Lem. 5. præmiſ.



Et componendo, patet, quod D F eſt æqualis R M, &c. *Nam D R ad R M eſt, vt M F ad F D, & componendo, eadem D M ad R M, atque ad D F, ſeu ad ſemirectum A C eandem proportionem habebit, & ideo D F eſt æqualis R M.*

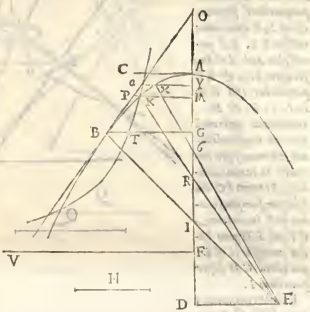
i

Et

k Et similiter patebit, quod LS sit breuissima, &c. *Secundus casus absque vllo labore ostensus erit iisdem verbis, & caracteribus, quibus casus primus expositus fuit, si inspicatur secunda figura.*

l Et cum BI intercipiatur inter illas patebit etiam, &c. *Et cum BI intercipiatur inter duos ramos breuiscecantes EK, qui ducuntur ex punctis K, in quibus hyperbole KTL secat parabolen ABL, cadet punctum T hyperboles intra parabolen; quare rectangulum BGF maius erit rectangulo TGF, seu KMF, quod aequale est rectangulo EDF, vt dictum est, quare ED ad BG, seu DI ad IG (propter similitudinem triangulorum EDI, BGI) habebit minorem proportionem, quàm GF ad FD, & componendo, eadem DG ad GI minorem proportionem habebit, quàm ad FD, siue ad AC, & ideo IG maior erit, quàm AC.* Lem. 5. præmil.

m Deinde ex concursu E ad sectionem, &c. *Deinde ex concursu E ad sectionem AB parabolen educantur duo rami EX supra breuiscecantem EK in prima figura, & infra eamdem in figura secunda, & ex punctis X ducantur duæ XY perpendiculares ad axim, secantes axim in Y, & hyperbolen KT in a existente extra parabolen; cumque duæ rectæ a Y, necnõ TG parallelæ sint cõtinenti FV, & interponãtur inter hyperbolẽ KT, & reliquã continentem FA erit rectangulum a Y F aequale rectangulo TGF, quod factum est aequale rectangulo EDF, estque XY portio ipsius aY; igitur rectangulum EDF maius erit rectangulo XYF, & ideo ED ad XY, seu Db, ad bY (propter similitudinem triangulorum EDb, XYb) maiorem rationem habet, quàm YF ad FD, & componendo eadem DY ad Yb maiorem proportionem habebit, quàm ad DF, seu CA.*



12. lib. 2. Lem. 5. præmil.

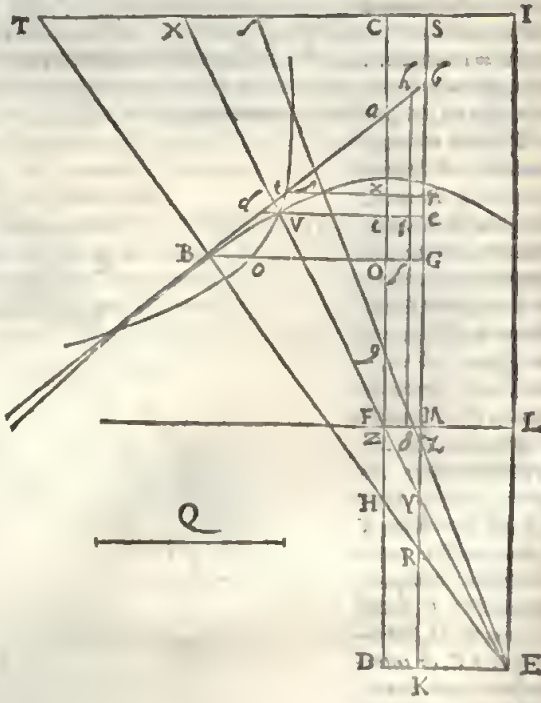
n Simili modo demonstrabitur, &c. *Absque noua demonstratione propositum ostendetur inspiciendo secundam figuram.*

Notæ in Propos. LII. LIII.

a Dico, quod rami egredientes ex E habent superiùs expositas proprietates, &c. *Idest eosdem, quas habent rami in parabola educti iuxta comparationem perpendicularis ED ad Trutinam.*

Et

Et ponamus quamlibet duarum proportionum CF ad FD, & IS ad SC, b
vt proportio figuræ, & educamus ex E, S, &c. *Ideſt fiat diſtantia ex centro vſque ad perpendicularem E D ad eius portionem D F in hyperbola, vt ſumma lateris tranſuerſi, & recti ad latus rectum, & vt eorum differentia in ellipſi ad latus rectum ita fiat C D ad eius productionem D F; tunc enim C F ad F D diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipſi habebit eandem proportionem, quàm latus tranſuerſum ad rectum; pariterq; fiat E K ad K D in eadē proportione figura, & ex E, K educamus rectas E I, K S parallelas axi A C D, ſecantes I C, & L F parallelas ipſi E D in I, S, L, & M. Immutauī poſtremā partem conſtructionis, vt manifeſte erroneā in textu Arabico; Si enim I C ad libitum ſumpta ſecatur in S in ratione C F ad F D non eadet neceſſariò E L parallela C D ſuper punctum I.*



Et interponamus inter F C, C A duas C N, C O proportionales illis duabus, &c. *Textum corruptum ſic reſtituo: Interponamus inter F C, & A C duas medias proportionales, itaut F C, N C, C O, C A ſint continuè proportionales, quod fieri poſſe conſtat ex lemmate 7. huius libri.* c

Et ponamus proportionem lineæ alicuius, vt eſt Q compoſitam, &c. *Vocatur Trutina in hyperbola, & ellipſi linea recta Q, qua ad B O compoſitam proportionem habet ex C D ad D F, & ex ratione F O ad O C.* d

Producatur priùs E B ſecans axim in H, &c. *Producatur priùs E B ſecans axim in H, & rectam S K in R, nec non rectam I C in puncto T.* e

Ergo E D ad B O, quæ componitur ex E D ad D K, &c. *Nam poſita intermedia D K, proportio E D ad B O compoſita erit ex ratione E D ad D K, & ex ratione D K ad B O; eſt verò I C ad C S, vt E D ad D K (propter parallelas I E, S K, C D) atque D K eſt æqualis G O in parallelogrammo G D; ergo proportio E D ad B O componitur ex ratione I C ad C S, & ex ratione G O ad O B.* f

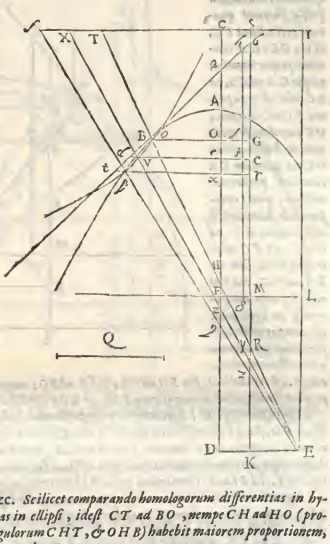
Sed E D ad D K eſt, vt C D ad D F, quia quælibet earum vt proportio g

figuræ

figuræ compositæ, vel diuisæ, &c. *Quia E K ad K D, atque C F ad F D eandem proportionem habebant, quàm latus transuersum ad rectum; ergo componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi erit E D ad D K, vt C D ad D F.*

h Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet rectangulũ F G adatur in hyperbola, & auferatur cõmuniter in ellipsi.*

i Et propterea E K ad B G, nempe K R ad R G, &c. *Quia propter similitudinem triangulorum E K R, & B G R erit E K ad B G, vt K R ad R G; quare K R ad R G maiorem proportionẽ habet, quàm G M ad M K; & componendo K G ad G R maiorem rationem habet, quam eadem G K ad K M, quare K M, nempe C L aqualis D F maior est, quàm G R.*



k Et auferẽdo homologũ ab homologo in hyperbola, & coniungendo e a in ellipsi, habebit, &c. *Scilicet comparando homologorum differentias in hyperbola, eorundem summas in ellipsi; ideſt C T ad B O, nempe C H ad H O (propter similitudinem triangulorum C H T, & O H B) habebit maiorem proportionem, quàm I C ad C S, nempe C D ad D F.* Lem. 4. præmiſ.

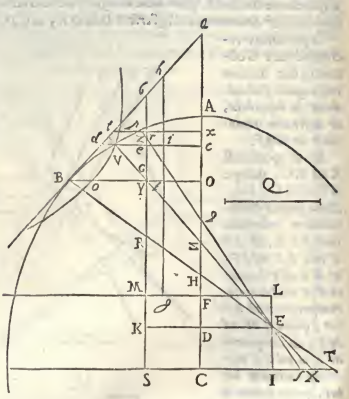
l Postea educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, &c. *Educamus ex E lineam occurrentem sectioni in V, quæ secet axim in Z, & S M in Y.*

m Et per f producamus f g h parallelam axi A D, &c. *Et per f ducamus f g parallelam axi A D, quæ secet tangentem B a in h, & L F in g, atque V c secet illam in i, & S M in c.*

n Et ponamus rectangulum F f communiter, &c. *Et communiter addamus in hyperbola, & auferamus in ellipsi rectangulum F f, fiet rectangulum B f g aquale rectangulo g F C. Nomina Inuersi, & Trutinatæ definita fuerunt in primo libro ab interprete Arabico.*

Igitur

Igitur C a est linea quinta proportionalis aliarum quatuor, &c. *Quia positæ fuerunt quatuor rectæ lineæ F C, N C, O C, C A continuè proportionales, estque C A ad C a, vt* 37. lib. 1. *O C ad C A; ergò prima F C ad tertiam O C eamdem proportionem habet, quàm O C ad quintam C a continuè proportionalium, quare comparando homologorũ* Lem. 4. præmiss. *differentias F O ad O a est, vt F C ad C O; sed factæ fuit vt F O, ad O C, ita f O ad O B; ergo componendo in hyperbola, & comparando differentias terminorũ* Lem. 2. præm. *ad consequentes in ellipsi, est F C ad C O, seu f O ad O a, vt f B ad B O; nempe vt* f h *ad eandem* O a, *propter similitudinẽ triangulorum B* f h, *&* B O a; *& ideo F O, &* f h *æquales sunt.*



Et propterea *f i* ad *i h* maiorem proportionem habet, quàm ad *f g*, &c. p *Quia F O, seu* g f *ostensa fuit æqualis* f h *erit* g h *sectæ bifariam in* f, *& non bifariam in* i *propterea (ex lemmate sexto huius lib.) habebit* f h *ad* i h, *scilicet B f ad* d i *(propter similitudinem triangulorum B* f h, d i h) *maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *sed B f ad V* i *portionem ipsius* d i *habet maiorem proportionem, quàm ad* d i; *ergo B f ad V* i *habet maiorem proportionem, quàm* i g *ad* g f, *ergo rectangulum B f* g, *nempe rectangulum* g C *(quod est ostensum ei æquale) maius est rectangulo V* i g.

Lem. 3. In nota literę n præm.

Et ponamus rectangulum g e commune, &c. *Et addamus in hyperbola, &* q *auferamus in ellipsi rectangulum* g e *communiter.*

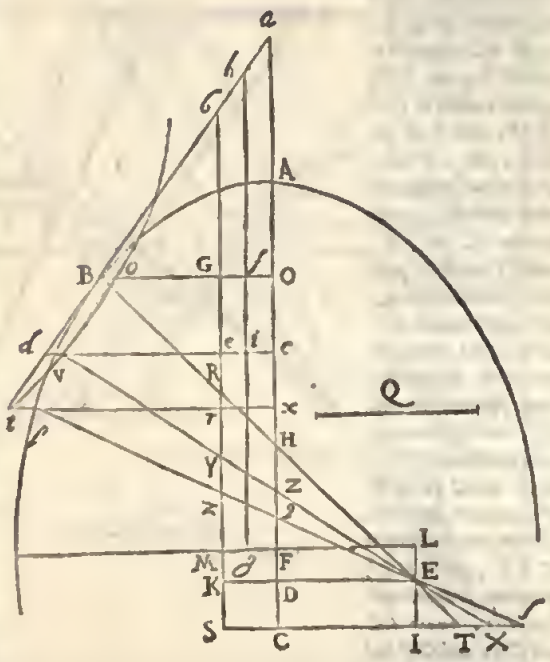
Et propterea E K ad e V, nempe K ad Y e, &c. *Sunt enim triangula E K Y,* r *& V e Y similia, ergo E K ad e V est, vt K Y ad Y e, quarè K Y ad Y e maiorem proportionem habet, quàm* e *M ad M K, & componendo, eadem K e maiorem proportionem habet ad e Y, quàm ad M K, seu ad F D; vnde patet, quod e Y minor sit, quam F D.*

Et constat quemadmodum antea demonstrauimus, &c. *Quoniam e Y mi-* s *nor ostensa est, quam K M ergo eadem E I ad Y e, seu I X ad V e (propter similitudinem triangulorum E I X, Y e V) maiorem proportionem habebit, quàm E I ad M K, seu I C ad C S, vel adei æqualem* e e; *igitur comparando homologorum sum-*

mas

mas in ellipſi, & eorundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel (propter ſimilitudinem triãgulorum X C Z, V c Z) C Z ad Z c maiorem proportionem habet, quàm I C ad C S, vel C D ad D F; & componendo in ellipſi, & dividendo in hyperbola C c ad c Z maiorẽ proportionem habebit, quàm C F ad F D, & ideo breuiſſima egrediens ex V abſcindit lineã maiorem, quàm A Z.

Lem. 4.



9. 10. huius.

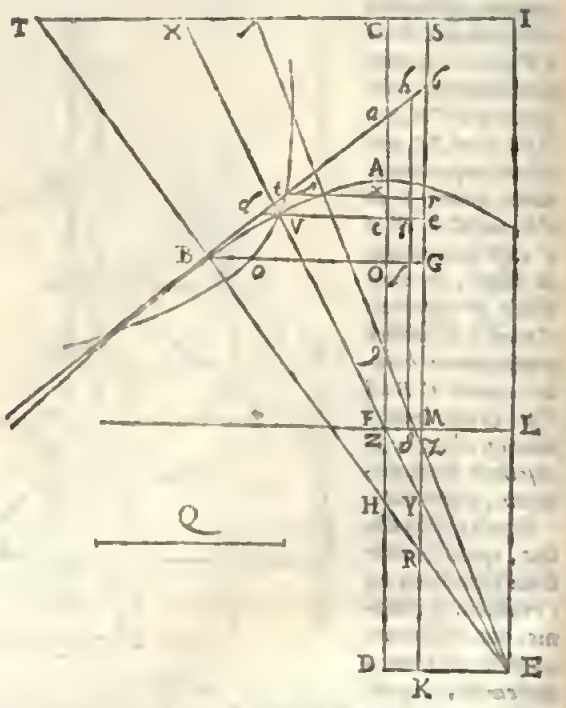
Simili modo cõſtat, quod breuiſſima egrediens ex *l* eiuſdem ſit rationis, &c. *Abſque noua demonſtratione in ſecunda, & quarta figura propoſitum oſtenſum erit.*

t

a Deinde ſit E D æqualis Q, inde demonſtrabitur (quemadmodum ſupra factum eſt) quod B H tantum ſit linea breuiſſima, &c.

Secunda pars huius propoſitionis, quam Apollonius non expoſuit hac ratione ſuppleri poteſt.

Sit E D aqualis Trutinæ Q, habebunt E D, atque Q eandem proportionem ad B O, componitur verò proportio E D ad B O ex rationibus E D ad D K, & D K ad B O, ſeu O G ad B O; componebatur autem proportio Trutinæ Q ad B O ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C; ergo ablata communiter proportione E D ad D K, vel C D ad D F, relinquetur proportio G O ad O B eadem proportioni F O ad O C; ergo rectangulum G D C ſub extremis contentum æquale erit rectangulo B O F ſub intermedijs comprehenſo, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipſi communiter rectangulum F G, erit rectangulum F S æquale rectangulo B G M; Et quia I S ad S C, vel E K ad K D, vel ad F M erat, vt C F ad F D, vel vt S M ad M K; ergo rectangulum E M æquale eſt rectangulo F S; & propterea rectangulum E M æquale erit rectangulo B G M; quapropter vt E K ad B G, ſeu K R ad R G, ita erit G M ad M K, & componendo, eadem



KG eandem proportionem habebit ad RG, atque ad MK, vnde RG aqualis erit MK, vel FD, quare eadem EI ad KM, vel CD ad DF, siue IC ad CS eandem proportionem habebit, quam eadem EI ad RG, vel IT ad BG (propter similitudinem triangulorum IET, & GRB) ergo comparando homologorum summas in ellipsi, vel differentias in hyperbola CT ad BO, vel CH ad HO (propter similitudinem triangulorum CHT, & OHB) eandem proportionẽ habebit, quàm IC ad CS, vel CD ad DF, & diuidendo in hyperbola, & eõponendo in ellipsi CO ad OH eandem proportionem habebit, quàm CF ad FD,

Lem. 4.

9. 10. huius.

siue quàm habet latus transuersum ad rectum; & propterea BH est breuissima linearum ex B ad axim cadentium.

Deinde educatur quilibet ramus EV supra, vel infra breuisecantem EB, qui productus secet rectam IC in X, & CA in Z, atque SM in Y, & educatur ex V recta Vc perpendicularis ad axim, secans DF in c, & SM in e, atque contingentem sectionem in puncto B, scilicet ipsam Ba secet in d. Et quia (vt modo ostensum est) rectangulum FS aquale est rectangulo BGM, sunt que pariter ostensa OC, AC, Ca proportionales; ergo Ca est quinta proportionalis post quatuor precedentes FC, NC, OC, AC continuè proportionales; & ideo FC ad CO est, vt CO ad Ca; ergo comparando homologorum differentias tam in hyperbola, quàm in ellipsi erit, FO ad Oa, vt FC ad CO: est autem GB ad BO, vt FC ad CO, vt antea ostensum est; ergo GB ad BO erit, vt FO ad Oa; sed propter similitudinem triangulorum BGb, BOa est GB ad BO, vt Gb ad Oa; ergo FO, siu MG ad Oa eandem proportionem habet, quàm Gb ad eandem Oa; & propterea MG aqualis est Gb; eumque Mb secetur aqualiter in G, & inaqualiter in e (ex lemmate 6. huius) Gb ad eb, seu BG, ad de, propter similitudinem triangulorum BGb, & BOa, & multo magis BG ad Ve portionem ipsius de habebit maiorem proportionem, quàm eM ad GM; ergo rectangulum

Lem. 3.

BGM

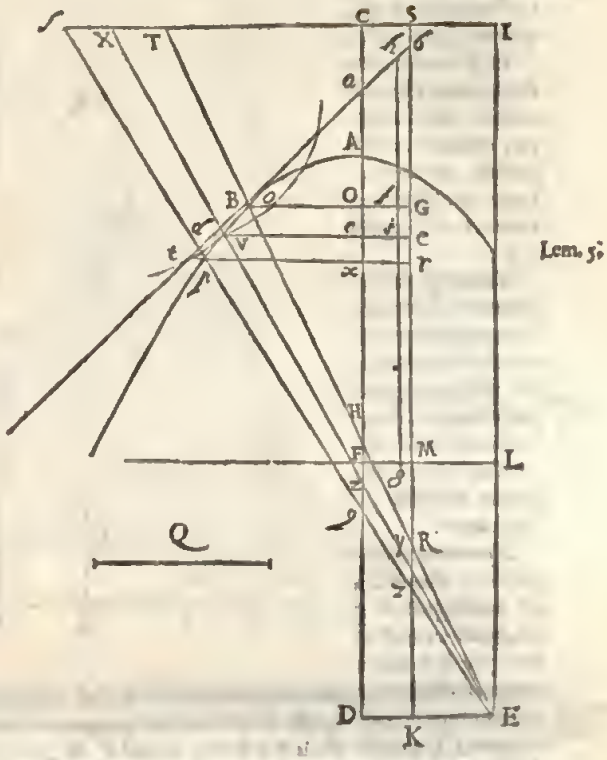
BGM sub extremis cõtentum maius erit rectãgulo V c M sub medijs comprahenso; erat autem prius rectangulum B G M aquale rectangulo E M; ergo rectangulũ E M maius est rectangulo V c M, & propterea E K ad V c, seu K Y ad Y c (propter similitudinem triangulorum E Y K, & V c Y) maiorem proportionem habebit, quàm c M ad M K, & componendo, eadem K c ad Y c maiorem proportionem habebit, quàm ad M K; ergo Y c minor est, quàm M K, quare E I ad Y c, seu I X ad c V (propter similitudinem triangulorum I E X, c Y V) habebit maiorem proportionem, quàm eadem E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad c e; & propterea comparando homologorum summas in ellipsi, & earundem differentias in hyperbola C X ad c V, vel C Z ad Z c (propter similitudinem triangulorum C Z X, V c Z) maiorem proportionem habebit, quàm S K, ad K M, seu C D ad D F, & dividendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C c ad c Z habebit maiorem proportionem, quàm C F ad F D, seu quàm latus transuersum ad rectum, & propterea breuissima linearum cadentium ex puncto V ad axim abscindet segmentum maius, quàm A Z, & ramus E V non erit breuisecans, quod fuerat ostendendum.

Lem. 5.

Lem. 5.

Lem. 4.

ex 9. 10. huius.



b Et demonstrabitur, quemadmodum dictum est, quod G O ad B O minorem proportionem habet, quàm F O ad O C, &c. *Nam proportio E D ad B O componitur ex rationibus E D ad D K, & D K, seu G O ad B O. Pariterque proportio Trutinæ Q, quæ erat maior quàm E D ad B O componitur ex rationibus C D ad D F, & F O ad O C, auferatur communis proportio E D ad D K, vel C D ad D F, remanet proportio G O ad O B minor proportione F O ad O C.*

c Et producamus ex V, *l* duas perpendiculares V e, *l* P, quæ, &c. *Et producamus ex V, & V duas perpendiculares V c, quæ parallela sint continenti F M, & secent reliquas lineas in signis antea expositis; Rectangulum ergo V c*

in c M *æquale est rectangulo* V c M, *alterius figuræ, &c.*

Et ponamus rectangulum F G cõmune, &c. *Scilicet, addatur in hyperbola, & auferatur in ellipsi communiter rectangulũ F G.*

Tandem prosequamur superiorẽ demonstrationem, vt ostendatur veritas reliquarũ propositionum, &c.

Demonstratio ab Apollonio breuitatis gratia neglecta sic perficietur.

Quoniam rectãgulum E M æquale est rectangulo V c M, igitur vt E K ad V c, seu K Y ad Y c (propter similitudinem triangulorum E K Y, & V c Y) ita erit c M *ad M K, & componendo, eadem* c K *habebit ad* c Y, *atque ad M K eandem proportionem, ideoque* c Y *æqualis est M K; quare E I ad K M, seu I C ad C S eandem proportionem habebit, quàm E I ad* c Y, *seu quàm I X ad* c V *(propter similitudinem triangulorum I E X, & c T V) quare comparando homologorum differentias*

Lem. 3. *in hyperbola, & eorundem summas in ellipsi C X ad* c V, *vel C Z ad Z* c *(propter similitudinem triangulorum C Z X, c Z V) habebit eandem proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C c ad* c Z *eandem proportionem habebit, quàm C F ad F D, seu quàm habet latus*

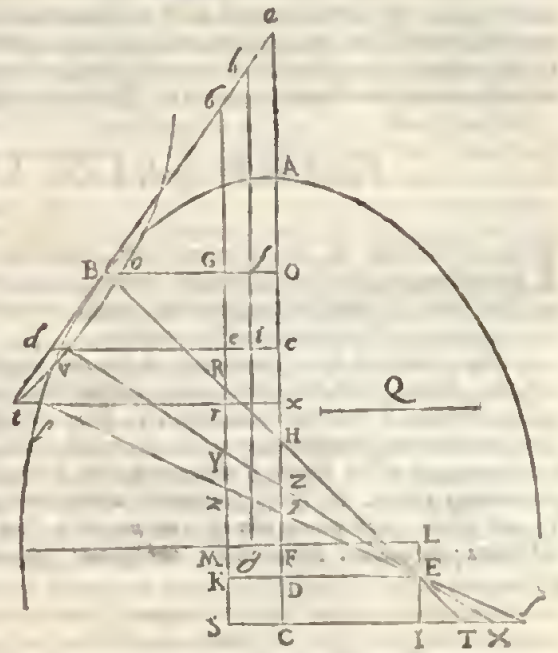
9. 10. huius. *transuersum ad rectum, & propterea recta linea V Z est breuissima omnium, quæ ex V ad axim A D duci possunt.*

Iisdem prorsus verbis ostensum erit, quod recta linea l m *sit breuissima omnium cadentium ex puncto* l *ad axim, si nimirum apponãtur caracteres prioris casus, vt patet in secunda, & quarta figura.*

Iisdem positis ostendendum est, ramum B E, interceptum inter duos breuissecantes E V, non esse breuisecantem, atque lineam breuissimam ex B ad axim A D extensam cadere supra ramum B E versus verticem A.

Quoniam rectangulum B G M maius est rectangulo o G M, *atque ostensum fuit rectangulum E M æquale rectangulo* o G M; *ergo rectangulum B G M maius est*

Lem. 5. *rectangulo E M, & propterea E K ad B G, seu K R ad R G (propter similitudinem triangulorum) minorem proportionem habet, quàm G M ad M K, & componendo*



ponendo eadem K G ad G R minorẽ proportionem habebit, quã ad K M, & propterea G R maior erit, quàm K M, vnde E I ad G R, seu I T ad G B (propter similitudinem triangulorum E I T, R G B) minorem proportionem habet, quàm E I ad K M, seu I C ad C S; & ideo comparando homologorũ summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C T ad O B, siue C H ad H O (propter similitudinem triangulorũ) habebit minorẽ proportionem, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi C O ad O H habebit minorem proportionem, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum habet ad rectum; ergo breuissima ex B ad axim ducta eum secat supra punctum H, & abscindit lineam minorem, quàm A H. Lem. 4. Ex 9. 10. huius.

Rursus ijsdem positis, ostendendum est, ramum E p cadentem supra ramum E V versus verticem, vel infra infimum breuisecantem E V non esse breuisecantem, & abscindere ex axi minorem lineam, quàm abscindit breuissima ex puncto p ad axim ducta. Ducatur ex p recta linea p x perpendicularis ad axim, eum secans in x, & secans S M in r, & hyperbolen V o in τ, pariterque ramus E p secet S M in z, & A F in q, atque I C in ſ. Quoniam hyperbole V o secat coniectionem A B in V, & p ponitur supra V ad partes A; ergo τ cadit extra sectionem A B, & propterea τ r maior erit, quàm p r; vnde rectangulum p r M minus erit rectangulo τ r M; sed propter asymptotos S M, M F est rectangulum τ r M aquale rectangulo o G M, seu rectangulo E M, vt dictum est; ergo rectangulum p r M minus est rectangulo E K M, & propterea E K ad p r, seu K z ad z r (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habet, quàm r M ad M K, & componendo, eadẽ K r ad r z maiorẽ proportionẽ habet, quàm ad M K; ergo r z minor est, quàm M K; ideoque E I ad r z, seu I ſ ad r p (propter similitudinem triangulorum E I ſ, & r p z) maiorem proportionem habet, quàm E I ad M K, seu I C ad C S, vel ad r x; ergo comparando homologorum summas in ellipsi, & eorundem differentias in hyperbola C ſ ad x p, 12. lib. 2. Lem. 5. Lem. 4.

sine

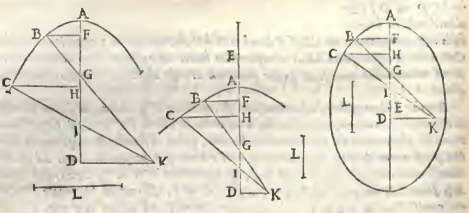
siue C q ad q x (propter similitudinem triangulorum) maiorem proportionem habebit, quàm I C ad C S, vel C D ad D F, & diuidendo in hyperbola, & componendo in ellipsi, C x ad x q maiorem proportionem habebit, quàm C F ad F D, siue quàm latus transuersum ad rectum, quapropter breuissima ex p ad axim ducta secat maiorem lineam, quàm A q. Quæ omnia ostendenda fuerant.

Ex 9. 10. huius.

Notæ in Propos. LIV. LV.

ITaque ostensum est, vti memorauimus, quod ex concursu duarum breuissimarum ad illam sectionem non egrediatur alia breuisecans præter illas duas, & quod reliqui rami ex eorum concursu educti ad sectionem habent proprietates superius expositas. a

Sensum germanum huius confectarij, in quo duæ propositiones Apollonij continentur, non est facile diuinare in tanta Apollonij breuitate, & textus Arabici insigni corruptione; videtur enim recensere, & recolligere conclusionem quamdam præcedentium propositionum: at hoc fieri nullo modo debebat in duabus propositionibus 44. & 45. Rursus si theoremata sunt, demonstrari non poterant ante propositiones 51. 52. 53; sed forsan numeri Arabici non 44. & 45; sed 54. & 55. esse debent, quod mirum non est, cum numeri passim in hoc codice Arabico deformati reperiantur. Itaque in hac ambiguitate suspicor, textum sic restitui posse.



PROP. 5. Addit. *Si in coniectione duæ breuisecantes ductæ fuerint ab eorum concursu, nullus alius ramus ductus erit breuisecans: Et ramorum ab eodem concursu extensorum, qui inter breuisecantes intercipiuntur, abscindunt axis segmenta maiora, & qui non intercipiuntur, minora, quàm abscindant lineæ breuissimæ ab eorum terminis ad axim ductæ: oportet autem in ellipsi, vt duo rami, & perpendicularis cadant inter axis maioris verticem, & centrum sectionis.*

Sit

Sit coniſectio A B C, cuius axis A D, & in hyperbola, & ellipſi centrum E; & ſumantur qualibet duo puncta B, & C, qua in ellipſi ſint in eodem eius quadrante, & ducantur B F, C H perpendiculares ad axim, & in parabola ſiant F G, & H I aquales ſemiſsi lateris recti; at in hyperbola, & ellipſi ſiat E F ad F G, nec non E H ad H I, vt latus tranſuerſum ad rectum, coniungantur q; recta B G, & C I. Manifeſtum eſt B G, & C I eſſe lineas breuiſsimas, qua ſi producantur vltra axim (ex 28. propoſitione huius libri) conuenient alicubi, vt in K. Dico, quod ex concurſu K nullus alius ramus breuiſecans duci poteſt ad ſectionem A B C. Extendatur ex K ſuper axim A D perpendicularis K D, & reperiatur ſectionis Trutina L competens menſura A D ipſius concurſus K, vt in propoſitionibus 51. & 52. præcipitur. Et certè perpendicularis K D non erit maior, quàm L, aliàs duci non poſſet ramus vllus breuiſecans ex concurſu K ad ſectionem A B C, quod eſt falſum; facta enim fuerunt K B, & K C breuiſecantes; Similiter K D non erit aqualis Trutina L, quandoquidem tunc vnica tantummodo breuiſecans ex K ad ſectionem A B C duci poſſet, quod rurſus falſum eſt, poſita enim fuerunt dua breuiſecantes; igitur perpendicularis K D neceſſario minor erit Trutina L, & ideo ex concurſu K dua tantummodo breuiſecantes ad ſectionem A B C duci poſſunt, qua ſunt B K, C K; & propterea nullus alius ramus breuiſecans ex concurſu K ad ſectionem A B C duci poteſt prater duos K B, & K C; quod erat primo loco oſtendendum.

8. 9. 10. huius.

51. 52. huius.

51. 52. huius.

51. 52. huius.

Secundo ijſdem poſitis, dico, quod rami ducti inter K B, & K C cadunt infra lineas breuiſsimas ab eorum terminis ad axim ductas, & quod rami producti ex K ſupra breuiſecantem K B verſus A verticem ſectionis, vel infra ramum breuiſecantem K C abſcindunt axis ſegmenta ex vertice minora, quàm abſcindant linea breuiſsima ab eorum terminis ad axim ducta. Reperiatur denuo Trutina L, oſtendetur, vt prius perpendicularis K D minor, quàm L, & dua tantummodo breuiſecantes K B, & K C; quare quilibet ramus ex K ad ſectionis punctum, inter B, C poſitum extenſus, ſecat ſegmentum axis ex vertice A maius quàm abſcindat linea breuiſsima ab eius termino ad axim ducta: pariterque quilibet ramus ex K ad punctum ſectionis ſupra B, poſitum, vel infra ramum K C extenſus, abſcindet ſegmentum axis ex A minus, quàm ſecet linea breuiſsima ab eius termino ad axim ducta; quod erat oſtendendum.

Notæ in Propoſit. LVI.

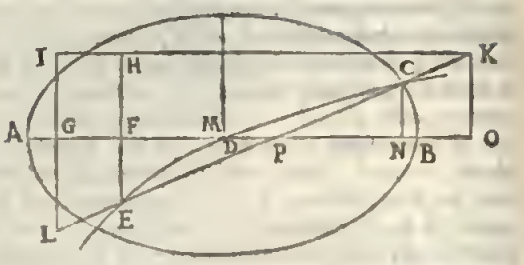
a REperitur quidem in ramis aggregati ſecantis bifariam inclinatum, ſuper quod non cadit perpendicularis, breuiſecans vna tantum, quomodocumque ſe habeant perpendicularis, & menſura, &c.

Senſum huius propoſitionis nec Apollonius quidem ſi reuiuiſceret inſigni barbarie corruptum perciperet, ceenſeo tamen, ſic reſtitui debere.

In ellipſi ramorum ſecantium vtrumque axim à concurſu vltra centrum poſito egredientium, vnius tantùm portio inter axim maiorem, & ſectionem intercepta erit linea breuiſsima, ſiue menſura ipſam comparatam, nec non perpendicularis ipſam Trutinam ſuperet, aquet, vel ab ea deficiat.

Sit

Sit ſectio ellipſis A C B tranſuerſa A B, &c. *Lego; Sit ſectio ellipſis A C B, & axis maior A B, centrum D, & perpendicularis E F ſecans axim in F inter centrũ ellipſis D, & verticem A,*



b

Et ducamus per punctum E ſectionẽ hyperbolicam E M C circa duas eius continentes, &c. *Ideſt circa duas asymptotos I L, I H per E deſcribatur hyperbole E M C, quæ ſecet axim A B aquidiſtantem alterè asymptoton in aliquo puncto vt in M; oſtendetur punctum M ſuper ellipſis centrum D cadere,*

c

12. & 13. lib. 2.

Ergo E H prima in proportione in I H ſubſequentem, nempe G F ſubſequens ipſam M G quartam, æquale eſt ſubſequenti D G ſecundæ in I G nempe F H tertiam. Ergo punctum N, &c. *Textus corruptus ſic reſtitui poſſe cenſeo; Ergo E H prima proportionalium in H I, nempe G F quartam æquale eſt D G ſecundæ in I G, nempe F H tertiam, &c. Propterea quod E H ad F H, atque D G ad G F poſita fuerunt, vt latus tranſuerſum ad rectum; ergo rectangulum ſub D G, & H F, ſeu I G, extremis quatuor proportionalium, æquale eſt rectangulo ſub intermedijs E H, & F G, ſeu H I, eſtque punctum E in hyperbola E M C cuius aſymptoti K I, L I; ergo punctum D in eadem hyperbola exiſtit; ſed erat prius in ellipſis diametro A B, ſcilicet in centro; quare in eorum communi ſectione exiſtet: erat autem punctum M communis ſectio hyperboles E C, & axis ellipſis A B; igitur puncta M, & D coincidunt, & hyperbole E D C tranſit per centrũ ſectionis ellipticæ A C B, & ideo hyperbole E D C, quæ in infinitũ extendi, & dilatari poteſt neceſſario ſecabit finitam ellipſim alicubi, vt in C.*

d

8. lib. 1.

Et producamus per E C lineam, &c, *Et producamus per E C rectam lineam, quæ occurrat continentibus in L, K, & ſecet axim ellipſis in P.*

e

Erit G F æqualis O N, quare F O, &c. *Quia duæ rectæ lineæ A O, L K ſecantur à parallelis I L, F E, G N, K O proportionaliter, & ſunt K C, L E æquales, ergo O N, F G inter ſe æquales erunt, & addita communiter N F erit F O æqualis N G; Et quoniam E H ad H F eſt vt E K ad K P (propter parallelas K I, O A) nempe vt F O, ſeu ei æqualis G N ad O P (propter parallelas E F, O K) ſed eandem proportionẽ habet D G ad G F, quàm E H ad H F; ergo G N ad O P eandem proportionem habet quàm D G ad G F, & comparando homologorum differentias D N ad N P erit vt D G ad G F, ſeu vt latus tranſuerſum ad rectum; & ideo C P eſt breuiſſima.*

f

8. lib. 2.

Lem. 3. 30. huius.

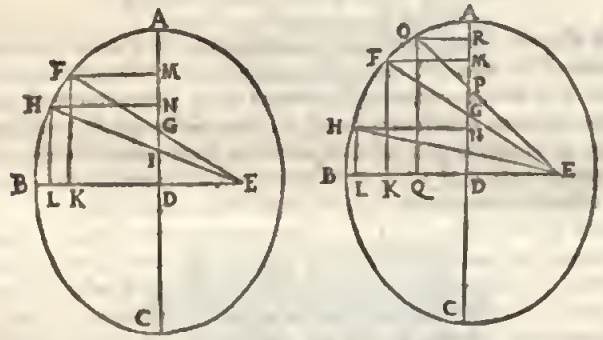
Quia in ſequenti propoſitione 37; & in alijs adhibetur propoſitio non adhuc demonſtrata; nimirum poſita C P linea breuiſſima, pariterque I D ſemiſsi axis recti minoris etiam breuiſſima (ex 11. huius) quæ occurrant vltra axim in M deducuntur ea omnia, quæ in propoſitionibus 31. & 32. ex hypotheſi omnino diuer-

no diuersa eliciebantur; nam in dictis propositionibus perpendicularis ex concursu ad axim ducta efficiebat in ellipsi mensuram (iuxta definitionem 15. huius libri) minorem medietate axis transuersi, ideſt perpendicularis ex concursu cadebat inter centrum sectionis, & proximiorem verticem: hic vero perpendicularis ex concursu M per centrum D ellipsis transit.

Animaduertendum est hoc theorema demonstratum fuisse ab Apollonio Propos. 35. huius libri, quod tamen paraphrastes nescio an iure in fine huius voluminis transposuit; Sed quia predicta propositio 35. omnino hic est necessaria, & pendet ex aliis precedentibus, libuit potius aliam independentem demonstrationem afferre quam ordinem propositionum satis alteratum denuo perturbare.

LEMMA VIII.

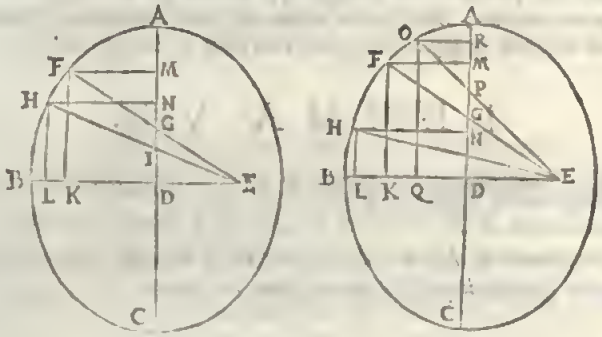
IN ellipsi ABC linea breuissima F G, & semiaxis minor rectus B D conueniant in E, erunt E F, & E B duæ breuisecantes, ducatur quilibet ramus E H inter eos: Dico E H non esse breuisecantem, & cadere infra lineam breuissimam ductam ex puncto H ad axim.



Ducantur ex F, & H rectæ F K, H L perpendiculares ad axim rectum B D eum secantes in K, & L, pariterque ducantur F M, H N perpendiculares ad axim transuersum A D eum secantes in M, N. Et quia F G est breuissima, ergo D M ad M G eandem proportionem habet, quàm latus transuersum C A ad eius 15. huius. *latus rectum; sed propter parallelas D E, M F, est D M ad M G, vt E F ad F G, seu E K ad K D (propter parallelas G D, F K) quare E K ad K D eandem proportionem habet, quàm latus transuersum ad rectum, & diuidendo E D ad D K eandem proportionem habebit, quàm differentia lateris tranuersi, & recti ad latus rectum, est vero D L maior, quàm D K (cum H L parallela ipsi F K cadat inter punctum K, & B) igitur E D ad maiorem D L minorem proportionem habet, quàm ad D K, & propterea componendo E L ad L D minorem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum: est vero E H ad H I, vt E L*

vt E L ad L D (propter parallelas I D, H L) pariterque D N ad N I eſt, vt E H ad H I (porpter parallelas E D, N H) quare D N ad N I erit vt E L ad L D, & propterea D N ad N I minorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum C A ad eius latus rectum, & ideo linea breuiſsima ex puncto H ad axim A D ducta cadet ſupra ramum H I E verſus verticem A, atq; E H non erit breuiſecans, quod erat primo loco oſtendendum.

10. huius.

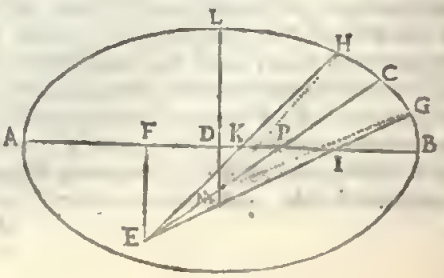


Secundo ducatur ramus E O ſecans maiorem axim in P inter verticem A, & breuiſecantem E F; Dico E O non eſſe breuiſecantem, & breuiſsimam ex puncto O ad axim A D ductam cadere infra ramum O P E; Ducantur O Q, O R perpendiculares ad axes, ſecantes eos in Q, R. Manifeſtum eſt Q D minorem eſſe, quàm K D, & propterea E D ad D Q maiorem proportionem habebit, quàm ad D K, & componendo E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm E K ad K D: oſtenſa autem fuit E K ad K D, vt latus tranſuerſum C A ad eius latus rectum; igitur E Q ad Q D maiorem proportionem habebit, quàm latus tranſuerſum ad rectum; ſed (propter parallelas P D, O Q) vt E Q ad Q D ita eſt E O ad O P, & propter parallelas E D, R O, vt E O ad O P, ita eſt D R ad R P; ergo D R ad R P eſt, vt E Q ad Q D, & propterea D R ad R P maiorem proportionem habebit, quàm latus tranuerſum C A ad eius latus rectum; igitur E O non erit breuiſecans, & breuiſsima ex puncto O ad axim ducta cadit infra ramum E O verſus D, quod erat oſtendendum.

ex 10. huius.

Notæ in Propoſ. LVII.

ET dico, quod non reperiatur vllus alius ramus, &c. *Ideſt ſit rurſus linea breuiſsima C M, qua producta concurrat cum perpendiculari E F in E, qua ſecet axim in F vltra centrum D ad partes verticis A. Dico, quod præter ramum*



mum EC nullus alius ramus breuiſecans ex concurſu E ad ſectionem duci poteſt, qui cadat in eodem quadrante BL, quem breuiſecans interſecat.

h Nam ſi producantur EH, EG, &c. *Ducantur quilibet rami EH, EG ad vtraſque partes breuiſecantis EC intra quadrantem BL, qui ſecent DB in K, & I, & producatur per centrum D recta MDL perpendicularis ad axim BA, quæ ſecet ſectionem in L, & ramum EC in M,*

i Et quia iam productæ ſunt ex concurſu M duæ breuiſecantes, &c. *Quia CM breuiſsima ex hypotheſi occurrit ſemiaxi minori recto LD breuiſsimæ pariter (ex 11. huius) in M, ſequitur (non quidem ex 51. 52. huius, ſed ex demmate 8. præmiſſo) quod linea recta ex M ad H coniuncta cadat infra breuiſsimam ex puncto H ad axim BA ductam, & coniuncta recta MG cadit ſupra breuiſsimam ex puncto G ad axim ductam.*

k Sed EH, & EG efficiunt abſciſſas oppoſito modo, &c. *Quia ab eodem puncto H ſectionis ducuntur tres rectæ lineæ HE, HM, & breuiſsima ex H ad axim BA ducta, quarum intermedia eſt HM, eo quod breuiſsima ex H ad axim AB cadit ſupra HM ad partes B, vt dictum eſt, & HE cadit* Lem. 8.
infra HM ad partes A; ergo HE cadit infra breuiſsimam ex H ad AB ductam, & propterea EH non erit breuiſecans:
Similiter breuiſsima ex G ad AB extenſa cadit infra Ibidem.
GM ad partes A, vt dictum eſt; at EG cadit
ſupra GM ad partes B; ergo EG cadit
ſupra breuiſsimam ex G ad axim
AB ductam, quare EG non
eſt breuiſecans.

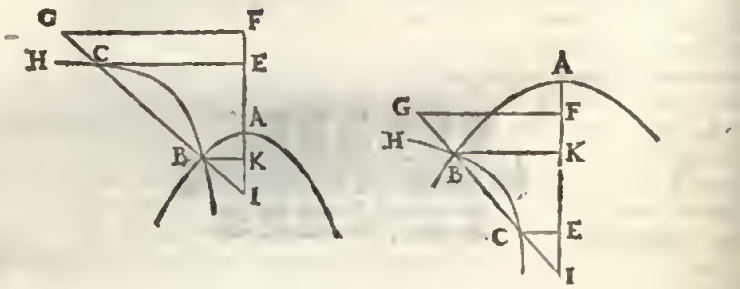
SECTIO NONA

Continens Propoſ. LVIII. LIX. LX. LXI. LXII. & LXIII.

IAm ex puncto dato C extra, vel intra ſectionem A B (quod in axi I A non ſit) poſſumus rectam lineam ducere, cuius portio intercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſſima. a

PROPOSITIO LVIII.

Sit ſectio parabole, & producamus perpendicularem C E ſuper I E A, & ponamus E F æqualem dimidio erecti, & ducamus G F parallelam ipſi C E, & per C ducamus hyperbolen H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurat ſectioni A B in B, & per B, C producatur linea occurrens continenti I A in I, & continenti G F in G: Dico, quod B I eſt linea breuiſsima. 4. lib. 2. b

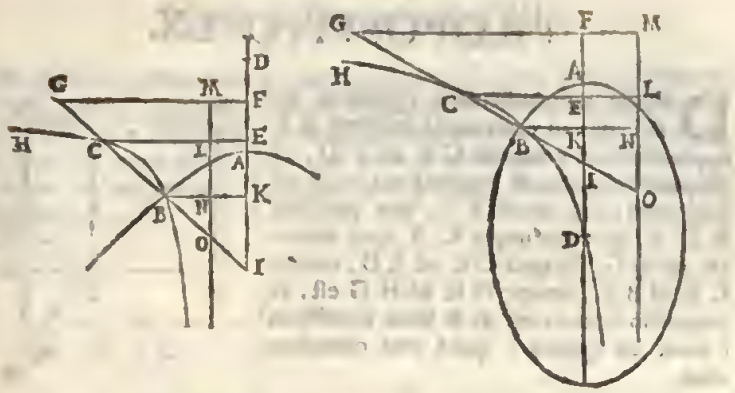


Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I æqualis eſt B G (ſexta ex ſecundo) erit E I æqualis K F, & E F, K I erunt æquales, atque ſuppoſita, eſt E F æqualis dimidio erecti; ergo K I ita eſt pariter; Quare B I eſt breuiſsima, (octaua ex quinto) & hoc erat probandum. 8. lib. 2. c

PROPOSITIO LIX. LXII. & LXIII.

DEinde ſit ſectio hyperbole, aut ellipſis, cuius centrum D, & lineis, atque ſignis in eodem ſtatu manentibus, ponamus D F ad F E, & a

ſimiliter



similiter C L ad L E; vt proportio figuræ, & produeamus per L ipſam O M parallelam A I F, & per F ipſam G M parallelam C E, & faciamus ſectionem H C B hyperbolen tranſeuntem per punctum C circa continentes G M, O M, quæ occurret ſectioni A B (in ellipſi quidem vt demonſtrauimus) in hyperbola vero eo quod O M parallela axi D A inclinato ſubtendit, ſi producatur, angulum ſubſequentem continentiæ angulum ſecabit A B, & eorda, ſi produeatur, occurret ſectioni; Ergo O M ingreditur ſectionem A B, & ampliatur ſectio A B per extenſionem longè à duabus lineis O M, M G, & ſectio B C prope illas ducitur (decimoſexta, ex ſecundo) igitur duæ ſectiones A B, C B ſibi occurrunt, vt in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem D F A in I, & G F in G; Et quia B O æqualis eſt ipſi C G (octaua ex ſecundo) erit O N æqualis ipſi M L, & O L ipſi N M; ergo O L, nempe N M, ſeu K F ad E I eſt, vt C L ad C E, nempe D F ad D E, ergo K F ad E I eſt, vt D F ad E D comparando homologorum ſummas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipſi, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, quæ eſt vt proportio figuræ; igitur B I eſt linea breuiſſima (9. 10. ex quinto) & hoc erat probandum.

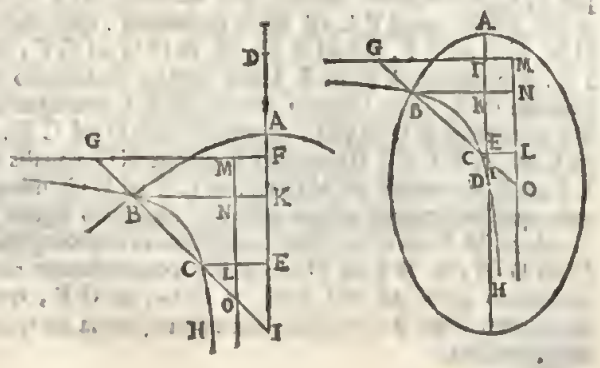
4. lib. 2.

56. huius.

14 lib. 2.

Lem. 3.

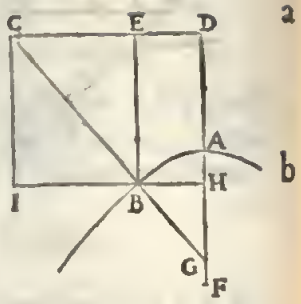
Lem. 1.



PROPOSITIO

PROPOSITIO LX.

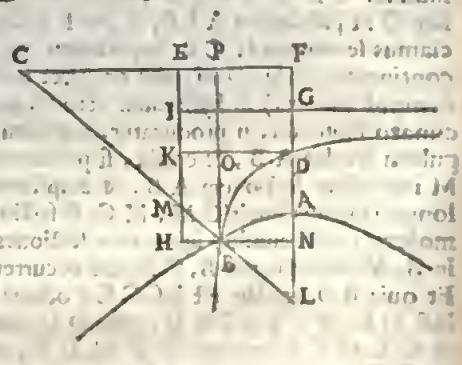
DEinde perpendicularis egrediens ex C eadat ad centrum D sectionis A B hyperboles, & ponamus C E ad E D, vt proportio figuræ, & producamus ex E ad sectionem rectã lineam E B, quæ parallela sit D E, producaturque C B, quæ occurrat axi in G. Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, nempe D H ad H G est, vt proportio figuræ; erit G B linea breuissima (nona ex quinto) quod erat ostendendum.



a
b

PROPOSITIO LXI.

SIt postea punctum C, & perpendicularis C F, & F remotius à vertice sectionis, quàm sit centrum, & ponamus C E ad E F, vt est proportio figuræ, & similiter D G ad G F, & ex E producamus E H, quæ sit parallelá ipsi F A, & ex G, D, ad illam G I, D K, quæ sint parallelæ ipsi C F; & ducamus sectionem hyperbolen transeuntem per D, quam contineant I H, I G, quæ occurret sectioni A B similiter in B; Itaque per B, C produeamus lineam, quæ occurrat axi F A in L, & ipsi E H in M. Dico, quod B L est linea breuissima. quia ducta perpendiculari H N, C E ad E F, seu ad K D, est vt D G ad G F, nempe vt K I ad I E, & propterea E C in E I erit æquale rectangulo D I subsequenti (octaua ex secundo) nempe rectangulo B I consequenti; Ergo C E in E I est æquale B H in H I, & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E est, vt E I ad I H; ergo H I, nempe N G æqualis est E M, & ideo L F ad E M, nempe ad N G est, vt C F ad E C, nempe D F ad D G, quia quælibet earum assignata est, vt proportio figuræ; ergo L F ad N G est, vt D F ad D G; itaq; comparando homologorum differentias L D ad D N, vt D F ad D G; & per conuersionem rationis, & postea diuidendo D N ad N L erit, vt D G, ad G F, quæ est vt proportio figuræ; Ergo B L est linea breuissima (nona ex quinto) & hoc erat ostendendum.



4 lib. 2.

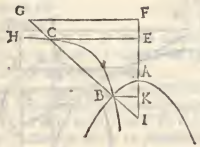
a
b

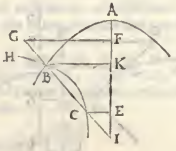
13. lib. 2.

Notæ

Notæ in Propoſit. LVIII.

a IAm poſſumus producere ex puncto aſſignato C extra datam ſectionem A B, aut intra (ſi punctum non fuerit ad axim I A) lineam diuidentem ex illo inter ſectionem, & axim lineam breuiſſimam, &c. *Sic legendum puto. Ex punto dato C extra, vel intra ſectionem A B, quod in axi non ſit, lineam rectam ducere, cuius portio incercepta inter ſectionem, & axim ſit linea breuiſsima.*





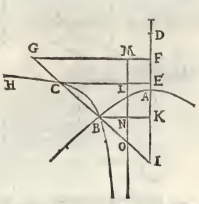
b Et per C ducamus ſectionem H C B circa duas continentes illam G F, I F, quæ occurrat ſectioni A B (16. ex 5.) in B, &c. *Scilicet ducamus per C hyperbolen H C B circa aſymptotos G F, F I, & quia aſymptoti, & hyperbole H C B productæ ad ſe ipſas ſemper proprius accedunt, atque parabole A B productæ ſemper magis ab axi A I remouetur; igitur hyperbole H C B, & parabola A B ſe mutuo ſecabunt; ſecent ſe in puncto B. Animaduertendum eſt, quod in textu Arabico aſſumitur hæc concluſio, vt demonſtrata in propoſitione 16. huius quinti libri; & ſiquidem numeri huius citationis mendoſi non ſunt, hæc propoſitio ſexta decima deſideratur in hoc libro.* 4. lib. 2. 14. 2. Ex 8. 1

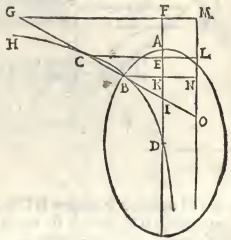
c Producatur perpendicularis B K. Quoniam C I, &c. *Ex puncto B ad axim ducatur perpendicularis B K, ſecans eum in K; quoniam quando punctum C ponitur intra parabolen, tunc B G æqualis eſt I C; quando vero cadit extra, tunc C G eſt æqualis B I, & addita communi B C erit I C æqualis K B, cumq; duæ rectæ lineæ I G, I F conuenientes in I ſecentur à rectis lineis K B, E C, F G inter ſe parallelis, eo quod ſunt perpendiculares ad eundem axim; ergo I G, & I F ſecantur in iiſdem rationibus, & propterea E I æqualis erit K F; ſicuti I C æqualis erat B G, pariterque I K æqualis erit E F, ſicuti I B æqualis erat C G; poſita autem fuit E F æqualis ſemirecto; igitur K I ſemiſsi lateris recti pariter æqualis erit.* 8. lib. 2. 2

Notæ

Notæ in Propoſit. LIX. LXII. & LXIII.

ET lineis, atque ſignis eodem ſtatu manentibus, &c. *Ideſt punctum* a
*C extra, aut intra ſectionem ponatur, dummodo non ſit in axi, ducatur*q;
C E perpendicularis ad axim, ſecans eum in E, & vs latus tranſuerſum ad rectum, ita fiat D F ad F E, atque C L ad L E, & per L producatur O L M parallela A I, & per F ducatur F M G parallela C E, quæ ſecet O M in M, & per
4. lib. 2. *C deſcribatur hyperbole H C B circa aſymptotos G M O, quæ in ellipſi per eius centrum D tranſibit, & ideo eam ſecabit ſicuti oſtenſum eſt in 56. huius.*



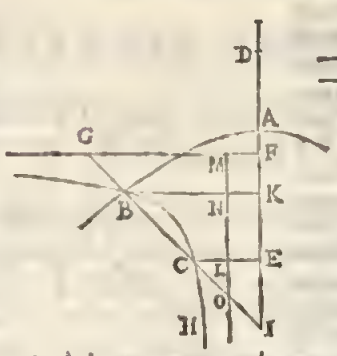


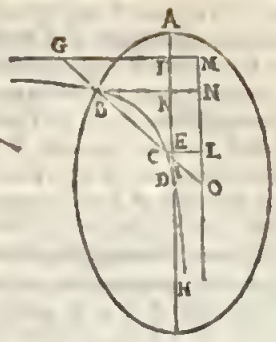
Eo quod O M parallela axi D A inclinato ſubtendit, &c. *Quoniam* b
in hyperbola O M parallela axi ſecat vtrãque linearum continentium angulum,
11. lib. 2 *qui deinceps eſt ei, qui hyperbolen continet ſectioni occurret, & producta ſectionem A B ſecabit, & ideo O M cadit intra ſectionem A B, atque hyperbole A B producta ſemper magis, ac magis recedit tum ab M O parallela axi, cum ab M*
14. lib. 2. *G parallela tangenti verticali, & ſectio H C B, & aſymptoti O M G ad ſe ipſas ſemper propius accedunt, igitur ſectiones A B, B C conueniunt; ſecens ſe ſe in B, & ducamus per B, C lineam occurrentem axi in I, ipſe M O in O, & M G in G.*

Et quia B O æqualis eſt ipſi C G, &c. *Cum lineæ rectæ O M, O G ſe ſe-* c
cantes in O, ſecentur à parallelis E C, K B, F G proportionaliter, erit O N æqualis M L, ſicuti O B æqualis erat C G, & O L, æqualis erit N M, ſicuti
8. lib. 2. *O C æqualis erat B G, eamque triangula O G L, & I C E ſint ſimilia propter parallelas O L, I E, erit O L ad E I, vt L C ad C E; eſt vero M N, ſeu F K æqualis ipſi L O, igitur F K ad E I eſt, vt L C ad E C, ſed ex conſtructione erat D F ad F E, vt C L ad L E, ſcilicet vt latus tranſuerſum ad*
Lem. 1. *rectum; ergo antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad*

eorumdem

eorundē differentias in ellipſi ſcilicet C L ad C E erit vt D F ad D E, & propterea K F ad E I erit, vt D F ad D E, & cōparando homologorum ſummas in hyperbola, & eorundem differentias in ellipſi, K D ad D I erit, vt D F ad D E, & iterum comparando antecedentes ad differentias terminorum fiet D K ad K I, vt D F ad F E, ſeu vt latus tranſuerſum ad rectum; igitur B I eſt linea breuiſsima.





Lem. 3.

Lem. 1.

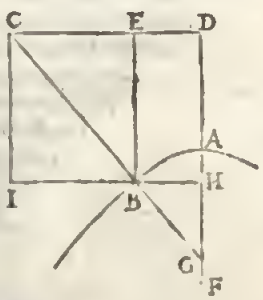
Ex 9. 10. huius.

d Si autem componamus proportionem in hyperbola deinde abſcindamus, & reijciamus oppoſitum ab oppoſito in ellipſi, deinde inuertamus fiet K D ad K I, vt D F ad F E, &c. *Sed textum mendoſum corrigi debere, vt ſupra factum eſt conſtat ex præcedenti nota.*

Notæ in Propoſit. LX.

a DEinde ſit perpendicularis ex C, &c. *Si ex puncto C extra hyperbolen poſito perpendicularis ad axim ducta ad centrum eius D pertingat, duci debet pariter ex puncto C recta linea ad ſectionem, cuius portio inter axim D F, & ſectionem A B ſit linea breuiſsima; fiat C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum, & ex E ducatur E B parallela axi, ſecans hyperbolen in B, & ex B ducatur B H perpendicularis ad axim, ſecans eum in H.*

b Et quia C E ad E D, nempe C B ad B G, &c. *Quia propter parallelas B E, F D eſt C E ad E D, vt C B ad B G, & propter parallelas D C, H B, eſt D H ad H G, vt C B ad B G, quare D H ad H G erit, vt C E ad E D: poſita autem fuit C E ad E D, vt latus tranſuerſum ad rectum; igitur D H ex centro hyperboles ad H G eandem proportionem habet, quàm latus tranſuerſum ad rectum, & propterea G B erit linea breuiſsima.*

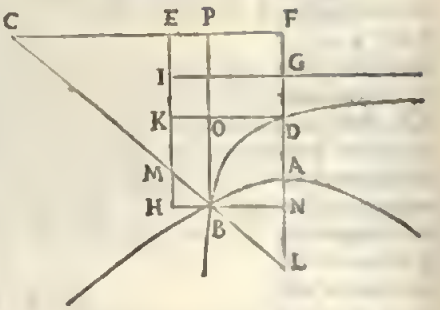


9. huius.

Notæ in Propoſit. LXI.

a SIt poſtea punctum C, & perpendicularis C F, &c. *Si à puncto C extra hyperbolen A B poſito, C F perpendicularis ad axim efficiat F A ſegmentū tranſuerſi axis maius ſemiſse eius D A, & ponantur C E ad E F, atque D G ad G F,*

ad G F, vt latus tranuersum ad rectum, & ducatur ex E recta E H parallela F A, quæ secetur à rectis D K, G I ad axim perpendicularibus in K, & I, &
4. lib. 2. *per D ducatur hyperbole D B circa asymptotos H I G, occurret hyperbole A B (vt in Prop. 59. 62. 63. ostensum est) alicubi, vt in B, coniungatur recta linea B C, quæ occurrat axi in L, & ipsi E H in M, ducaturque ex B perpendicularis ad axim eum secans in N, & rectam E M in H. Dico, quod B L est linea breuissima.*



C E ad E F, nempe K D est, vt D G ad G F, &c. *Quoniam ex constructione C E ad E F, seu ad ei æqualem K D, in parallelogrammo D E, est vt D G ad G F, scilicet vt latus transuersum ad rectum, estque K I ad I E, vt D G ad G F propter parallelas D K, G I, F E; ergo vt prima C E ad secundam D K, ita est tertia K I ad quartam I E, & propterea rectangulum C F I sub extremis contentum æquale est rectangulo D K I sub intermedijs comprehenso;*
12. lib. 2. *est vero rectangulum B I æquale rectangulo D I cum comprehendantur ab hyperbole D B, & asymptotis H I G; ergo rectangulum C E I æquale est rectangulo B H I; & propterea B H ad C E, nempe H M ad M E (propter similitudinem triangulorum B H M, C E M) eandem proportionem habebit, quàm E I ad I H, & componendo eadem H E ad H I, atque ad E M eandem proportionem habebit; & ideo H I seu ei æqualis N G æqualis erit E M, quare eadem L F ad N G, atque ad E M eandem proportionem habebit: sed propter similitudinem triangulorum L C F, M C E est F C ad E C, vt F L ad M E,*
Lem. 1. *seu ad N G, & erat C E ad E F, necnon D G ad G F in eadem proportione lateris transuersi ad rectum, & summa terminorum ad antecedentes terminos, scilicet F C ad E C, necnon F D ad D G eandem proportionem habent; quare L F ad N G eandem proportionem habet, quàm F D ad D G, &*
Lem. 3. *comparando homologorum differentias L D ad D N eandem proportionem habebit, quàm F D ad D G, & comparando consequentes ad differentias terminorum D N ad L N erit, vt D G ad F G, scilicet vt latus transuersum ad rectum;*
Lem. 1. 9. huius. *quapropter B L est linea breuissima.*

SECTIO

SECTIO DECIMA

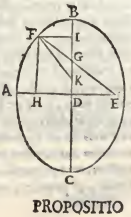
Continens Propoſ. XXXXIV. XXXXV. Apollonij.

a SI ex axe recto ellipſis ſumatur menſura ab origine, quæ ad ſemiaxim rectum non habeat minorem proportionem, quàm habet figura ſuæ tranſuerſæ, tunc quicumque ramus ſecans, ab illa origine ad ſectionem ductus, abſcindit ex axe tranſuerſo ad verticem ſectionis lineam minorem ea, quàm abſcindit linea breuiſsima egrediens ab eius termino in ſectione poſito ad tranſuerſum axim; ſi vero fuerit proportio ad ſemirectum minor, tunc ramorum ſecantium vnus eſt breuiſecans; reliqui vero, qui ſequuntur extremum tranſuerſæ habent proprietates ſuperius expoſitas, & qui ſequuntur extremitatem recti, ſecant ex tranſuerſa lineam maiorem ea, quàm abſcindit breuiſsima egrediens ab eius termino.

PROPOSITIO XXXXIV.

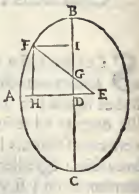
b Sit A D dimidium axis recti, & minoris ſectionis ellipticæ A B C, & menſura A E, quæ ſit maior, quàm A D, & proportio illius ad iſtam non ſit minor proportione figuræ ſectionis; Dico, quod linea breuiſsima egrediens ab extremitate cuiuſcumque rami ſecantis educti ex E ad ſectionem A B C, ſecat ex tranuerſa B C cum vertice B, vel C lineam maiorem ea, quàm abſcindit ille ramus.

c Ponatur ramus E F, & ducamus ex F ad vtrumque axim duas perpendiculares F H, F I. Et quia proportio E A ad A D non eſt minor proportione figuræ, ſed minor eſt, quàm E H ad H D, nempe E F ad F G, ſeu D I ad I G, erit proportio figuræ minor, quàm D I ad I G, & ponamus D I ad I K, vt eſt proportio figuræ, & iungamus F K; erit ergo F K linea breuiſſima (10. ex 5.) & iam ſecat K B maiorem, quàm B G, & G F non erit breuiſſima; & hoc erat propoſitum.



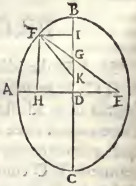
10. huius.

PROPOSITIO XXXXV.



SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, ponamus E H ad H D in proportione figuræ, & producamus perpendicularem H F, & iungamus F E, & ducamus perpendicularem F I. Et quoniam E H ad H D, nempe D I ad I G est, vt proportio figuræ, erit F G linea breuissima (10. ex 5.) Et quoniam iam eductæ sunt ex E duo breuisecantes F E, & E A (11. ex 5.) tunc à terminis ramorum egredientium ex E, qui terminantur ad sectionem B F, linea breuissima egrediens erit remotior ab ipso B, & qui terminatur ad sectionem A F, breuissima egrediens ab extremitate illius erit proximior, ipsi B (51. 52. ex 5.) & hoc erat ostendendum.

Notæ in Propos. XXXXIV.



PVto, numeros 53. & 54. Propositionum huius sectionis mendosos esse, nam Propositio 53. posita fuit in præmissa sectione, & Propositio 54. inferius apposita reperitur; Censeo igitur, esse Propositiones XXXXIV. & XXXXV.

Si ex axe recto ellipsis sumatur mensura, &c. *Hoc est si ex axe minori, recto ellipsis sumatur mensura, quæ habeat non minorem proportionem ad semiaxim rectum, quàm habet axis transuersus ad suum latus rectum, quilibet ramus secans, ab origine ad sectionem ductus, abscindit ex axe transuerso ad verticem sectionis minorem lineam, quàm secat linea breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Si vero mensura ad minorem semiaxim rectum proportionem minorem habuerit, quàm latus transuersum ad rectum, tunc vnicus ramus erit breuisecans; reliqui vero sequentes terminum transuersi, habent superius expositas proprietates, & sequentes extremitates axis recti, secant ex transuersa maiorem lineam, quàm secet breuissima ab eius termino ad axim transuersum ducta. Quod autem mensura necessario sumi debeat in axe minori ellipsis patet, nàm ex hypothesi rami sunt secantes non quidem ex concursu, sed ex origine ducti igitur origo cadit infra centrum, & mensura maior erit mediate axis vt in textu habetur; debet autem habere mensura ad semiaxim rectum maiorem aut eandem proportionem, quàm axis transuersus habet ad eius latus rectum, ergo proportio axis transuersi ad suum latus rectum erit maioris inæqualitatis, & propterea transuersus axis erit maior quàm axis rectus.*

Sit

b Sit A D dimidium axis recti sectionis ellipticæ A B C, &c. *Sit A D dimidium axis minoris, & recti ellipsis A B C, sitque mensura A E maior, quàm A D, & E A ad A D habeat maiorem, aut eandem proportionem, quàm habet latus transuersum B C ad eius rectum latus.*

c Ponatur ramus E F, & producamus ex F, &c. *Ducatur quilibet ramus secans E F, & ex F ad vtrumque axim perpendiculares F H, F I, quæ secent eos in H, & I. Et quia D H minor est, quàm D A, habebit eadem E D ad D H maiorem proportionem, quàm ad D A, & componendo E H ad H D, maiorem proportionem habebit, quàm E A ad A D; est vero E F ad F G, vt E H ad H D (propter parallelas D G, H F) nec non D I ad I G est, vt E F ad F G (propter parallelas E D, I F) ergo D I ad I G maiorem proportionem habet, quàm E A ad A D: habebat autem E A ad A D maiorem, aut eandem proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus; igitur D I ad I G maiorem proportionem habebit, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus: fiat iam D I ad I K, vt latus transuersum B C ad eius latus rectum, iungaturque F K, erit I K maior, quàm I G, & F K linea breuissima, quæ secat segmentum axis K B maius, quàm B G, vnde E F non erit breuissima.* 10. huius.

Notæ in Propos. XLV.

a SI autem fuerit ratio E A ad A D minor, quàm proportio figuræ, &c. *Habeat E A ad A D minorẽ proportionem, quàm latus transuersum B C ad eius rectum latus, & fiat E H ad H D, vt latus transuersum ad rectum; habebit E H ad H D maiorem proportionem, quàm E A ad A D, & diuidendo eadem E D ad D H habebit maiorem proportionem, quàm ad D A; & propterea D H minor erit, quàm D A; vnde ex puncto H si eleuetur H F perpendicularis ad D A intra sectionem cadet, & secabit eam alicubi, vt in F: ducatur postea ex F recta F E, quæ secet axim in G, & F I perpendicularis ad axim B C eum secans in I. Et quoniam, propter parallelas G D, F H, est E F ad F G, vt E H ad H D, pariterque, propter parallelas E D, I F, est D I ad I G, vt E F ad F G, quare D I ad I G eandem proportionem habet, quàm E H ad H D, seu quàm latus transuersum B C ad eius latus rectum; & propterea F G est breuissima.* 10. huius.

b Et quoniam iam eductæ sunt ex E duæ breuisecantes, &c. *Textus Arabicus vsque ad finem propositionis est omnino corruptus, cum supponat propositionem non demonstratam, vt in propositione 56. notaui; Itaque, sic eum restituì posse censeo. Quoniam ex concursu E breuissima F G, & semiaxis recti minoris D A rami eductì ad sectionem F A secant axis segmenta vsque ad verticem B maiora, quàm abscindant breuissima ab eorum terminis ad axim ducta, scilicet breuissima cadunt supra ramos (ex Lemmate 8. præmisso) similiter rami ex concursu E ad sectionem B F ducti cadunt supra breuissimas ab eorum terminis ad axim extensas (ex eodem Lemmate 8.) & hoc erat ostendendum.*

SECTIO

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſ. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI. Apollonij.

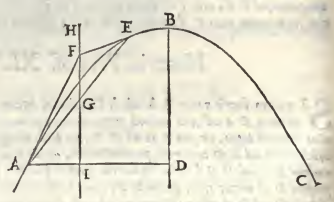
PROPOSITIO LXVIII. LXIX.

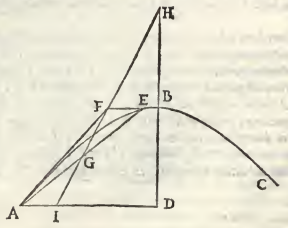
SI occurrant duæ tangentes alicui ſectioni A B C, vt ſunt A F, E F, vtique quod abſcinditur ex tangente proximiori vertici ſectionis, qui eſt B minus eſt ſegmento abſciſſo ex alia, nempe E F minor eſt, quàm A F. a

Iuncta enim A E, & in parabola ex F producta linea F I parallela axi B D erit illa diameter, bifariam ſecans E A in G (34. ex 2.) Similiter ex centro H producamus H F G, quæ eſt quoque diameter (34. ex 2.) bifariam ſecans E A in G, & ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim D B. Ergo angulus A I G in parabola eſt rectus, & in hyperbola obtuſus; ergo F G A erit obtuſus in illis omnibus; quare maior eſt, quàm angulus F G E, & A G æqualis eſt ipſi G E, & F G communis; igitur E F minor eſt, quàm F A. b

30. lib. 2.

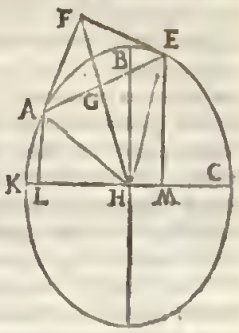
Ibidem.





PROP.

PROPOSITIO LXX.



POstea in ellipsi iungamus E H, A H, & C sit extremitas axis recti; erit A H minor
c quàm E H (11. ex 5.) & angulus E G H, nempe A G F maior erit, quàm A G H, seu E G F, ergo E F minor est, quàm F A, & hoc erat propositum.

PROPOSITIO LXXI.

d PAtet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L, & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate minor quoque est, quemadmodum demonstrauimus, & hoc erat ostendendum.

Notæ in Propositt. LXVIII. LXIX. LXX. & LXXI.

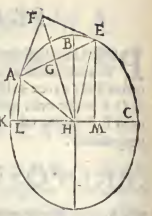
a SI occurrant duæ tangentes alicui sectioni A B C, aut circulo, vt sunt, &c. *Ideſt si coniſectionem A B C contingant duæ rectæ A F, E F in punctis A, & E concurrentes in F, eris portio tangentis inter occurſum, & contactum vertici B proximiorem intercepta, minor ea, quæ inter occurſum, & remotiorem à vertice contactum continetur: oportet autem in ellipſi B verticem esse axis maioris. Expungo verba,* aut circulo, *tanquam erronea, & incante ab aliquo textui ſuperaddita. Circulum enim tangentes ab eodem puncto ductæ inæquales esse nequeunt.*

b Et ducamus A D in parabola, & hyperbola, &c. *Et ducamus A D in parabola, & hyperbola perpendicularem ſuper axim B D, ſecantem eam in D, atque G F H in I; cumque in parabola diameter F G I ſit parallela axi B D, erit angulus A I G rectus æqualis interno, & oppoſito ad eaſdem partes; angulo D; in hyperbola vero cum triangulum H D I ſit rectangulum in D, erit externus A I G obtuſus, eſtque in triangulo G I A angulus externus A G F maior interno, & oppoſito A I G, recto in parabola, & obtuſo in hyperbola; erit quoque angulus F G A obtuſus in parabola, & hyperbola.*

c Et angulus E G H, &c. *Quia F H eſt diameter ſecans bifariam E A in G; ergo triangula E G H, & A G H habent duo latera æqualia E G, A G, & G H, commune; eſtque H E, vertici B axis maioris ellipſis propinquior, maior remotiore H A; ergo angulus E G H maior erit angulo A G H; eſtque angulus A G F æqualis E G H maiori, & E G F æqualis minori A G H; igitur angulus A G F maior eſt angulo E G F, & latera circa inæquales angulos ſunt æqualia ſingula ſingulis, ergo tangens A F maior eſt, quàm E F.* 30. ex 2. Com. 11. huius.

Patet

Patet ex hoc, quod si producantur ex duobus punctis contactus in ellipsi perpendiculares E M, A L; & fuerit E M minor, exempli gratia, tunc tangens educta ab eius extremitate, quæ est in sectione, minor quoque est, &c. *Si enim ex punctis E, A contactuum in ellipsi ducantur ad axim minorem K C perpendiculares E M, & A L secantes eum in M, & L, fueritque E M minor, quàm A L, tunc quidem punctum E magis recedit à vertice B axis maioris, quàm punctum A; & propterea, ex præmissa 70. huius libri, erit tangens E F minor, quàm A F. Expungo determinationem ab aliquo incaute additam* (quæ est in sectione) *manifestum enim est duci non posse contingentem ellipsim à perpendicularis termino M in axi minori posito, sed à termino E in sectionis peripheria constituto.*



d

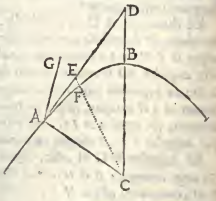
SECTIO DVODECIMA

Continens XXIX. XXX. XXXI. Propos. Appollonij.

QVælibet linea recta A E D tangens sectionem aliquam A F B in A extremitate lineæ breuissimæ A C est perpendicularis super illam, nempe D A C est angulus rectus. Et si fuerit perpendicularis super illam vtique tanget sectionem.

Alioquin producatur perpendicularis C E super A D, erit A C maior, quàm E C, ergo maior est, quàm F C; sed est minor, cũ sit minor, quàm C F, quod est absurdum. Igitur angulus D A C, est rectus, quod erat ostendendum.

Si verò fuerit D A C rectus, erit A D tangens, alioquin sit tangens A G; ergo C A G erit rectus, sed erat C A D rectus, quod est absurdum; ergo A D est tangens, & hoc erat probandum.



a

b

Notæ

Notæ in Propoſit. XXIX. XXX. & XXXI.

a ALioquin producatur perpendicularis C E, &c. *Exiſtente C A linea breuiſsima, & A D tangente, ſi C A non eſt perpendicularis ad tangentem ducatur ex origine C recta C E perpendicularis ad tangentem A D, ſecans eam in E, & ſectionem in F, erit in triangulo A C E angulus C A E acutus, & minor angulo recto E, & propterea C A ſubtendens maiorem angulum rectum, maior erit quàm C E, quæ acutum ſubtendit: cumque punctum E tangentis cadat extra ſectionem, erit C F minor, quàm C E; ideoque C A multo maior eſt, quàm C F, quapropter C A non erit breuiſsima, quod eſt contra hypotheſin.*

b Si vero fuerit D A C rectus, &c. *Quia C A ſupponitur breuiſsima, & angulus D A C rectus, erit A D tangens; nam ſi hoc verum non eſt, ducatur ex puncto A recta linea A G, contingens ſectionem in A; ſecabit vtique tangens A G ipſam D A, & erit angulus C A G rectus nimirum contentus à breuiſsima C A, & tangente A G, ex proxime demonſtrata propoſitione; ergo duo anguli recti C A D, & C A G æquales ſunt inter ſe, pars, & totum, quod eſt abſurdum.* 33. 34. lib. 2.

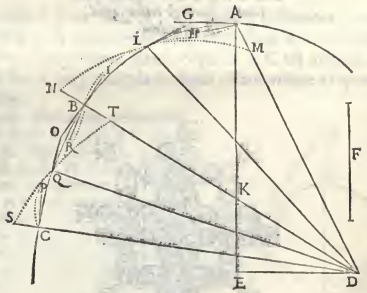
SECTIO DECIMATERTIA

Continens Propoſ. LXIV. LXV. LXVI. LXVII. & LXXII. Apollonij.

PROPOSITIO LXIV. LXV.

SI ramorum ſecantium D C, D B, D A eductorum ex concurſu D ad ſectionem C A non fuerint duo breuiſecantes, vtique minimus eorum eſt, ramus terminatus D A, qui ambit cum axe A E angulum acutum; nempe D A E, & reliquorum propinquior illi minor eſt remotiore, ſcilicet D B maior, eſt quàm D A, & D C quàm D B.

Si vero inter illos fuerint duo breuiſecantes tunc vicinior vertici ſectionis eſt maximus ramorum, & maiori proximior, eſt maior, & minori propinquior eſt minor.



Producamus perpendicularem D E ſuper axim E A, & reperiatur Trutina F. Et primo loco nullus ramus ſit breuiſecans, iam ſi D B, non eſt maior, quàm D A, ſit æqualis illi, & ducamus duas perpendiculares A G, a

A G, A H ſuper E A, & D A. Et quia A G tangit ſectionem, cadet A H intra ſectionem, & ducamus rectam B I tangentem ſectionem in B. Quoniam ex D non educitur ad ſectionem A C vllus breuiſecans, erit E A non maior dimidio recti (49. 50. ex 5.) aut erit D E maior quàm F (52. ex 5.) Iis poſitis vtique linea breuiſſima ex B educta abſcindit cum A ex axi lineam maiorem, quàm A K (49. 50. 51. 52. ex 5.) verùm linea breuiſſima continet cum tangente B I angulum rectum (29. 30. ex 5.) igitur D B I eſt acutus, quare ſi centro D, interuallo D B circulus deſcribatur, tunc B I cadit intra circulum, & A H cadit extra id ipſum, quia eſt perpendicularis ad D A; igitur circulus ſecat coniſectionem; ſecet eam in L, & iungamus L D, ducamuſque L G ſectionem tangentem. Patet (vt dictū eſt) quod D L G ſit acutus; ergo L G cadit intra circulum B L A, ſed cadit extra, quod eſt abſurdum; ergo B D non eſt æqualis ipſi A D. Neque minor illo eſſe poteſt; quia ſi ſecetur D M maior, quàm D B, & minor, quàm D A, & centro D, interuallo D M, circulus M L N deſcribatur, tunc D N, nempe D M maior eſt, quàm D B, & propterea circulus N L M ſecat coniſectionem. Subinde patebit (quemadmodū demoſtrauimus) quod D B non ſit minor, quàm D A; igitur D B maior eſt, quàm D A.

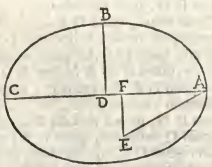
32. 34. lib. 1.

32. 34. lib. 1.

Poſtea dico, quod D C maior eſt, quàm D B; quia demonſtrauimus, angulū D B O eſſe obtuſum, & patet, quod D C P eſt acutus, & procedendo trito iam itinere demonſtrabimus, quod Q O neceſſe eſt, vt cadat intra circulum C Q B. Et quod ſi fuerit D C minor, quàm D B, aut æqualis, neceſſe eſt, vt Q O cadat intra circulum C Q B; ſed ceeidit extra, quod eſt abſurdum; igitur D C maior eſt, quàm D B, & D B maior, quàm D A, quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXVI.

IN ſectione elliptica A B C, cuius axis maior A C eius centrum D, & D B dimidium recti, duci nequeat ex E ad quadrantem A B breuiſecans, & producatur perpendicularis E F; Dico punctum F cadere inter D A.

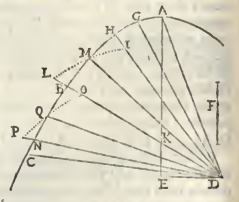


Quia ſi caderet inter C, D duci poſſet ex E ad ſectionem A B aliqua breuiſecans (56. ex 5.) quod eſt contra ſuppoſitionem. Deinde patet, quemadmodum demonſtrauimus in parabola, & hyperbola, quod E A minima ſit linearum, & ramorum ad ſectionem B A cadentium, & propinquior illi, minor ſit remotiore, & hoc erat propoſitum.

pr. 64. 65. huius.

PROPOSITIO LXVII.

POstea repetamus figuras, paraboles, & hyperboles, & quoquot sunt illius signa, & supponamus quod ipsius D B portio B K, sit tantummodo linea breuissima; Dico, quod D A quoque minima est linearum egredientium ex D ad sectionem A C, & illi propinquiores sunt minores remotioribus. a b



Quia educitur ex D vnus tantum breuissecans erit mensura E A maior dimidio erecti, & D E æqualis F Trutinæ (51. 52. ex 5.) vnde sequitur, quod lineæ breuissimæ eductæ ab extremitatibus reliquorum ramorum abscindunt cum A ab axi lineas maiores, quàm secant illi rami. Ducamus prius ad sectionem B A ramum D G, inde constat D G maiorem esse, quàm D A (64. 65. ex 5.) Dico iam, quod D B maior est illa, alioquin esset æqualis, vel minor illa, & producamus D H ad sectionem B G; ergo D H maior est, quàm D G, quia remotior est ab D A (64. 65. ex 5.) quare maior est, quàm D B, & ex illo secetur D I maior, quàm D B, & minor, quàm D H, & centro D interuallo D I describatur circulus secabit sectionem B G, secet eam in M, & iungamus D M; ergo D M, nempe D I, quæ concessa fuit maior, quàm D B est etiam maior, quàm D H, propterea quod est remotior ab D A, quàm D H (64. ex 5.) igitur D I maior est quàm D H, quod est absurdum; quare D B maior est, quàm D H. c d e

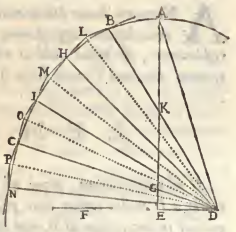
Patet etiam, quod D B minor sit, quàm D C, alioquin esset vel illi æqualis, aut maior, & ducamus D N ad sectionem C B; ergo D N minor est, quàm D C, eò quod proximior est D A (64. ex 5.) quare minor est, quàm D B, & secetur D O ex D B maior, quàm D N, & minor quàm D B, & centro D, interuallo D O circulus describatur secabit sectionem exempli gratia, in Q, & iungamus D Q, igitur D Q minor est quàm D N, sed est æqualis D O, quæ supposita fuit maior, quàm D N, ergo D Q maior est, quàm D N; verum est minor illo, quod est absurdum; igitur D C non est minor D B, neque æqualis; quare maior illa est. Atque sic patet, quod D B minor sit omnibus lineis egredientibus ex D ad sectionem B C, & illi proximiores ex illa parte, minores sunt remotioribus. Quapropter manifestum est, quod D A sit minimus omnium ramorum egredientium ex D ad sectionem A B C, & reliqui proximiores illi, minores sunt remotioribus, quod erat ostendendum. f g

PROPOS.

PROPOSITIO LXXII.

SI eductæ fuerint ex D duæ breuiſecantes D C, D B, quorum ſegmenta G C, B K ſint breuiſſima, & D B propinquiór ſit vertici ſectionis; Dico, quod D B maximus eſt ramorum egredientium ad ſectionem A B C, & minimus eorũ D C, & ramorum egredientiũ ad ſectionem A C, qui D B propinquiores maiores ſunt remotioribus, & propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus.

a



Sit F Trutina, & quia iam ducti ſunt ex D duo breuiſecantes, ideo E A excedit dimidium erecti, & D E minor eſt, quàm F (51. 52. ex 5.) his poſitis, vtique lineæ breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus ramorum qui ſunt in ſectione B C abſcindunt ab axi E A minores lineas, quàm abſcindunt rami (51. 52. ex 5.) & qui ducuntur ab extremitatibus egredientium ad reliquas ſectiones abſcindunt lineas maiores. Educamus itaque ramos D H, D I ad ſectionem B C, & ducamus B L, L H M, & I M tangentes ſectionem in punctis B, H, I; quia B K eſt breuiſsima erit L B D angulus rectus, & quia breuiſſima egrediens ex H abſcindit cum A ab axi E A lineam minorem, quàm ſecat D H erit L H D obtuſus, & iungamus D L; igitur duo quadrata D H, H L minora ſunt, quàm quadratum D L, quod eſt æquale duobus quadratis L B, D B; verum L B minor eſt, quàm H L (68. ex 5.) ergo D B maior eſt, quàm D H. atq; ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, quia D H M eſt acutus, & D I M obtuſus: & D I maior ſit, quàm D C. Quare B D maximus eſt ramorum egredientium ad B C, & iam demonſtratum eſt, quod ſit maximus ramorum egredientium ad B A (64. 65. ex 5.)

29. 30. huius. Ex 29. 30. huius. b Ibidem. c

Ponamus poſtea N extra ſectionem B C, & iungamus D N, itaque linea breuiſſima egrediens ex N abſcindit ab axi E A maiorem lineam, quàm ſecat D N; ergo tangens in N continet cum D N angulum acutum: poſtea oſtendetur, quemadmodum hic dictum eſt, quod D C minimus ſit reliquorum ramorum egredientium ad reliquas ſectiones, & ſit minimus ramorum egredientium ad A C, quare manifeſtum eſt, quod D B ſit maximus ramorum, & D C minimus, & quod maioribus propinquiores ſunt maiores remotioribus, & minoribus propinquiores, minores ſunt remotioribus, quod erat oſtendendum.

51. 52. huius. Ex 29. 30. huius. d

MONITVM.

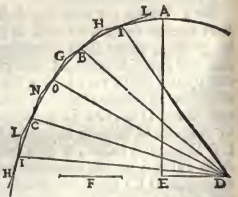
ANtequam huius Decimætertiæ Sectionis explicationes, atque emendationes aggrediamur, vt Notæ breuiores, clarioresque reddentatur, & textus Arabici menda facilius corrigi possent, operæ pretium duximus (amice lector) Lemmata sequentia præmittere.

LEMMA IX.

Si ad coniectionem, atque ad vnum quadrantem ellipsis A B C à concursu D nullus ramus duci possit, qui sit breuissecans; Dico, quod quilibet secans ramus D B cum tangente H B G per eius terminum B ducta efficit angulum D B H ad partes verticis A acutum, & D B G, qui deinceps est, obtusum.

Quoniam nullus ramus ex concursu D ad sectionem A C ductus est breuissecans, erit (ex conuersa propositionis 49. 50. 51. 52. huius) mensura A E aut non maior semisse lateris recti, aut perpendicularis D E maior Trutina, quæ sit F, & ideo quilibet ramus secans D B cadit supra breuissimam ex puncto B ad axim ductam, est verò breuissima ex puncto B ad axim ducta perpendicularis ad G B H tangentem sectionem in B; ergo angulus D B H, verticem A respiciens est acutus, & qui deinceps est D B G erit obtusus.

29. 30. huius.



LEMMA X.

Iisdem positis, si à concursu D vnicus tantum ramus D B breuissecans ad sectionem A B duci potest; Dico, quod quilibet alius ramus secans D I supra, vel infra breuissecantem D B positus efficit cum recta L I H tangente sectionem in I angulum D I L, verticem respicientem, acutum, & D I H, qui deinceps est, obtusum.

Nam ex conuersa propositione 51. & 52. huius perpendicularis D E æqualis erit Trutinæ F, & ideo quilibet ramus D I positus supra, vel infra breuissecantẽ (qui

(qui eſt D B) cadit ſupra breuiſsimam ex puncto I ad axim ductam, quæ perpendicularis eſt ad tangentem L I H, & propterea angulus D I L, verticem A reſpiciens erit acutus, & conſequens angulus D I H obtuſus. 51. 52. huius. 29. 30. huius.

L E M M A XI.

Iiſdem poſitis, ſi à concurſu D duo breuiſecantes D C, D B ad ſectionem A B duci poſſunt; Dico, quod quilibet ramus ſecans D I poſitus ſupra breuiſecantem D B vertici proximiorem, vel infra infimum breuiſecantem D C, efficit cum recta L I H tangente ſectionem in I angulum D I L, reſpicientem verticem A, acutum, & conſequentem D I H obtuſum, & quilibet ramus D O inter breuiſecantes poſitus efficit cum recta G O N ſectionem tangente in O angulum D O G verticem reſpicientem obtuſum, conſequentem vero D O N acutum.

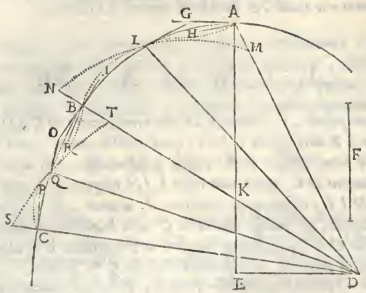
Quia (ex conuerſa propoſitione 51. & 52. huius) perpendicularis D E minor eſſe debet Trutina F, & propterea quilibet ramus D I ſupra breuiſecantem D B, vel infra breuiſecãtem D C cadit ſupra breuiſsimam ex puncto I ad axim ductam, cum qua contingens L I angulum rectum conſtituit; ergo angulus D I L verticem reſpiciens, eſt acutus, & conſequens D I H obtuſus; Similiter quilibet ramus D O inter breuiſecantes poſitus cadit infra breuiſsimam ex puncto O ad axim ductam, & cum illa ſectionem contingens G O efficit angulos rectos, igitur angulus D O G verticem reſpiciens, eſt obtuſus, & conſequens D O N acutus. 51. 52. huius. 29. 30. huius. Ibidem.

Notæ in Propoſ. LXIV. & LXV.

ANtea Apollonius docuit qui nam rami ab origine ad coniſectionem ducti eſſent minimi, & quo ordine reliqui rami ſe ſe excederent, modo agit de ramis axim ſecantibus à concurſu ductis, & quærit qui minimus, & qui maximus ſit, & quo ordine diſponantur.

a Producamus perpendicularem D E ſuper axim, &c. *Si nullus ramus breuiſecans à concurſu D ad ſectionem A C duci poteſt; Dico, quod ramus terminatus D A eſt minimus omnium ramorum ſecantium D B, D C, & propinquiores vertici A minores ſunt remotioribus; ducatur D E perpendicularis ad axim eum ſecans in E, & reperiatur Trutina F. Et ſiquidem D A non eſt minor quolibet alio ramo ſecante D B infra ipſum poſito erit æqualis, aut maior illo; ſitque prius D A æqualis D B, ſi fieri poteſt, & ex puncto A verticis ducatur A G perpendicularis ad axim A E, quæ continget ſectionem in A, pariterque ducatur recta A H perpendicularis ad ramum A D inclinatum ad axim;* 17. lib. 1. 32. pr.

& quia



& quia A H cadit infra A G ad partes axis cum D A , ad quam illa perpendicularis eſt , extendatur vltra axim A E , nec poſsit inter tangentem A G , & ſectionem conicam A B , aliqua recta linea intercipi ; igitur A H cadit intra coniſectionem , & angulus E A H eſt acutus .

Quoniam ex D non educitur ad ſectionem A C vllus breuiſecans, &c. b

Ex 49. 50. huius. *Sequitur quidem ex hac hypotheſi, quod menſura E A non ſit maior ſemierecto aut ſi maior eſt , ſit quoque perpendicularis D E maior Trutina F , ex conuerſa propoſitione 51. 52. huius per deductionem ad inconuenientes .*

Quare ſi centro D interuallo D B , &c. *Circulus enim B I L H A radio D B deſcriptus tranſibit per verticem A cum radius D B poſitus ſit æqualis D A , cumque angulus D B I ſit acutus , ex Lemmate nono , cadet neceſſario B I intra circulum B I L .* c

Igitur circulus ſecat coniſectionem , &c. *Quia B I cadit extra coniſectionem , quàm tangit , & intra circulum B L A , vt dictum eſt , è contra recta A H cadit intra eandem coniſectionem , & extra ipſum circulum , quem tangit, cum H A perpendicularis ſit ad circuli radium D A ; igitur circulus B I L A fertur extra coniſectionem ad partes B I , & intra eandem ad partes A H ; quare neceſſario coniſectionem ſecat .* d

Patet, vt dictum eſt, quod D L G ſit acutus, &c. *Hoc enim ſequitur ex nono Lemmate præmiſſo , reſpicit enim angulus D L G verticem A ; & ideo eſt acutus , & cadit neceſſario recta L G intra circulum B L A radio D L deſcriptum ad partes L A ; & portio circuli L H A cadit intra coniſectionem L A ; igitur recta L G cadit intra coniſectionem L A , ſed cadit extra eandem ſectionem, cum contingat eam in L , quod eſt abſurdum .* e

35. 36. lib. 1.

Deinde

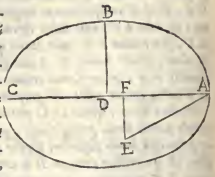
f Deinde patebit, quemadmodum demonſtrauimus, &c. *Quia D M recta eſt maior, quàm D B, & minor quàm D A, eſtque circuli radius D N aqualis D M; ergo punctum M cadit intra coniſectionem, N verò extra ipſam; & propterea circulus M L N ſectionem conicam ſecabit alicubi, vt in L, & portio circuli M L intra coniſectionem A L incidet: rurſus ducatur radius D L, & L G coniſectionem tangens in L erit, vt prius angulus D L G acutus; & ideo L G cadit intra circulum L M, & propterea intra coniſectionem A L, ſed eadem L G cadit extra ipſam, quia eam contingit in L, quod eſt abſurdum; quare ramus D A non eſt maior, quàm D B; ſed prius neque illi aqualis erat; igitur ramus terminatus D A minor eſt quolibet ramo ſecante D B infra ipſum poſito, & propterea minimus erit omnium ſecantium.* 33. 34. lib. 1.

g Poſtea dico, quod D C maior eſt, quàm D B, &c. *Demonſtratio ſecundæ partis huius propoſitionis, quàm Apollonius innuit (quia conſtructione, ac progreſſu ſimili ſuperiori perfici poteſt) hac ratione reſtituitur. Demonſtrandum eſt quemlibet ramum D B vertici A proximiorem eſſe minorem quolibet ramo D C remotiore. Ducantur recta C P contingens ſectionem in C, & O B tangens ſectionem in B, & recta B R perpendicularis ad ramum D B; & ſi quidem ramus D C non concedatur maior, quàm D E, ſit primo ei aqualis, ſi fieri poteſt, & centro D interuallo D C deſcribatur circulus C P R, qui tranſibit per punctum B, ob aqualitatem radiorum D C, D B; & quia (ex Lemmate nono) angulus D C P verticem reſpiciens, eſt acutus, recta C P cadet intra circulum C P R; ſed cadit extra coniſectionem, cum ſit contingens; igitur portio circularis peripheriæ C P ducitur extra coniſectionem C Q F: rurſus, quia angulus D B O eſt obtuſus (ex nono Lemmate, cum verticem A non reſpiciat) ergo R B perpendicularis ad D O cadit intra coniſectionẽ, cum B O poſita ſit eã contingens: cadit verò eadem B R extra circulum B R Q, cum ſit perpendicularis ad circuli radium D B; igitur circuli portio B R intra coniſectionem cadet: ſed prius eiuſdem circuli portio C P extra eandem ſectionem ducebatur; igitur idem circulus ſecat coniſectionem alicubi, vt in Q, ducaturque denuo ramus D Q, & Q O contingens ſectionem in Q; Vnde (ex nono Lemmate) angulus D Q O erit acutus; & propterea recta Q O intra circuli portionem Q R conſtituta intra coniſectionem cadet, quod eſt abſurdum; recta enim Q O extra coniſectionem Q A cadit, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C aqualis eſt ipſi D B. Sit ſecundò D C minor, quàm D E (ſi fieri poteſt) ſecetque D T minor quàm D B, ſed maior quàm D C; & centro D interuallo D T deſcribatur circulus T Q S; is quidem ad partes B cadet intra, ad partes verò C extra coniſectionem; & propterea eam alicubi ſecabit, vt in Q; & ducto ramo D Q, & Q O contingente ſectionem in Q, erit angulus D Q O acutus, & ideo recta Q O cadet intra circulum T Q, & propterea intra coniſectionem, quod eſt abſurdum; Q O enim cadit extra ſectionem Q A, quàm contingit in Q; non ergo ramus D C minor eſt, quàm D B, ſed neque aqualis prius oſtenſus fuit; igitur quilibet ramus D B vertici A propinquior minor eſt quolibet ramo remotiore D C, quod erat oſtendendum.* 33. 34. lib. 1. Lem. 9.

Notæ in Propos. LXVI.

QVia si caderet inter C, D duci posset, &c. *Quotiescunq; enim perpendicularis E F, cadit super centrũ D, vel secat semiaxim D C inter D, & C, tũc ex concursu E vnicus ramus breuiscans ducti potest ad sectionem B A, qui nimirum cadit inter verticem remotiorem A, & axim minorem D B: sed ex hypothesi nullus ramus ex concursu E ad quadrantem ellipsis A B duci potest, qui sit breuiscans; igitur perpendicularis E F secat semiaxim A D in puncto F posito inter A, & D.*

45. 56. huius.



a

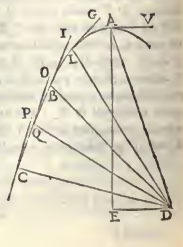
Deinde patet, quemadmodum demonstrauimus in vtraque hyperbola, &c. *Permuto particulam [vtraque] vt manifestè erroneam, legi enim debet in parabola, & hyperbola. Quod vero ramus terminatus E A minimus sit omnium ramorum secantium manifestum est ex demonstratione propositionis 64. 65., quæ comprehendit etiam ellipsim, quando mensura F A minor est semiaxi A D, vt ex propositione 52. patet. Et similiter ramorũ secantium ex concursu E ad sectionem A B ductorum propinquiores vertici A minores sunt remotioribus ex eadem demonstratione 64. 65. huius.*

Ex demonstratione præmissa propositionum 64. & 65. deduci potest consectarium, à quo notæ subsequentes breuiores reddantur.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXIV. & LXV.

SI in aliqua peripheria cuiuslibet coniectionis omnes rami secantes, qui à concursu duci possunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis constituunt angulos, qui verticem respiciunt, acutos; rami proximiores vertici sectionis minores erunt remotioribus.

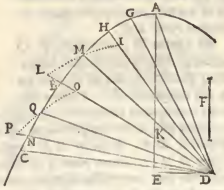
Ex eo enim, quod in propositionibus 64. & 65., omnes rami D A, D L, D B, D Q, D C, & reliqui omnes, qui duci possunt ex concursu D ad sectionem A B C efficiunt cum tangentibus sectionẽ à terminis A, L, B, Q, C angulos, verticem A respicientes, acutos, vt sunt



sunt D A V, D L G, D B I, D Q O, D C P, ostensus est ramus D A minor quàm D B, & D B propinquior vertici A, minor ramo D C remotiore.

Notæ in Propos. LXVII.

a Postea repetamus figuram vtrãque hyperboles, &c. *Lego; Repetamus figuras paraboles, & hyperboles, & supponantur denuo eadem lineæ aductæ ex concursu D ad sectionem; & perpendicularis D E, atque Trutina F, & omnium ramorum secantium vnicus tantummodo D B sit breuisecans.*



b Et illi propinquiores sint maiores remotioribus, &c. *Sed mendosè; legi debet: Et illi propinquiores sint minores remotioribus.*

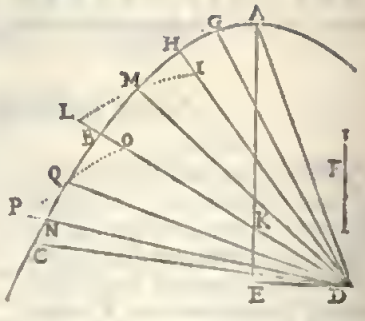
c Quia educitur ex D vnus tantum breuisecans, &c. *Legi debet. Quia educitur ex concursu D vnus tantum breuisecans, erit mensura E A maior dimidio erecti, & D E perpendicularis ad axim æqualis erit Trutinæ F.* Conuerf. 51. 52. huius.

d Inde constat D G maiorem esse, quàm D A, &c. *Quia ex concursu D ad sectionem A C vnicus ramus D B breuisecans supponitur igitur omnes rami cadentes inter A, & B præter infimum D B constituunt cum tangentibus sectionem, ab eorum terminis ductis, angulos respicientes verticem A acutos; & propterea ramus terminatus D A minor est quolibet ramo D G infra ipsum, & supra ramum D B posito; atque ramus D G minor est quolibet alio à vertice remotiore ducto ex D ad peripheriam A B. Dico iam, quod ramus D B maior est quolibet ramo D G, posito infra verticem A, & supra breuisecantem D B; Si enim hoc verum non est, erit D B æqualis, aut minor, quàm D G, & tunc ducto quolibet ramo D H ad sectionem G B infra ramum D G, erit D H remotior à vertice A maior propinquiore D G, & propterea ramus D B adhuc minor erit ramo D H.* Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius. Ibidem.

e Ergo D M nempe D I, &c. *Quia D M, vt remotior à vertice A, est maior, quàm propinquior D H est vero D L, atque D I æqualis D M cum sint radij eiusdem circuli; ergo D I portio maior est, quàm totum D H, quod est absurdum; quare D B maior est quolibet ramo D G infra verticem A, & supra ramum D B posito; & propterea D B multo maior erit, quàm D A.* Ibidem.

f Ergo D N minor est, quàm D C, &c. *Dubitare quis posset, an ramus D N, quia propinquior est vertici A sit minor remotiore ramo D C, vt in propositione 64. & 65. verificabatur; & ratio est, quia hypotheses sunt diuersæ, nam ibi nullus ramus breuisecans à concursu D ad sectionem A C duci posse supponebatur, in hac vero propositione 67. ponitur vnicus breuisecaus D B, at scrupulus omnis tolletur, si dicatur, non quidem ex propositionibus 64. & 65. sed ex demonstratione ibi allata, seu ex Corollario in fine notarum appositi,*

propoſitum deduci, nam duo rami D C, & D N poſiti infra ſingularem
Lem. 10. *brevioſecantem D B efficiunt cum rectis tangentibus ſectionẽ angulos verticem reſpicientes acutos; igitur vt in ſecunda parte propoſitionum 64. & 65. demonſtratum eſt, erit ramus D N vertici propinquior minor remotiore ramo D C.*

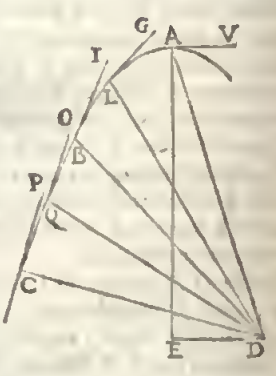


Et centro D, interuallo D O circulus deſcriptus ſecabit ſectionem exempli gratia in Q (56. ex 5.) & iungamus, &c. *Videtur omnino expungenda citatio in textu appoſita; (56. ex 5.) nam circulum O Q manifeſtum eſt, ſecare coniſectionem alicubi, vt in Q, cum radius D O poſitus ſit minor D B, & maior D N; poſtea, quia D Q propinquior eſt vertici A, quàm D N, & omnes rami à D ad peripheriam ſectionis N Q ducti, efficiunt cum ſuis tangentibus angulos, verticem reſpicientes, acutos; igitur D Q minor eſt, quàm D N, quod eſt abſurdum; poſita enim fuit D O, ſeu ei aequalis D Q, & D P maior, quàm D N.*

Lem. 10. Coroll. 64. 65. huius.

COROLLARIVM PROPOSIT. LXVII.

ANgulorum àramis ſecantibus, qui à cõcurſu ad coniſectionem duci poſſunt, cum tangentibus ab eorum terminis ductis cõprahenſorum, ſi vnus tantum rectus fuerit, reliqui omnes verticem reſpicientes acuti; rami proximiores vertici ſectionis, minores erũt remotioribus.

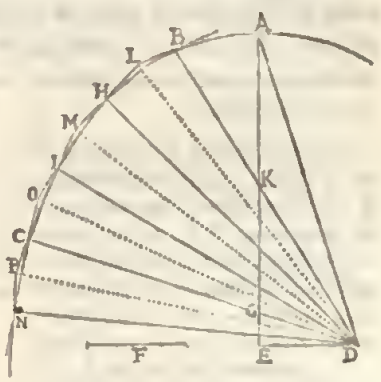


Ex eo enim, quod in propoſitione 67. omnes rami D A, D L, D C, & reliqui omnes, qui duci poſſunt ex concurſu D ad ſectionem A B C, cum tangentibus ſectionem à terminis A, L, C comprahenderunt angulos verticem reſpicientes D A V, D L G, D C P acutos, & tantummodo vnus D B I rectus ſuit oſtenſus eſt ramus D A minor, quàm D L, & D L vertici A propinquior, minor, quàm D B, atq; D B minor quolibet remotiore D C.

Notæ

Notæ in Propoſit. LXXII.

a ET minimus eorum D C, &c. *Textus videtur mendoſus; nam vt inferius oſtendetur, ramus breuiſſimus D C à vertice remotior, non ſemper minimus eſt omnium ramorum cadentium ex concurſu D ad ſectionem A B C; itaque legendum puto; D C eſt minimus ramorum cadentium ad peripheriam ſectionis B C N; quod manifeſtè indicatur ex determinatione in fine propoſitionis appoſita; inquit enim: propinquiores D C (ex ramis egredientibus ad ſectionem in ea parte) minores ſunt remotioribus, vbi conijcitur, Apollonium noluiſſe pronũciare, ramum D C minimum eſſe omnium, qui in ſectione A C N duci poſſunt, neque propinquiores D C minores eſſe quolibet remotiori ad partes vertieis A conſtituto, ſed tantummodo eorum, qui in ſectione C B, & in inferiori C N ducuntur minimum eſſe D C, & ei propinquiores minores eſſe remotioribus.*



b Atque ſic patet, quod D H maior ſit, quàm D I, &c. *Ex vndecimo enim Lemmate angulus D H M eſt acutus, & D I M obtuſus, & coniuncta D M erunt duo quadrata D H, H M maiora quadrato D M, quæ ſubtendit angulum acutum; quadratum verò D M maius eſt duobus quadratis D I, I M, ergo multo magis duo quadrata D H, H M ſimul ſumpta maiora ſunt duobus quadratis D I, I M ſimul ſumptis, & auferatur ex aggregato maiori quadratum minus H M, & ex minori tollatur quadratum maius I M (cum contingens H M propinquior vertici A minor ſit remotiore M I) remanet quadratũ D H maius quadrato D I, & propterea ramus D H maior erit ramo D I, & ſimili modo ramus D I maior oſtendetur ramo D C.* 68. 69. huius.

c Et iam demonſtratũ eſt, &c. *Scilicet: quia omnes rami ex D ad peripheriã A B ducti efficiunt cum ſuis tangentibus angulos verticem reſpicientes acutos; & propterea ramus D B maior erit quolibet alio ramo inter B, & A ducto; ideoque D B erit maximus cadentium in peripheria A B.* Lem. 11. Coroll. 64. 65. huius.

d Poſtea oſtendetur, quemadmodum hìc dictum eſt, &c. *Textus eſt valde corruptus, ſic reſtituendum puto; Oſtendetur, quemadmodum ſupra dictum eſt, (ſcilicet in ſecunda parte propoſ. 67.) quod D C minimus ſit omnium ramorum ad ſectionem infimam C N cadentium, & vt hic oſtenſum eſt, ſit minimus ramorum egredientium ad ſectionem B C; quare patet, quod D B ſit maximus ramorum cadentium ad ſectionem A C, & D C ſit minimus cadentium ad ſectionem B C N, & quod propinquiores maioribus, ſunt maiores remotioribus in peripheria ſectionis A C, & propinquiores minoribus, ſunt minores remotioribus in peripheria ſectionis B C N, & hoc erat oſtendendum.*

Quod

Quod autem infimus ramus breuisecans D C non sit necessario minimus omnium ramorum cadentium ad peripheriam sectionis A B, modo ostendetur.

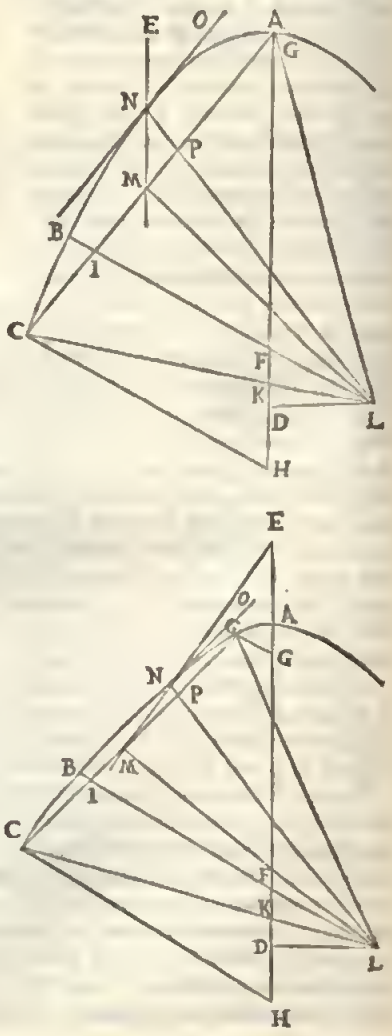
PROB. 6. Addit. *In coniectione duos ramos breuisecantes, ducere, quorum infimus maior sit ramo secante posito in peripheria à vertice, & suprema breuisecante comprehensa: oportet autem in ellipsi, vt rami secantes ad vnum eius quadrantem ducantur à concursu, inter axim minorem, & verticem collocato.*

In coniectione A B C, cuius vertex A axis A D, & in hyperbola, & ellipsi centrum E ducatur qualibet breuissima F B: postea secetur F G ex axi, ita vt punctum G non cadat supra verticem A, secenturque F H non maior, quàm F G, ducanturque recta H C, G G parallela ipsi F B occurrentes sectioni in C, & G, coniungaturque recta C G secans F B in I: patet, C I maiorem non esse, quàm I G; propterea quod G C, G H à parallelis secantur proportionaliter; Deinde ex C ducatur alia breuissima C K, occurrens B F vltra axim in L, iungaturque ramus G L: ostendendum est L C maiorem esse, quàm L G. Secetur C G bifariam in M, atque per M ducatur sectionis diameter M N parallela axi in parabola, & per centrum existens in reliquis sectionibus, occurrens sectioni in N, ducaturque O N sectionem contingens in N, iungaturque L M, & L N, qua secet G C in P. Quoniam G I aqualis, aut maior est, quàm I C, cadet punctum M bipartita diuisionis totius C G, vel in I, vel inter I, G, & in vtroque casu punctum N cadet inter G, & B (eoquod diameter M N parallela axi in parabola, aut ex centro E educta in reliquis sectionibus efficit angulum N M L ad partes verticis A) & ideo ramus L N cadens supra duos breuisecantes L C, L B ad partes verticis efficit cum tangente O N

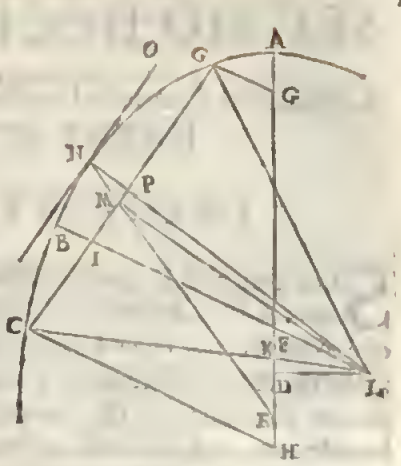
8. 9. 10. huius.

8. 9. 10. 26. 27. 28. huius.

33. 34. lib. 1.



te O N angulum acutum L N O verticem A respicientem; estque G C ordinatim applicata ad diametrum N M parallela tangenti verticali O N; ergo angulus L P G externus aqualis erit angulo L N O interno, & opposito, & ad easdem partes constituto; & ideo angulus G P L acutus quoque erit, at in triangulo P M L angulus internus L M P, & oppositus minor est externo L P G acuto; igitur angulus L M P acutus pariter erit, & L M C obtusus; suntq; in triangulis L M G, & L M C circa angulos inaequales, latera G M, M C aqualia, & L M commune; ergo L C maior est, quàm L G, quod erat faciendum.



Lem. 11. 5. lib. 2.

E contra fieri potest, vt infimus breuisecans ramus L C aqualis, aut minor sit ramo aliquo supra breuisecantem reliquum B L posito. Nam L C minor est, quàm B L, & maior effici potest ramo non vltra sectionis verticem A collocato ex prima parte huius propositionis, sed rami à concursu L educti cadentes inter puncta A, & B succesſiuè augentur quo magis à vertice A recedunt; Ergo ramus L C aqualis, aut minor erit aliquo ramo ab eodem concursu L educto inter puncta A, & B cadente; igitur manifestum est ramum breuisecantem C L infimum duorum breuisecantium, non esse semper minimum omnium ramorum cadentium ex concursu L ad peripheriam sectionis A B C, sed tantummodo minorem esse eorum, qui inter duo breuisecantes B L, C L cadunt, & reliquorum infra ramum C L cadentium, atque aliquorum in peripheria A N existentium propè maximum L B; quapropter existimandum est, incuria alicuius verba illa non sine Apollonij iniuria textui irrepsisse.

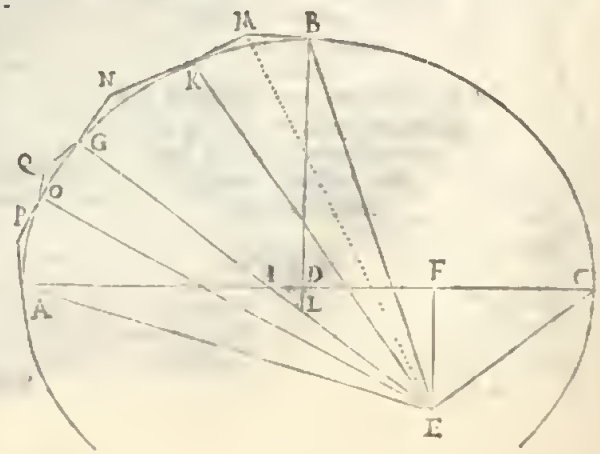
SECTIO

SECTIO DECIMAQVARTA

Continens Propoſ. LXXIII. LXXIV. LXXV. LXXVI. & LXXVII.

PROPOSITIO LXXIII.

SI ex concurſu E non exiſtente ſuper rectum minorem elli- a
pſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C ſit breuiſſima, vel duo breuiſecantes; vtique ramorum ſecantium ex illo concurſu egredientium maximus erit breuiſecans, qui ſectionis rectum ſecat, nempe E G, & illi proximior maior eſt remotiore; minimus verò eorum eſt, qui terminatur à vertice ſectionis proximiori concurſui, nempe E C, & illi propinquiores minores ſunt remotioribus, nempe inter C G. Si autem egrediantur ex illo tres breuiſecantes, & duo illorum ſecuerint menſuram, & vnus ſecucrit rectum, vtique qui rectum ſecat eſt maximus ramorum ſecantium: & ramorum inter mediam breuiſecantem, & remotiorem verticem ſectionis à concurſu cadentium, proximior illi, eſt maior remotiore, & maximus duorum reliquorum breuiſecantium eſt ille, qui vertici proximus eſt, & ramorum, inter proximiorem verticem ſectionis, & intermedium breuiſecantem cadentium, vicinior illi, maior eſt remotiore.



Eriga-

b Erigamus itaque ſuper D perpendicularem D B occurrentem E G in L; ergo eſt dimidium recti, & E non eſt indirectum, quia non egreditur ex E, niſi vnicus breuiſecans; inſuper lineæ breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt ab axi A C cum C, lineam maiorem, quàm ſecant rami illi. (51. 52. ex 5.) His poſitis manifeſtum eſt, quod E C F eſt acutus; atque E C minima eſt linearum egredientium ex E ad quadrantem E B, & illi propinquior, minor
c eſt remotiore; modo demonſtrandum eſt, quod E K maior quoque eſt, quàm E B, producamus itaque B M, M K tangentes, ergo M B E eſt obtuſus, & M K E acutus (29. ex 5.) quia breuiſſima egrediens ex K abſcindit cum A minorem lineam, quàm ſecat K E (57. ex 5.) eo quod K cadit inter duas lineas L B, L G; & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quare minora erunt duobus quadratis M K, K E, & M B maior eſt, quàm M K, ergo 70. huius.
B E minor eſt, quàm K E; & ſic demonſtratur, quod G E maior ſit, quàm K E; Nam ſi producamus G N tangentem, tunc N G E eſt rectus, quia G I eſt breuiſſima, & N K E obtuſus; ergo G E maior eſt, 30. huius.
quàm E K; itaque G E maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem G C, & minimus eorum E C, atque propinquior E C minor eſt remotiore.

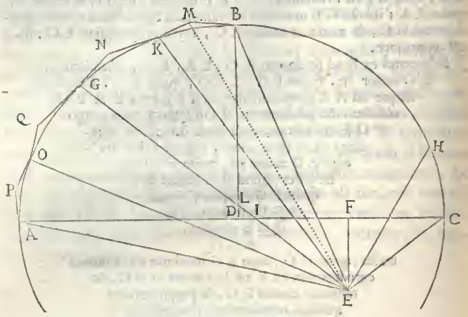
e Educamus ex E ad ſectionem A G, E A, E O, oſtendetur quod E G maior ſit, quàm E O, & E O, quàm E A. Erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P eſt obtuſus, & producamus P O Q tangentem; ergo P O E eſt acutus, quia linea breuiſſima egre- 57. huius.
diens ex O ſecat cum A lineam maiorem; ergo E O maior eſt, quàm E A: atq; ſic patet, quod E G maior ſit, quàm E O (29. ex 5.) quia Q G E eſt rectus, & Q O E obtuſus, & G Q maior, quàm O Q, ergo E G maximus eſt ramorum egredientium ex E ad ſectionem A B C, & minimus eorum E C, & propinquiores minimo, remorioribus minores ſunt, & propinquiores maximo, maiores ſunt remotioribus; quod erat oſtendendum.

PROPOSITO LXXIV.

DEinde sint E H, E G duo breuisecantes, & E G secet rectum B D. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & E C est minimus.

Producatur perpendicularis E F, quæ non cadet super centrum; si enim per centrum duceretur, duci posset ex E, aut vnicus breuisecans tantum (44. ex 5.) aut tres (45. ex 5.) quod est contra hypothesin; ergo E F per centrum non transit, cadat super C D; & quia ducuntur ex E duo breuisecantes, erit C F maior dimidio erecti, & E F æqualis Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vti antea demonstrauimus, quod E G maximus sit ramorū, & E C minimus; atque propinquior maximo, maior est, & propinquior minimo, est minor. a

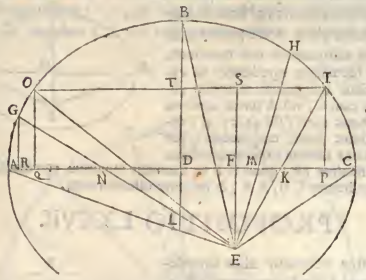
Ex 45. huius.



PROPOSITO LXXV.

POstea educamus ex E tres breuisecantes E G, E H, E I, & secent E I, E H mensuram, & E G secet rectum in L. Dico, quod E G est maximus ramorum egredientium ex E ad sectionem A B C, & ramorum inter A H cadentium propinquiores illi, maiores sunt remotioribus, & E I est maximus ramorum egredientium ad sectionem H C, & illi propinquiores maiores sunt remotioribus. a

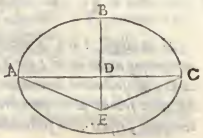
Quo-



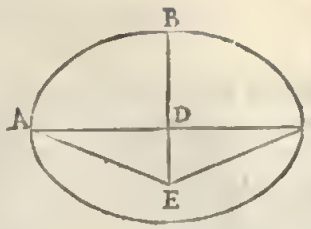
b Quoniam I K, H M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum cadentium ad illam sectionem (72. ex 5.) & propinquior illi maior est remotiore : nec non; quia H M, G N sunt duæ breuissimæ
c constat, vt dictum est, quod G E sit maximus ramorum cadentium vtrin- 74. huius.
d que ad sectionẽ A H. Dico etiam, E G maiorem esse, quàm E I; nam si producatur I O parallela ipsi A C, & iungatur E O, ducanturque perpendiculares I P, O Q, G R, E F S, quia G N, I K sunt breuissimæ erit 15. huius.
D P ad P K, quæ est, vt proportio figuræ, vt D R ad R N; ergo F P ad P K minorem proportionem habet, quàm F R ad R N, & diuidendo F K ad K P, nempe F E ad I P, minorem proportionem habet, quàm F N ad N R, nempe F E ad G R; ergo F E ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R, & propterea G R minor est, quàm I P, quæ est æqualis O Q, cuius punctum O remotior est à vertice, quàm G, & ideo E G maior est, quàm E O. (74. ex 5.) Et quia O T æqualis est T I erit O S maior quàm S I, & S E perpendicularis ad O I est communis; igitur O E maior est, quàm E I; & ostensa est E G maior, quàm O E; Ergo E G maior est, quàm E I, quod erat ostendendum.

PROPOSITIO LXXVI.

a SI ex concursu E in recto E B posito ellipsis A B C nõ educatur breuisecans præter E B, qui transeat per centrum; erit E B maximus ramorum secantium ex concursu ad sectionem egredientium.



Si vero ex illo educatur alius breuiſecans erit æqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus.

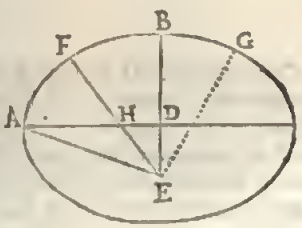


b

Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum C, vel A lineas maiores, quàm ſecent rami (illi 44. ex 5.) demonſtrabitur ductis tangentibus, per extremitates illorum (quemadmodum antea oſtenſum eſt) quod E B ſit maximus ramorum egredientium ad duos quadrantes C B, B A, & hoc erat oſtendendum.

PROPOSITIO LXXVII.

POſtea educatur alius breuiſecans E F; Dico, quod eſt æqualis vni breuiſecanti E G æque remoto à recto D B, & eſt maximus reliquorum omnium.



a

b

Quia B D, F H ſunt duæ breuiſſimæ, ergo rami egredientes ad ſectionem B F abſcindunt cum A maiores lineas, quàm ſecent breuiſſimæ, egredientes ab eorum extremitatibus: idem dicendum eſt de ramis educti ad ſectionis peripheriam B G, & rami educti ad peripherias C G, A F abſcindunt cum C, vel A lineas minores (45. ex 5.) conſtat itaque adhibitis lineis tangentibus, vt dictum eſt, quod E F ſit maximus ramorum ſecantium ex E ad C B A egredientium, excepto vno E G, cui eſt æqualis, quod erat oſtendendum.

c

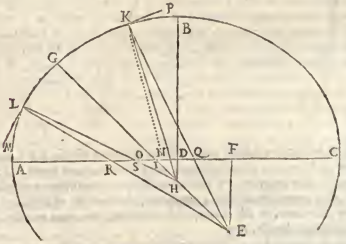
Notæ in Propoſit. LXXIII.

PRO clariori intelligentia propoſitionum huius ſectionis hæc præmitto.

LEMMA XII.

Si in ellipſi A B C à concurſu E ductus fuerit ramus E G ſecans vtrumque axim in H, & I, cuius portio G I, inter axim maiorem A C, & ſectionem intercepta, ſit linea breuiſsima; dico, quod quilibet alius ramus E K inter breuiſecantem G E, & axim minorem interceptus, efficit cum ſectionem tangente K P angulum E K P acutum, reſpi-

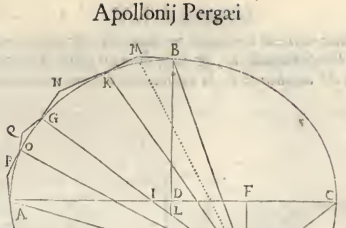
respicientem verticem C concursui propinquiorem : & quilibet ramus E L inter breuisecantem G E, & axim maiorem positus efficit cum tangente L M angulum E L M respicientem eundem verticem A acutum.



Ducatur E F perpendicularis ad axim maiorem, cum secans inter verticem C, & centrum D in F, & ex concursu axis minoris B H, & breuissimæ G E, scilicet ex H ducantur rectæ H K, & H L; pariterque ex punctis, K, & L ducantur ad axim maiorem A C lineæ breuissimæ K N, L O, ei occurrentes in N, & O. Quoniam (ex præmisso Lemmate 8.) à concursu H ducitur ramus H K inter breuisecantes H B, H G intercepti; ergo H K cadit infra breuissimam K N ad partes verticis C; est vero angulus N K P rectus à tangente, & breuissima contentus; ergo angulus H K P erit acutus, cum H K cadat inter N K, & tangentem K P; cadit vero E K infra ramum H K versus C; igitur angulus E K P respiciens verticem C proximiorem concursui E erit acutus. 29. 30. huius.

Similiter (ex eodem Lemmate 8.) quia ramus H L ducitur inter breuisecantem H G, & verticem A à concursu E remotiorem, cadet ipse supra breuissimã L O, estque angulus O L M ad partes verticis A rectus; ergo H L M acutus erit, cumque E L cadat supra H L versus A; igitur angulus E L M, verticem A remotiorem respiciens, erit acutus, quod erat ostendendum. Ibidem.

a Si à concursu E non existente super recto ellipsis A C, producatur vnicus ramus secans ipsam A C, vt E G, cuius segmentum G I, & A C sit breuissimum, vel duo breuisecantes; vtique maximus secantium ramorum egredientium ex illo concursu, est breuisecans, qui rectum sectionis abscindit, nempe E G, &c. *Textum mendosum sic restituendum censeo. Si ex concursu*



concurſu E non exiſtente ſuper axim rectum minorem ellipſis A B C ducatur ad ſectionem A B vnicus ramus vtrumque axim ſecans, cuius portio G I inter ſectionem, & axim maiorem A C interceptæ ſit linea breuiſsima; vel ducatur præter E G alius ramus breuiſecans, menſuram tantummodo abſcindens; vtique ramorum ſecantium, ex illo concurſu egredientium, maximus erit ille, qui axim rectum ſectionis diuidit, &c.

Erigamus itaque ſuper D perpendicularem, &c. *Scilicet ex centro ſectionis D eleuetur D B perpendicularis ad axim maiorem A C, occurrens ſectioni in B, & ipſi E G in L, & propterea D B erit ſemiſsis recti axis, & punctum E in axi B D non exiſtit ex hypotheſi, &c.* b

Quoniam non egreditur ex E niſi vnus breuiſecans, ergo lineæ breuiſsimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum, abſcindunt ab axi cum A C, L A lineam maiorem, quàm ſecent illorum rami (51. 52. ex 5.) & iam patet, quod ſi ita ſe res habet L E C eſt acutus; quia E C breuiſsima eſt linearum egredientium ex E ad quadrantem A B, & propinquior illi, minor eſt remotiore, &c. *Sic legendum puto: Quia præter E G, vtrumque axim ſecantem nullus alius breuiſecans duci poſſe à concurſu E ad ſectionem ſupponitur, ergo lineæ breuiſsimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum in quadrante C B abſcindunt ab axi A C cum vertice C lineas maiores, quàm ſecent rami (51. 52. ex 5.) pariterque conſtat, quod angulus E C F ſit acutus, atque ramus E C eſt minimus egredientium ex E ad quadrantem C B, & propinquior minimæ, minor ſit remotiore. Demonſtrandum modo eſt, quod K E maior quoque eſt, quàm L B, &c.* c

ea. 65. huius.

Producamus itaque M B, M K tangentes; ergo M B E eſt obtuſus, & M K E eſt acutus (29. ex 5.) quia breuiſsima egrediens ex K abſcindit A lineam minorem, quàm A E (57. ex 5.) eo quod K eſt inter duo ſegmenta L B, L G: & iungamus M E; ergo duo quadrata M B, B E minora ſunt, quàm quadratum M E, quæ minora ſunt duobus quadratis M K, K E, &c. *Ideſt: ex punctis B, K ducantur duæ tangentes ſectionem M B, K M occur-* d

occurrentes in M, & quia angulus D B M rectus est contentus ab axe, & tangente, & cadit B E inter C, & D ergo angulus E B M est obtusus; postea, quia E K cadit infra breuissimam E G, & supra minorem axium B D, ergo angulus E K M respiciens verticem C propinquiorem concursui, erit acutus, & iuncta M E erunt duo quadrata E B, B M minora quadrato E M, estque quadratum E M minus duobus quadratis E K, K M circa acutum angulum (cum priora angulum obtusum comprehendant.) Igitur duo quadrata E B, B M simul sumpta minora sunt duobus quadratis E K, K M: estque quadratum M B maius quadrato M K, cum contingens M K, proximior vertici A axis maioris minor sit remottore B M; igitur quadratum E B, scilicet residuum minoris summa minus erit quadrato E K, & propterea ramus E B minor erit, quàm E K. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 70. huius.

c Et educamus ex E ad sectionem A G, E A, E O, & patebit, quod E G maior sit, quàm E O, & E O, quàm E A: erigamus itaque ad A C perpendicularem A P; ergo E A P est obtusus: & ducamus P O Q tangentem; ergo P O E est acutus, quia linea breuissima egrediens ex O abscindit cum A lineam maiorem, & P O est maior, quàm P A; ergo E O maior est quàm E A, atque sic patet, quod E G maior sit, quàm E O, &c.

Demonstratio postrema partis huius propositionis neglecta ab Apollonio ob sui facilitatem occasionem errandi alicui prabere posset, propter verba illa postrema textui superaddita; non enim ex maiori summa duorum laterum P O, O E sustaferatur maior O P, & ex minori summa P A, A E austeratur minor P A, necessario residuum maioris, ideest E O maior erit quam E A residuum minoris; itaque sensus huius contextus talis erit.

Ex concursu E ad sectionem A G ducantur rami E A, & quilibet alius E O; ostendendum est, E G maiorem esse, quàm E O, & E O maiorem, quàm E A: ducantur A P, Q O tangentes sectionem in A, & O conuenientes in P, & tangenti G Q in Q, manifestum est angulum E A P obtusum esse, cum angulus C A P sit rectus pariterque quilibet ramas E O inter breuisecantem E G, & verticem A remotiorem interceptus efficit angulum E O P, verticem A respicientem acutum, & sic reliqui omnes rami inter puncta G, & A cadentes; quare (ex Corollario propositionum 64. & 65.) ramas E A minor erit quolibet ramo E O inter verticem A, & G cadente: rursus, quoniam breuisecans E G constituit cum tangente angulã E G Q rectum; quare ex concursu E ad sectionis peripheriam G A omnes rami cadentes efficiunt cum tangentibus angulos, verticem A respicientes, acutos, & vnus tantummodo E G Q est rectus; igitur (ex Coroll. propos. 67. huius) ramus E O vertici A propinquior minor est remottore E G; Quapropter ramus breuisecãs E G maximus est omnium ramorum secantium ad peripheriam A B C cadentium. Conuers. 32. lib. 1. Lem. 12. 29. 30. huius. Lem. 12.

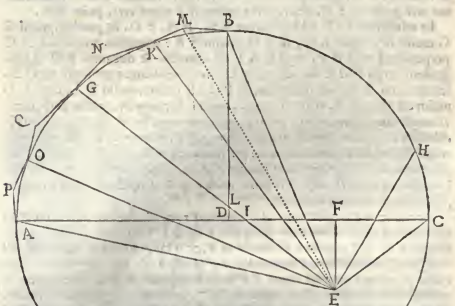
At adhuc non constat, ramum E C minimum esse praedictorum ramorum omnium, nisi prius ostendatur, E C minorem esse quolibet ramo ad peripheriam A G educto: & hoc etiam ob sui facilitatem neglectum fuit ab Apollonio. Absoluetur tamen hac ratione.

Quoniam perpendicularis E F cadit inter C, & D, igitur A F maior est, quàm C F, & F E est communis circa angulos rectos in triangulis C F E, A F E, igitur C E minor est, quàm E A: estque E A minor quolibet alio E O inter A, & G cadente, igitur E C minor est omnium ramorum cadentium ad peripheriam A G, sed prius minor ostensus fuit reliquis omnibus cadentibus ad peripheriam C B G; igitur ramus E C minimus est omnium secantium, quod erat ostendendum.

Notæ

Notæ in Propos. LXXIV.

ERgo E F per centrum non transit, cadat super C D, & quia producti sunt ex E duo breuisecantes; ergo C F excedit dimidium erecti, & E F æqualis est Trutinæ (52. ex 5.) patet itaque, vt antea demonstrauimus, quod E G sit maximus ramorum, & E C minimus, &c. a



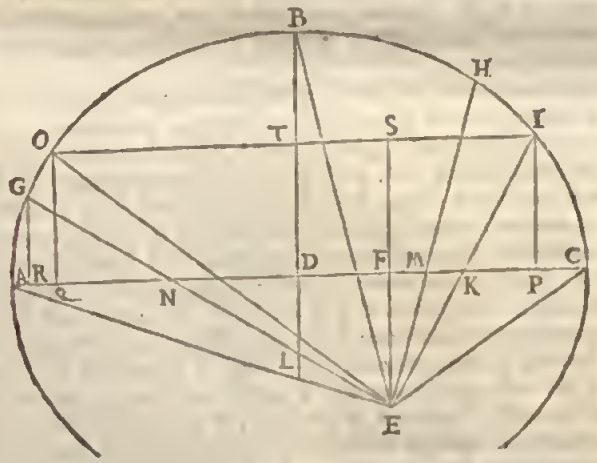
Quoniam in 11. huius ostensum est, quod semiaxis minor ellipsis est ramus breuissimus, ergo si incidentia perpendicularis E F super axim A C, idest punctum F est centrum ellipsis educerentur ex concursu E tres breuisecantes, nimirum, E H, E G, & E F productæ, quæ esset axis minor ellipsis: hoc autem est contra hypothesim, cum ductæ sint ex E duo breuisecantes: ergo eorum vnus E H mensuram C F secat, quæ minor esse debet semisse axis maioris C D; igitur ex conuersa propositione 50. huius, mensura C F maior erit semisse lateris recti, & (ex conuersa propos. 52. huius) erit perpendicularis E F æqualis Trutinæ. Demonstratio huius propositionis neglecta ab Apollonio, propterea quod eodem ferè modo, ac præcedens ostendi potest, breuissimè perficietur in hunc modum.

Propos. 67. huius. *Quoniam à concursu E vnicus tantum breuisecans E H ad quadrantem C B ducitur; igitur C E minimus est omnium ramorum cadentium ad sectionis peripheriam C B, & E C vertici B propinquior minor est remotiore E H, & E H minor, quàm E B: rursus, quia ramorum cadentium ex E ad peripheriam* Ex 29. 30. huius. *B G vnus tantummodo breuisecans E G constituit cum tangente N G angulum rectum,*

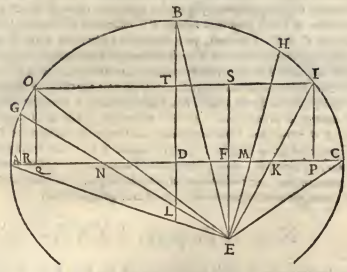
rectum, & reliqui omnes rami cadentes super totum arcũ G B, constituunt cum Lem. 12.
suis tangentibus angulos acutos, respicientes verticem C; igitur quilibet ramus Coroll.
E B propinquior vertici C minor est quolibet remotiore ramo E K, & E K mi- prop. 67.
nor est remotiore E G: & propterea ramus E G maximus est omnium cadentium huius.
ad peripheriam C B G. Postremò, quia ramorum cadentium inter breuisecan-
tem E G, & remotiorem verticem A axis maioris, vnicus tantũ E G efficit cum 29. 30.
sua tangente angulum E G N rectum; reliqui vero omnes cadentes inter G, & huius.
A efficiunt cum suis tangentibus angulos, respicientes verticem A remotiorem, Lem. 12.
acutos; igitur (ex Corollario propos. 67. huius) ramus E G maior est quolibet huius.
ramo E O versus A propinquiore, & E O maior est, quàm E A: quapropter
breuisecans E G vtrumque axim abscindens maximus est omnium ex E caden-
tium ad semiperipheriam ellipsis C B A, & ramus E C, vt in praecedenti dictũ
est, minimus erit omnium, atque propinquiores maximo ex eadem parte maio-
res erunt remotioribus, & cadentium ad peripheriam C B G minimo C E pro-
pinquiores, minores erunt remotioribus, quod erat ostendendum.

Notæ in Propositi. LXXV.

a POstea ducamus ex E tres breuisecantes E G, E I, E H, & secent E I mensuram, & E G secet rectum in L, &c. *Ideſt: Postea si ex concursu E ducti fuerint tres breuisecantes E G, E I, E H; quorum duo E I, E H secent mensuram in K, & M: E G vero secet axim rectum in L, & axim maiorem A C in N. Dico, &c.*



b Quoniam I K, N M sunt duæ breuissimæ constat, quod E I maximus sit ramorum egredientium ad illius sectionem (52. ex 5.) & reliquorum ramorum propinquior illi, maior est remotiore, &c. *Ideſt: Quia in quadrante elli-*



te ellipſis C B ducuntur à concurſu E duo breuiſecantes E I, E H; igitur (ex propoſitione 72. huius) erit breuiſecans E I vertici A propinquior maximus omnium ramorum cadentium ex concurſu E ad ellipſis peripheriam C H; & propinquior maximo E I maior erit remotiore, ſed non omnium ramorũ cadentium ad quadrantem C B, ſed eorum ſolummodo, qui inter verticem C, & infimum breuiſecantem E H, & aliquorum propè ipſum; nam rami ſecantes cadentes propè punctum H hinc inde ſucceſsiuè augentur, vt dictum eſt in notis propoſ. 67. in eiuſque Corollario.

Nec non, quia H M, G N ſunt duæ breuiſſimæ, conſtat, vt dictũ eſt, quod G E ſit maximus ramorũ egredientiũ ex vtroque latere eius ad A H, &c. C

Quorũ verborũ ſenſus hic eſt. Quia ex concurſu E ducuntur duæ breuiſecantes E G & E H ad ſemiellipſim A B C, quarum E G ſecat vtrumq; axim, at E H ſecat tantummodo menſuram; ergo, ſicuti in præcedenti propoſ. 74. oſtenſum eſt, erit ramus E G maximus omniũ cadentiũ ad peripheriam H A, &c. At quia dubitari poſſet de certitudine huius conſequentiæ, quandoquidem hypotheſes non ſunt omnino eædem; in propoſitione enim 74. non tres, ſed duo tantummodo breuiſecantes ex concurſu E ad ſectionem C B A ducebãtur, hic vero etiam tertia breuiſecans ducitur: ſed ſi conſideretur progreſſus Apollonij, eandem concluſionem ex vtraque hypotheſi deduci poſſe percipitur; nam (ex propoſitione 72. huius) breuiſecans E H, infra breuiſecantem E I poſitus, minimus eſt omnium ramorum cadentium ex E ad peripheriam H B ellipſis, & propinquior minimo E H minor eſt remotiore, reliquorum vero ramorum cadentium ad quadrantem B A maximus eſt breuiſecans E G, vt oſtenſum eſt in præcedenti propoſit. 74. ex Lemmate 12. huius, & ex Corollario propoſit. 67, atque propinquior ramus maximo E G eorum, qui ad quadrantem B A cadunt maior eſt remotiore; quapropter ramus E G maximus eſt omnium ramorum ex E ad ellipſis peripheriam H A cadentium.

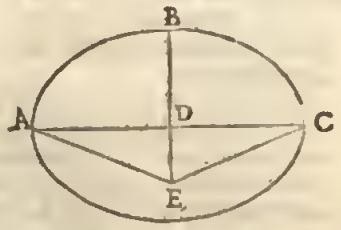
Dico

d Dico etiam, quod E G maior ſit, quàm E I, &c. *Ideſt: oſtendetur etiam, quod ramus E G maximus etiam ſit omnium ramorũ cadentium ad peripheriam C H, propterea quod E G oſtendetur maior E I maximo eorum, qui ad peripheriam C H duci poſſunt. Ducatur ex puncto I recta I O parallela axi minori A C, qua ſecabit axim minorem, & ſectionem, cum punctum I cadat inter vertices C, & B duorum axium; ſecet igitur ſectionem in O, coniungaturque E O, atque ex punctis I, O, G, E ducantur perpendiculares ad axim I P, O Ω, G R, E F S, qua ſecent axim in P, Ω, R, F, & I O in S, & quia G N, & I K ſunt breuiſſima; ergo D R ad R N, atque D P ad P K eandem proportionem habent, nimirum eam, quàm habet latus tranſuerſum ad rectum; eſt verò K F minor, quàm D K, atque R F maior, quàm D R; igitur F P ad P K minorem proportionem habet, quàm D P ad P K, ſeu quàm D R ad R N, & multo minorem, quàm F R ad R N; quare diuidendo F K ad K P minorem proportionem habebit, quàm F N ad N R, & propter parallelas F E, I P, & ſimilitudinem triangulorum E K F, I K P eſt E F ad I P, vt F K ad K P; igitur E F ad I P minorem proportionem habet, quàm F N ad N R; ſed propter ſimilitudinem triangulorum E F N, G R N eſt E F ad G R, vt F N ad R N; igitur eadem E F ad I P minorem proportionem habet, quàm ad G R; & propterea I P, ſeu ei aequalis O Ω (in parallelogrammo rectangulo P O) maior erit, quàm G R, & propterea punctum O recedit à puncto G verſus B, ideoq; ramus E G maximus, maior erit ramo E O, &c.* 15. huius. 74. huius.

Notæ in Propoſ. LXXVI.

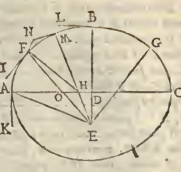
a SI autem non educatur ex concurſu E ad rectum E B ellipſis A B C breuiſecans præter tranſeuntem per centrum, vt E B, vtique erit maximus ramorum ſecantium egredientium ex concurſu ad ſectionem.

Si vero eductus fuerit ex illo alius breuiſecans, ipſe erit ramus maximus, &c. *Imperceptibilis eſt ſenſus huius textus, quia, prater phraſis Arabica difficultatem, nonnulla verba in textu deſiderantur; itaq; ſic legendum puto. Si ex concurſu E in recto E B poſito ellipſis A B C non educatur breuiſecans prater E B tranſeuntem per centrum, erit E B maximus ramorum ſecantium ex concurſu ad ſectionem egredientiũ.*



Si vero ex illo educatur alius breuiſecans, erit aqualis vni breuiſecanti ex altera parte recti poſito, & omnium reliquorum erit maximus: Si enim hæc extrema verba non opponerentur, propoſitio non eſſet vera, vt oſtendetur.

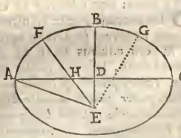
b Quia breuiſſimæ egredientes ab extremitatibus reliquorum ramorum abſcindunt cum A, vel B lineam maiorem, quàm ſecet ramus illius (49. ex 5.) demonſtratum ergo eſt in lineis tangentibus ad extremitatem illius, quemadmodum antea, &c. *Mendoſe citatur quadrageſima nona huius, debet potius legi 43. in qua oſtenſum eſt, quod quotieſcunque ramus E B ad ſemiaxim*



miaxim minorem E D habet eandem, aut maiorem proportionem, quàm latus transuersum A C ad eius latus rectum; tunc nullus alius ramus ad sectionem A B C breuiscans duci potest, & quælibet linea breuissima vt F H ducta ex puncto F ad axim A C cadit infra ramum E F ad partes centri, & propterea si per F ducatur ex 29. 30. huius. *F I contingens ellipsin quilibet ramus E F efficiet cum tangente angulum E F I respicientem verticem A acutum: Similiter si ducatur A K contingens sectionem in A co-* ex 32. lib. 1. *niungaturque E A, erit quoque angulus E A K acutus, & ducta B L contingente sectionem in B erit angulus E B L rectus; quapropter omnes rami ex concursu E ad quadrantem A B ducti efficiunt cum suis tangentibus angulos respicientes* Coroll. 67. huius. *verticem A acutos, & vnus tantummodo E B L est rectus; igitur ramorum cadentium ex E ad quadrantem B A minimus est E A, & quilibet ramus E F propinquior vertici A minor est quolibet remotiore; & propterea E B erit maximus: simili modo E B maior erit quolibet ramo E G in quadrante B C existente; Et hic est sensus, ni fallor illorum verborum*; demonstrabitur in lineis tangentibus, quemadmodum antea ostensum est, &c.

Notæ in Propoſit. LXXVII.

a



POstea educatur E F, qui est maximus ramorum, &c. *Repono hic similiter verba, quæ in textu desiderantur; Postea educatur alius breuiscans E F; Dico, quod est æqualis vni breuiscanti E G æquè remoto à recto D B, & est maximus reliquorum omnium.*

Quia B D, F H sunt duæ breuissimæ; ergo rami egredientes ad sectionem B F abscindunt cum A lineas maiores, quàm secent breuissimæ egredientes ab eorum extremitatibus, & rami egredientes ad duas peripherias C B, F A abscindunt cum A, vel C lineas minores (52. ex 5.) &c. *Quia in ellipsi semiaxis minor B D, & breuissima F H* Lem. 8. huius. *concurrunt in E; ergo quilibet ramus ex E ad peripheriam F B ductus cadit infra breuissimam ab eius termino ad axim A C ductam: similiter, quia ramus E G æquè recedit ab axi D B, ac ramus E F; propterea, ne dum ramus F E* Ibidem. *æqualis erit ramo E G, sed similiter quilibet alius ramus incidens inter E B, & E G cadet infra breuissimam ab eius termino ad axim A C ductam versus* Ibidem. *D, & rami cadentes ad peripherias A F, & C G cadunt supra breuissimas ab eorum terminis ad axim C A ductas ad partes A, & C.*

Constat itaque, vt dictum est de lineis tangentibus, quod E F sit maximus ramorum secantium egredientium ex E ad A B C, quod erat ostenden-

dendum, &c. *Quæ postrema verba sic intelligi, ac corrigi debent. Quia quilibet ramus ex E ad A F ductus cadit supra breuissimam ad partes A ab eius termino ad axim C A ductam; igitur, vt multoties dictum est, constituit cum sua tangente angulum respicientem verticem A acutum, sicuti angulus E A K acutus quoque est, & omnium ramorum ad peripheriam A F cadentiũ tantummodo angulus E F I est rectus; igitur omnium ramorum ex E ad peripheriam A F cadentium maximus est F E remotissimus à vertice A, estque ramus E G aqualis E F, & E G maximus est ramorum cadentium ex E ad peripheriam G C; igitur ramus E F maximus etiam est ramorum cadentium ad peripheriam G C: postea ducto quolibet ramo E M inter F, B, & M N tangente sectionem in M, qua conuenit cum tangente I F in N, quia E M, vt dictum est, cadit infra breuissimam ex M ad axim B A ductam, cum qua contingens N M angulum rectũ constituit, (ex 30. huius) ergo angulus E M N respiciens verticem A est obtusus, & angulus E F N est rectus, cum F O sit breuissima, igitur duo quadrata E F, F N maiora sunt duobus quadratis E M, M N simul sumptis, & ablatum quadratum M N ex minori summa mains est ablato quadrato N F, cum contingens N F vertici A maioris axis propinquior sit; ergo quadratum E F mains ex quadrato E M, ideoque ramus E F maior erit quolibet ramo E M inter F, & B posito. Non secus ostendetur E M maior quàm E B; quare ramus E F maximus erit omnium cadentium ad peripheriam F B. Eodem modo ramus breuisecans E G maximus erit omnium cadentium ad peripheriam G B; & propterea ramus E F maximus erit omnium ad peripheriam F B G cadentium; Quapropter ramus breuisecans E F aqualis erit vni tantummodo E G aquè ab axi remoto, & maximus omnium ramorum ex concursu E ad semiellipsim A B C cadentium, quod erat ostendendum.*

Lem. 1. huius.

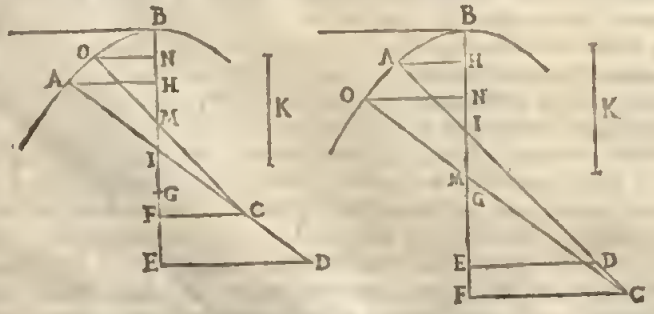
Coroll. Prop. 67. huius.

70. huius.

Sicuti in prioribus propositionibus factum est, reperientur, quotnam rami inter se aquales à puncto concursus ad coniectionem duci possunt, qua occasione afferam propositiones aliquas non iniucundas, quarum prima erit.

Si ad coniectionem B A à concursu D vnicus tantum breuisecans D A duci possit, & ducatur quælibet F C parallela perpendiculari D E

PROP. 7. Addit.

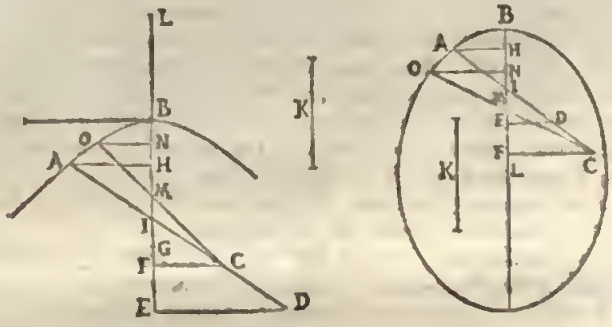


inter productionem breuissimæ, & axim intercepta quem secet in F, reperia-

peraturque Trutina K minoris, vel maioris mensuræ F B: dico perpendicularem C F minorem esse Trutina K.

Secentur primo in parabola abcissæ B H, & B N æquales trienti excessus inæqualium mensurarum supra semirectum (vt præcipitur in propositione 51. huius) manifestum est, abscissam B N minorem esse ipsa B H, quando B F minor est, quàm B E, & maior, quando B F superat ipsam B E; eo quod eorum tripla, vna cum semirecto, idest mensura B F minor fuerat in primo casu, & maior in secundo, quàm mensura B E.

Lem. 7. huius. *In hyperbola vero, & ellipsi fiat proportio rectæ H L ad semiaxim transuersum L B subtriplicata eius, quàm inuersa L E segmentum L G homologum lateri transuerso habet ad semiaxim transuersum (ex præscripto propositi. 52. & 53. huius) pariterque fiat proportio N L ad L B subtriplicata eius quàm inuersa minoris L F in primo casu, & maioris in secundo, segmentum homologum lateri transuerso habet ad L B.*



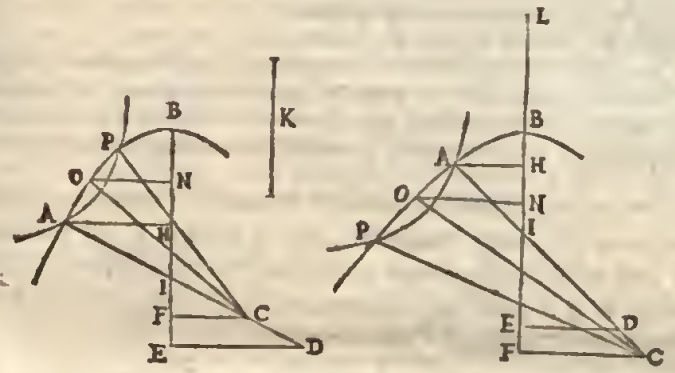
Quoniam in primo casu maius segmentum G L ad eandem L B habet maiorem proportionem, quàm minus segmentum ex L F dissectum; igitur earum subtriplicata proportiones inæquales erunt, videlicet H L ad L B maiorem proportionem habebit, quàm N L ad ipsam L B, & propterea H L maior erit, quàm N L, & ablata communi L B, erit H B abscissa maioris mensura maior, quàm N B abscisa mensura minoris. Similiter ostendetur in secundo casu, quod abscissa N B maioris mensura maior est, quàm B H. Ostendendum modo est, perpendicularem C F in vtroque casu minorem esse trutina K; Si

51. 52. huius. *enim hoc verum non est, si fieri potest, sit C F maior trutina K; igitur ex concursu C ad sectionem B A nullus ramus breuisecans duci potest, quod est contra hypothesim; erat enim A I breuissima; quare C F non erit maior trutina K. Sit secundo C F æqualis K, si fieri potest, ergo ramus principalis C O ductus legibus propositi. 51. 52. huius cui competit trutina K erit breuisecans singularis eorum, qui ad sectionem duci possunt, nec vllus alius, præter C O, breuisecans erit: cadit vero ramus C A infra, vel supra ramum C O, propterea quod abscissa B H, & B N inæquales ostensa sunt; igitur ramus C A diuersus à breuisecante singulari C O non erit breuisecans, quod est contra hypothesin;*

non

non ergo perpendicularis C F aqualis erit Trutinæ K, sed priùs, neque maior illa erat; igitur perpendicularis C F necessario minor erit Trutina K; quod erat ostendendum.

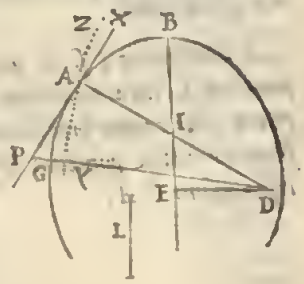
Iisdem positis, si in productione breuissimæ A I sumatur quodlibet punctum C citra terminum D perpendicularis D E, à puncto C duci poterit alter ramus breuisecans supra C A incedens; & si punctum C sumatur vltra punctum D poterit ex C duci alter ramus breuisecans infra ipsum C A. PROP. 8. Addit.



Quoniam qualibet recta C F parallela perpendiculari D E interposita inter productionem breuissimæ A I, & axim minor est Trutina K noua mensura B F (ex præcedenti propos.) propterea ramus principalis C O cadit supra ipsum C A, quando B F minor est, quàm B E, & tunc quidem duci potest hyperbola ex puncto A circa asymptotos (vt in propositione 51. & 52. factum est) quæ producta occurret sectioni B A inter B, & O, vt in P, & coniuncto radio C P, erunt duo rami C A, & C P breuisecantes, quorum infimus est C A. Si vero punctum C sumatur vltra punctum D, tunc quidem mensura B F maior erit, quàm B E, & propterea abscissa N B maior, quàm H B, & ideo principalis ramus C O cadet infra ramum C A; & denuo facta eadem constructione propositi. 51. & 52. huius, erunt duo rami C P, & C A breuisecantes, quorũ supremus versus B erit C A, quod erat probandum. 51. 52. 53. huius.

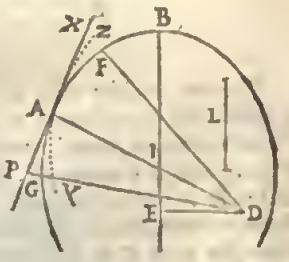
Sit coniectio, vel ellipsis portio quadrantis B A G, cuius axis B E, perpendicularis E D, cuiusque Trutina L sit minor perpendiculari D E, & centro D, interuallo cuiuslibet rami secantis D A circulus Z A Y describatur, & ex puncto A ducatur recta A X contingens sectionem: PROP. 9. Addit.

nem: Dico, quod circumpherentia Z Y secat tangentem rectam lineam x A, & coniectionem B G in puncto A.



51. 52. huius. Quoniam perpendicularis D E ponitur maior trutina L; ergo quilibet ramus D A cadit supra breuissimam ex puncto A ad axim B E ductam: efficit vero breuissima cum tangente 29. 30. huius. A x angulum rectum; ergo angulus D A x est acutus; & propterea recta A x cadit intra circulum A Z; sed A x cadit extra coniectionem 37. 36. lib. 1. B A, quàm contingit; ergo circumferentia Z A cadit extra sectionem B A, & extra tangentem A x: postea ducatur quilibet ramus D G infra ramum D A secans circumferentiã circuli in Y: & quia ramus D A propinquior est vertici B, quàm D G, erit D A minor, 64. 65. huius. quàm D G; estque D Y æqualis D A (cum sint ambo radij eiusdem circuli) ergo D Y minor erit, quàm D G: & propterea quodlibet punctum Y peripheria circularis infra punctum A positum cadet intra coniectionem B G; & ideo circumferentia Z A Y secat tangentẽ, & coniectionẽ in A, quod erat propositum.

PR. 10. Addit. Isdem positis, sit perpendicularis D E æqualis Trutinæ L, & sit D A singularis ille ramus breuisecans, qui ex concursu D ad sectionem 51. 52. huius. B G duci potest; perficiaturque constructio, vt antea factum est; Dico, circulum Z A Y secare coniectionem in A, & contingere rectam A x.



Ducatur quilibet ramus D F supra breuisecantem D A, secans circuli peripheriam in Z, & quilibet alius ramus D G infra D A secans eandem peripheriam in Y. Et quia ex concursu D ad sectionem B G vnicus tantum breIbidem. uisecans D A duci potest; igitur ramus D F 67. huius. propinquior vertici B minor est remotiore D A, & D A propinquior vertici B minor est remotiore D G: suntque rectæ D Z, D Y æquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F, & D Y minor, quàm D G; & propterea quodlibet punctum Z circuli supra A sumptum cadit extra coniectionem B F A, & quodlibet infimum punctum Y eiusdem circuli cadit intra eandem coniectionem A G; quapropter circumferentia circuli Z A Y secat coniectionem B A G in A. Postea quia recta A x contingens sectionem in A perpendicularis est ad breuisecantem D A, cum I A sit breuissima; igitur recta linea x A, qua perpendicu29. 30. huius. laris est ad radium D A, continget circulum Z A Y. Quapropter circulus Z A Y secant coniectionem B A G in A, & tangit eandem rectam lineam A x, quàm contingit sectio conica B A G, & in eodem puncto A, quod erat ostendendũ.

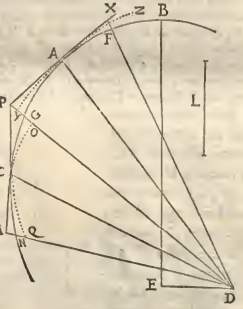
COROL-

COROLLARIVM.

Hinc conſtat, ſupremam circuli peripheriam A Z cadere in locum à tangente X A, & coniſectionem B A contentum, infimam vero circuferentiam A Y cadere ne dum infra tangentem, ſed etiam infra coniſectionem A G; eoquod recta A X cadit extra circuli peripheriam A Z, quàm contingit in A, & eadem circumferentia A Z cadit extra ſectionem A B, quàm ſecat in A, vt dictum eſt.

Mirabile quidem hoc videri poterit aliquibus, qui contingentiæ angulos, quos vocant, verè angulos eſſe cenſent; nam hic duæ circumferentiæ curuæ, conica nimirum B A G, & circularis Z A Y ſe mutuo ſecant in A, & tamen ambo tanguntur ab eadē recta linea A X in eodem puncto A, in quo illæ ſe mutuò ſecant. Vnde colligent etiam, quod anguli contingentiæ facti à coniſectione B A G, & recta linea X A non ſunt æquales inter ſe, quando punctum A in vertice axis non exiſtit; num duo anguli contingentiæ circumferentiæ circularis, & rectæ tangentis X A æquales ſunt inter ſe: at angulus contingentiæ ſectionis conicæ ſupremus reſpiciens verticem B maior eſt angulo contingentiæ circularis, vt dictū eſt: infimus vero angulus contingentiæ à ſectione conica, & eadem tangente contentus minor eſt eodem angulo contingentiæ circularis, & propterea ſupremus angulus contingentiæ ſectionis conicæ maior erit inferiori.

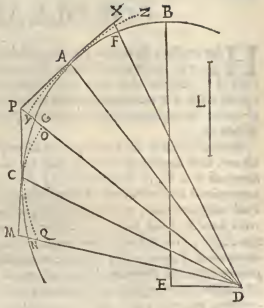
PROP. 11. Addit. Ex 51. 52. 53. huius.



Sit perpendicularis D E minor trutina L, ſintque D A, & D C duo illi rami, qui tantummodo breuiſecantes eſſe poſſunt omnium ramorum ex concurſu D ad ſectionem B C cadentium; atque centro D, interuallo D A deſcribatur circulus Z A Y; pariterque centro D, interuallo D C deſcribatur circulus O C Q; ducanturque rectæ X P, M P contingentes coniſectionem in A, & C. Dico, circulū Z A Y contingere coniſectionem in A, & extra ipſam cadere, at circulum O C Q contingere eandem coniſectionem in C, & intra ipſam cadere.

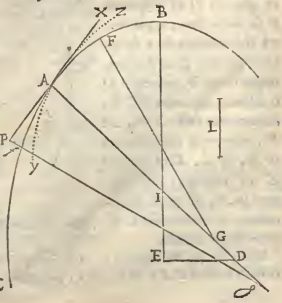
Ducantur quilibet rami D F, D G ſupra, & infra breuiſecantem D A, ſecantes circulum Z A Y in Z, & Y; pariterque ducantur quilibet rami D G,

D N supra, & infra breuiscantem D C, secantes circulum O C Q, in O, & Q, dummodo D G non ducatur infra D C in primo casu, nec supra D A in secundo. Quoniam ramus D A supremus duorum breuiscantium maximus est omnium ramorum cadentium ad peripheriam B A C; igitur D A maior
72. huius. *erit, quàm D F, & quàm D G; sunt verò D Z, & D Y æquales eidem D A (cum sint radij eiusdem circuli) ergo D Z maior est, quàm D F; pariterque D Y maior est quàm D G: & propterea duo qualibet puncta Z, Y eiusdem circuli Z A Y cadunt extra coniectionem B A G; & ideo circulus Z A Y tantummodo in puncto A coniectionem extrinsecus tangit.*



Postea quia ramus D C infimus breuiscantium est minimus omnium ramo-
72. huius. *rum cadentium ex D ad peripheriam A C N; ergo ramus D C minor est, quàm D G, & quàm D N: sunt vero D O, D Q æquales eidem D C (cum sint radij eiusdem circuli) igitur D O minor est, quàm D G: pariterque D Q minor est, quàm D N: quare quælibet duo puncta O, Q circuli O C Q hinc inde à puncto C cadunt intra coniectionem B C N, & ideo circulus O C Q intrinsecus contingit coniectionem in C, quod erat ostendendum.*

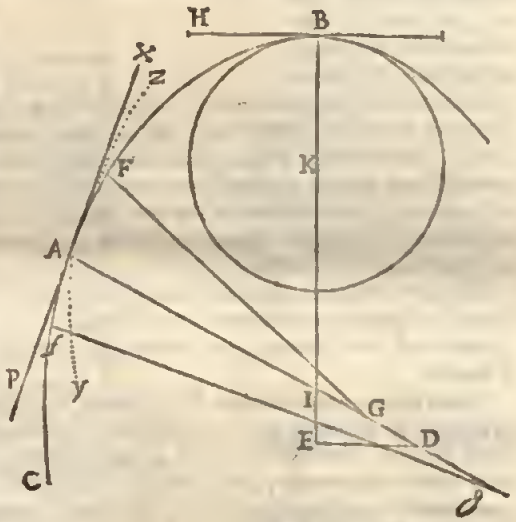
PROP. 12. Addit. *Si ad coniectionem, vel ad portionem quadrantis ellipsis B A C, ex concursu D duci non possit, nisi vnicus tantum breuiscans D A, atque centro D, interuallo D A circulus Z A Y describatur; Dico, omnium circulorum tangentium eandem rectam lineam X A P (quam cõtingit quoque coniectio in A) vnicum esse circulum*



culum Z A Y, qui coniſectionem in puncto A ſecat.

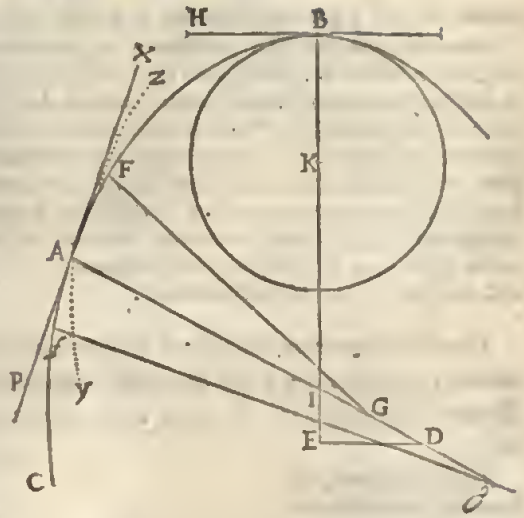
Sumatur enim quodlibet punctum G in productione breuiſſima A I ſupra, vel infra punctum D: manifeſtum eſt (ex 8. præcedentium propoſit.) à puncto G duci poſſe duos breuiſecantes ramos, quorum A G erit infimus, ſi punctum G eadit ſupra punctum D, & tunc circulus radio G A deſcriptus continget coniſectionem intrinſecus in A: ſi vero punctum g eadat infra punctum D, tunc pariter ex g duo breuiſecantes duci poſſunt ad ſectionem, quorum ſupremus erit g A; & propterea circulus radio g A deſcriptus continget coniſectionem B A C extrinſecus in A; quapropter circulus radio D A deſcriptus (quem contingit eadem recta linea X A qua tangebat ſectionem in A) vnicus erit, qui ſectionem B A C ſecet in A, quod erat oſtendendum. 11. Additarũ. 8. Additarũ. 11. Additarũ.

Circulorum omnium intrinſecus tangentium coniſectionem non in axis vertice, aſsignari non poteſt maximus: tangentium vero intrinſecus ſectionem in termino axis maximus erit, cuius radius æqualis eſt ſemirecto. PROP. 13. Addit.



Repetatur figura, & hypotheſis præcedentis propoſitionis. Quoniã quilibet circulus radio G A minori, quàm D A deſcriptus ſemper intrinſecus tangit coniſectionem in A (vt in præcedẽti propoſitione dictum eſt) vbicumque ponatur centrum G ſupra punctũ D; neque augendo radium G A efficitur alius contactus circuli, & ſectionis, quàm intrinſecus, & tunc primo circulus deſinit intrinſecus tangere ſectionem in A, quando D A efficitur radius, ſcilicet quando non amplius intrinſecus ſectionem tangit, ſed eam ſecat in A; quapropter aſsignari non poteſt maximus circulorum tangentium intrinſecus ſectionem in A. Quod vero circulorum intrinſecus tangentium eandem ſectionem in vertice axis B, ille, cuius radius B K æqualis eſt ſemirecto B H ſit maximus, oſtenſum eſt à Maurolico propoſ: 5. 8. & 11. libri 5. Conicorum. Patet ergo propoſitum.

Iiſdem poſitis: dico circulorum omnium extrinſecus tangentium coniſectionem minimum aſsignari non poſſe. PROP. 14. Addit.



Sumpto in eadem fi-
11. Addit. *gura quolibet punćto* g *infra punctum D, quoniam circulus radio* g *A descriptus contingit extrinsecus coniseĉtionem in A, nec vnquam cessabit prædictus cõtactus extrinsecus, licet magis, ac magis in infinitum punctum* g *ipsi D propinquior fiat, & tunc demum cessat huiusmodi extrinsecus contactus, quando describitur circulus radio D A, qui quidem sectionem secat in A, vt dictũ est; quapropter minimus omniũ extrinsecus sectionem tangentium in A assignari nequit. Quod vero extrinsecus tangentium eandem sectionem in vertice axis B non possit assignari minimus, patet; nam omnes*
Maurol. 4. 7. & 10. lib. 1. Conic. *circuli, quorum radij maiores sunt semirecto sectionis, eam extrinsecus tangunt; & tunc demum eiusmodi contactus extrinsecus cessat, quando radius circuli aqualis efficitur semirecto: at tunc intrinsecus sectionem tangit; quapropter reperiri non potest minimus circulorum coniscctionem extrinsecus tangentium: quod erat ostendendum.*

Ex dictis colligitur, quod ex concursu ad quamlibet coniectionem possunt duci tres, vel quatuor ramisecantes inter se aquales: in ellipsi vero, & in reliquis sectionibus si rami secantes non fuerint, duci potest vnus, vel duo rami inter se æquales.

Nam circulus radio alicuius breuisecantis descriptus tangit, vel secat coniectionem, & siquidem eam extrinsecus tangit, necessario eandem bis secas, si fuerit parabole, aut hyperbole, qua infinitè augẽtur, & dilatãtur; & propterea radij circuli ad occursus, & contactum ducti aquales suus interse; & ideo tres rami tantum erunt aquales: si vero describatur circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor est maximo, & maior minimo duorum breuisecantium: tunc quidem necessario circulus quatuor in punctis sectioni conicæ occurret: & propterea quatuor radij ad occursus ducti erunt inter se aquales.

At in ellipsi si concursus fiat circuli centrum, radius vero breuisecans maximus trium, qui in ea duci possunt, circulus prædicto radio descriptus continget quidem exterius ellipsim, neque deinceps vnquam ei occurret: & propterea ramus ille maximus erit vnicus, cum nullus alius ei aqualis duci possit in eadem ellipsi: si verò à concursu in productione axis ellipsis posito describatur circulus, cuius radius minor sit maximo ramo, sed maior vtroque terminato; tunc quidem circulus duobus in locis ellipsi occurret; & propterea duo tantum rami inter se aquales erunt; pari modo, quando à concursu tres breuisecantes ad ellipsin

educun-

educuntur, tunc quidem circulus, cuius centrum est concursus, radius vero minor maximo breuiscantium, & maior duobus reliquis necessariò ellipsin duobus in locis secabit; & ideo duo tantummodo rami inter se æquales erunt.

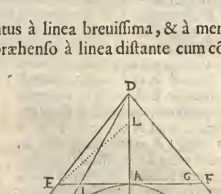
SECTIO DECIMAQVINTA

Continens Propos. XXXXI. XXXXII. XXXXIII. Apollonij.

PROPOSITIO XXXXI.

a IN hyperhola angulus contentus à linea breuissima, & à mensura minor est angulo compræhenso à linea distante cum cõtinente.

b Sit hyberbole A B, eius axis D C, linea breuissima B C, duo continentes D E, D F, & distantia sit A E, & dimidium erecti A G: Dico, angulum B C D minorem esse angulo D E A. Educamus itaque perdendicularem B H, & iungamus B D, quæ secet A E in I. Quia D A ad A G est, vt D H ad H C (14. ex 5.) & I A ad A D est, vt B H ad H D; ergo ex æqualitate I A ad A G, eandem proportionẽ habebit, quàm B H ad H C, & propterea E A ad A G, nempe D A ad distantiam A E maiorẽ proportionem habebit, quàm B H ad H C igitur angulus B C H minor est, quàm D E A, quod erat ostendendum.



9. huius.

PROPOSITO XXXXII.

a IN parabola lineæ breuissimæ productæ occurrunt sectioni ex vtraque parte.

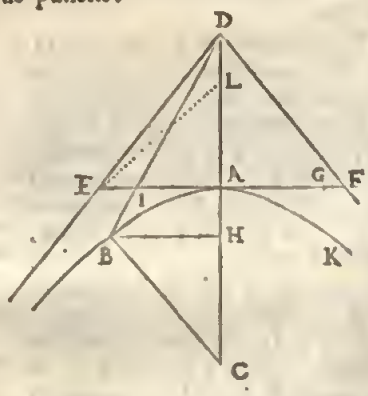
Quoniam breuissima est linea recta secans diametrum paraboles intra sectionem; & propterea sectioni occurret ex vtraque parte (28. ex pr.) & hoc erat ostendendum. 27 lib. 1.

PROP.

PROPOSITIO XXXXIII.

SI inclinatus axis hyperboles erectum non excedit, nulla linearum breuissimarum sectioni ex altera parte occurret: si verò maior illo fuerit, tunc breuissimarum linearum aliquæ occurrunt sectioni, aliquæ verò non occurrunt. a b

Sit priùs D A non maior, quàm A G: & quia D A ad A G eandē proportionem habet, quàm quadratum D A ad quadratum A E, erit D A non maior quàm A E; & propterea angulus D E A non erit maior angulo E D A: sed maior fuerat angulo B C H (41. ex 5.) ergo angulus E D A, nempe A D F maior est, quàm B C D, & propterea B C, D F non conueniunt ad partes C, F; igitur B C non occurrit sectioni ad partes K, A; eo quod si illam secaret, etiam ipsi D F occurreret (8. ex 2.) quare non occurrit sectioni in duobus punctis.



c

Deinde sit D A maior, quàm A G habebit E A ad A G maiorem proportionē, quàm ad A D; & ponatur I A ad A G, vt E A ad A D; ergo I A minor est, quàm E A, quare recta D B, illam diuidens, occurret sectioni, & cadat in B, ducaturque linea breuissima B C, & B H perpendicularis ad D C; erit I A ad A D, vt B H ad H D; estque D A ad A G, vt D H ad H C; ergo I A ad A G, nempe E A ad A D est, vt B H ad H C, & propterea duo triangula E A D, B H C sunt similia; igitur angulus B C H æqualis est E D A, nempe F D A; quare B C, D F sunt parallelæ, nec possunt se se mutuo secare; ergo B C non occurret sectioni K A. Lineæ vero breuissimæ, quæ in peripheria A B cadunt, continent cum C A angulos minores angulo B C D (26. 27. ex 5.) vnde non occurrent ipsi D F, & propterea neque sectioni occurrent. At ille, qui cadit extra hanc sectionis peripheriam; si producatur continet cum C D angulum maiorem angulo B C D (26. 27. ex 5.) igitur productus occurrit D F, & occurrit sectioni A K: quod erat ostendendum.

Secunda lib. 2.

14. huius.

13. lib. 2.

Conuerſ. 8. lib. 2.

Notæ in Propos. XXXXI.

ANgulus contentus à breuissima linea, & mensura minor est angulo contento à distante cum continente in sectione, &c. *Adjcio particulam*

ticulam in hyperbole, *quæ in textu desideratur. Vocat interpres Arabicus lineam distantem ipsam A E, quæ contingit hyperbolem in vertice axis A, & interponitur inter verticem A, & continentem, seu asymptoton D E.*

b Sit sectio, D C diameter illius, &c. *Legendum puto; Sit hyperbole A B eius axis D C. Posteà quia D A, ad A G, seu latus transuersum ad rectum est, vt D H ad H C, atque I A ad A D est, vt B H ad H D (propter similitudinem triangulorum I A D, & B H D) ergo ex æqualitate ordinata I A ad A G est vt B H ad H C: deinde quia linea A E media proportionalis est inter semiaxim transuersum D A, & semirectum A G, cum quadratum ipsius A E quadrans sit figuræ quæ ad diametrum per A ductum constituitur; igitur E A ad A G erit, vt D A ad A E, est vero E A maior, quàm I A; igitur I A ad A G minorem proportionem habet, quàm E A ad A G, seu quàm D A ad A E: erat autem B H ad H C, vt I A ad A G: igitur B H ad H C minorem proportionem habet, quàm D A ad A E: fiat posteà L A ad A E, vt B H ad H C circa angulos rectos A, H, coniungaturq; L E, manifestum est, L A minorem esse D A, & angulum A E L minorem esse angulo A E D: sed propter similitudinem triangulorum B H C, L A E est angulus C æqualis angulo A E L; & proptrea angulus A E D maior est angulo B C H.* Ex 14. huius. 3. lib. 2.

Notæ in Propos. XXXXII.

a Quia est linea recta secans diametrum paraboles; &c. *Addo illam particulam* breuissimam, *quæ in textu desiderari videtur.*

Notæ in Proposit. XXXXIII.

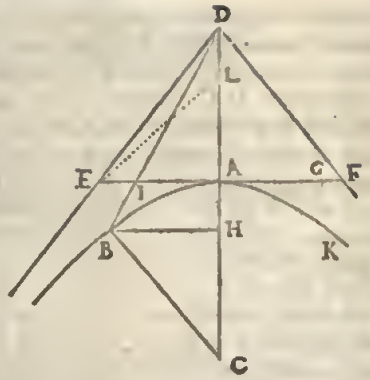
a Inclinatum si non excedit erectum, nulla linearum, &c. *Addo, quæ euidenter deficiunt in textu, legi enim debet: Axis inclinatus idest transuersus si non excedit erectum, &c.*

b Et quia D A ad A G est vt quadratum D A ad quadratum A E, &c. *Eo quod quadratum A F æquale est quartæ parti figuræ, quæ ad duplam semiaxis D A applicatur, scilicet æquale est rectangulo D A G; igitur D A, A E, A G sunt continuæ proportionales: ponitur vero D A æqualis, aut minor, quàm A G; igitur D A æqualis, aut minor quoque erit, quàm A E; & propterea in triangulo D E A erit angulus D E A æqualis, aut maior angulo A D E, seu A D F (cum angulus contingentiæ secetur bifariam ab axi) & prius erat angulus C minor angulo A E D; igitur angulus B C D minor erit alterno angulo F D C; vnde constat rectas lineas F D, C B concurrere posse, si vlterius producantur ad partes D, B; non autem ad partes C, & F.* 3. lib. 2. 41. huius.

c Quia si occurreret illi occurreret D F (7. ex 2.) secaretque sectionem in duobus punctis, &c. *Sensus huius textus talis est. Quoniam, vt ostensù est, recta B C infinite producta non occurrit asymptoto D F ad partes F C; igitur recta C B producta non secabit peripheriam hyperboles ad partes K; nam si ipsam secaret, secaret quoque asymptoton D F ad partes F, quod non potest. Ex his inferri debet conclusio principalis, nimirum, quod B C non occurrit sectioni duobus in punctis: & hac ratione textum alioqui corruptum emendani.* 8. lib. 2. Ibidem.

Lineæ

Lineæ vero breuiſſimæ, quæ cadunt ad peripheriam ſectionis B A, continent angulos minores, quàm B C D, vtique non occurrunt D F, &c. *Ideſt: quia qualibet breuiſſima ex puncto peripheria A B ad axim ducta efficit angulum propinquiorem vertici, minorem ipſo angulo C; & propterea qualibet breuiſſima ad peripheriam A B extenſa ſecabit neceſſario ipſam B C vlterius productam ad partes C: ſed prius oſtenſa fuit B C parallela aſymptoto D F; igitur qualibet breuiſſima ad peripheriam A B ducta ideſt inter parallelas poſita non occurret alteri aquidiſtantium D F ad partes F, ſed ad partes oppoſitas verſus D; eo quod qualibet recta linea intra hyperbolam ducta non ſecat peripheriam ſectionis in ea parte, in qua continentem D F nõ ſecat; At qualibet alta breuiſſima infra C B ducta, neceſſario efficiet ad axim angulum maiorem, quàm C; & propterea vlterius producta ſecabit ipſam B C ad partes C; ſed qualibet breuiſſima extra parallelas poſita qua ſecat vnam aquidiſtantium B C, ſecabit quoq; reliquam ad eaſdem partes F C; quare prius ſectioni occurret, vt dictum eſt.*



d

26. 27. huius.

28. huius.

Conuerſ. 8. lib. 2.

26. 27. huius.

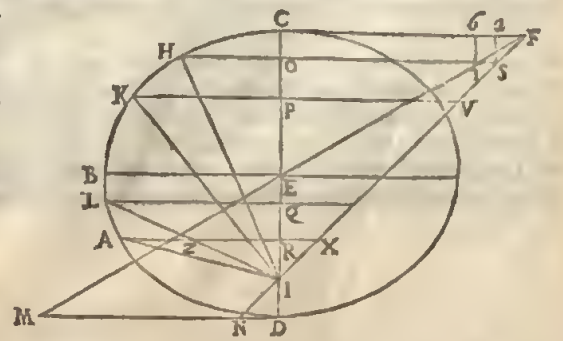
28. huius

SECTIO DECIMASEXTA

Continens XVI. XVII. XVIII. Propoſ. Apollonij.

SI menſura comparata ſumpta fuerit in axe recto minore ellipſis, erit maximus ramorum ab eius origine egredientium, & illi propinquior maior eſt remotiore: minimus vero ramorũ eſt differentia recti, & comparatæ, & illi propinquior, minor eſt remotiore, atque exceſſus quadrati comparatæ ſupra quadratum cuiuſcunque rami aſſignati æqualis eſt exemplari applicato ad abſciſſam illius rami, ſiue comparata ſit minor, aut æqualis, aut maior recto. a

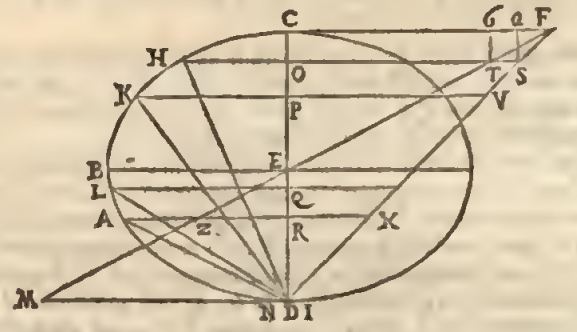
Sit D C rectus axis minor ſectionis ellipticæ A B C ſitque C I comparata, & rami I H, I K, I B, I L, I A, I D, & ſemiſſis erecti ſit C F, & centrum E, & edu-



educamus F E quousque secet D M perpendicularem ad axim in M, & F I occurrat D M in N, & ducantur ad axim perpendiculares H O T S, K P V, B E, L Q, A R: & sit in prima figura C I minor recto, in secunda æqualis, in tertia vero maior. Constat, quemadmodum demonstrauimus in propositione sexta huius, quod quadratum I C æquale sit duplo trianguli I C F; at quadratum O H duplum est trapezij O T F C (1. ex 5.) & quadratum I O duplum est trianguli O I S; ergo quadratum I C, nempe duplum trianguli I F C excedit quadratum I H duplo trianguli F T S, quod est æquale rectangulo T a: & constat, vti dictum

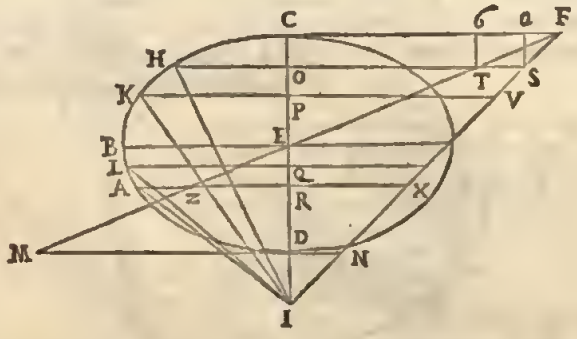
b

c



est, quod sit exemplar applicatum ad O C; ergo quadratum I C excedit quadratum I H exemplari applicato ad O C abscissam ipsius I H. Patet etiam, quod quadratum I C excedit quadratum I K exemplari applicato ad P C; idemque constat in I B; igitur I C maior est, quàm I H, & I H, quàm I K, & I K, quàm I B: postea, in figura prima, & tertia,

d



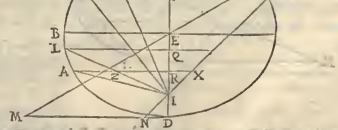
e quia triangulum F C E æquale est triangulo D E M; ergo quadratum I C æquale est duplo trianguli N F M cum duplo trianguli D I N, quadratum vero I D æquale est duplo trianguli D I N; igitur quadratum

I D minus est, quàm quadratũ I C duplo trianguli N F M, quod æquale est exemplari applicato ad D C, & quadratum I R æquale est duplo trianguli I X R, & quadratum A R æquale est duplo trapezij R M (3. ex 5.) ergo quadratũ I A minus est, quàm quadratum I C duplo trianguli F Z X, quod æquale ex exemplari applicato ad C R (6. ex 5.) similiter quadratum I L minus est, quàm quadratum I C exemplari applicato ad C Q; estque C D maior, quàm C R, & C R quàm C Q; ergo I A maior est, quàm I D, & I L, quàm I A; quod erat propositum.

Notæ in Propos. XVI. XVII. XVIII.

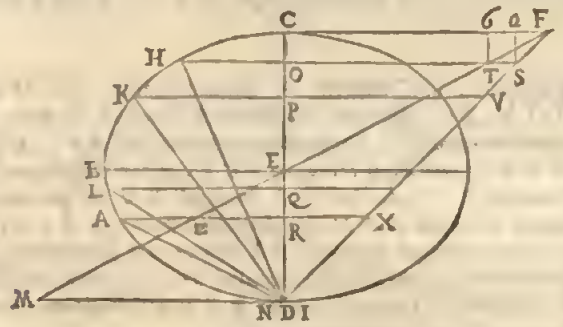
COmparata si fuerit ex recto duorum axium ellipsis erit maximus ra- a
morum, &c. *Addidi particulam illam axis minoris, quæ in textu deficiebat, nunquam enim C F semissis lateris recti, esse potest maior C E semisse lateris transuersi, nisi C D fuerit axis minor ellipsis.*

Constat, quemadmodum demonstrauimus in propositione 6. &c. *Quoniã mensura I C supponitur cõparata, ideſt æqualis ipsi C F semissi lateris recti; propterea triangulum I C F isosceleum erit, & rectangulum in C; & ideo quadratum I C æquale erit duplo trianguli I C F: eadem ratione propter parallelas S O, & C F, erit triangulum I O S simile triangulo I C F, & propterea illud quoque isosceleum erit, & rectangulum in O, & ideo quadratum I O æquale* b
1. huius. *erit duplo trianguli I O S: est verò quadratum O H æquale duplo trapezij F T O C; igitur quadratum I H (quod est æquale duobus quadratis I O, O H circa angulum rectum O) æquale erit duplo trianguli I O S cum duplo trapezij F T O C, sed hæc duo spatia minora sunt duplo integri trianguli I C F, estque defectus duplum trianguli F T S, siue rectangulum S T b a; igitur duplum trianguli I C F, siue quadratum I C maius est quadrato I H, & excessus est rectangulum T a: quod verò rectangulum T a sit exemplar demonstrabitur modo, vt in sexta propositione huius.*

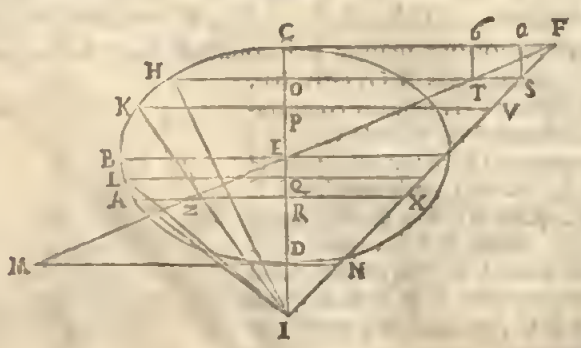


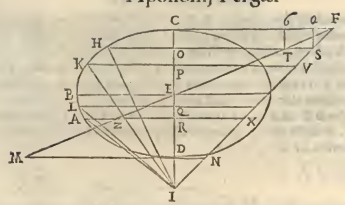
Et constat, vt dictum est, quod sit exemplar applicatum ad O C, &c. c
Quoniam recta S a, T b, I C sunt parallelæ, erunt triangula I C F, & S a F, similia;

similia; pariterque duo triangula E F C, T b F similia erunt; & propterea S a ad a F eandem aqualitatis proportionem habebit, quàm I C habebat ad C F, similiter T b ad b F eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F, seu quàm latus transuersum D C ad eius latus rectum: est vero T b aqualis S a, seu a F; ergo F a ad F b eandem proportionem habet, quàm latus transuersum D C ad eius latus rectum; & comparando antecedentes ad differentias terminorum, erit F a, seu b T ad b a, vt latus transuersum D C ad differentiam eiusdem transuersi, & recti lateris; quare parallelogrammũ rectangulum S b, erit exemplar applicatum ad abscissam O C. Lem. 1. huius. Defin. 9. huius.



d Igitur I C maior est, quàm I H, & I H, quàm I K, &c. *Eo quod abscissa O C minor est, quàm C P, & C P minor, quàm C E: suntque praedicta abscissa latera homologa exemplarium, qua ad easdem abscissas applicantur; atque praedicta exemplaria similia sunt inter se, cum circa angulos rectos latera habeant eandem proportionem, quàm latus transuersum D C ad differentiam eiusdem transuersi, & recti lateris; quare excessus quadrati I C supra quadratum I H minus est excessu eiusdem quadrati I C supra quadratum I K; & ad hoc minus excessu quadrati I C supra quadratum I B, & propterea recta I C minori excessu ipsam I H superabit, quàm ipsam I K; & adhuc minori excessu superabit I K, quàm excedat I B; & ideo I C maior erit, quàm I H, & I H maior, quàm I K, & I K maior, quàm I B.* Defin. 9. huius.





Ergo quadratum I C æquale est duplo trianguli N F M cum duplo e
trianguli D I N, &c. *Quoniam quadratum I C æquale est duplo trianguli I C F, seu duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E F C; estque duplum trianguli E D M æquale duplo trianguli E C F; igitur quadratum I C æquale est duplo trianguli I F E vna cum duplo trianguli E M D: ijs vero triangulis æquatur duplum trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N; igitur quadratum I C æquale est duplo trianguli N F M vna cum duplo trianguli D I N: est vero quadratum I D æquale duplo trianguli D I N; igitur excessus quadrati I C supra quadratum I D est triangulum N F M bis sumptum; scilicet exemplar applicatum ad latus transuersum D C.*

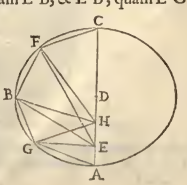
SECTIO DECIMASEPTIMA

Continens XIX. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. & XXV. Propos. Apollonij.

PROPOSITIO XIX.

SI mensura E C sumatur in axe minori ellipsis A B C, sitque a
maior comparata; erit maximus omniũ ramorũ egredientiũ ex sua origine, vt E F, E B, E G; & maximo propinquior, maior erit remotiore, nempe E F, quàm E B, & E B, quàm E G.

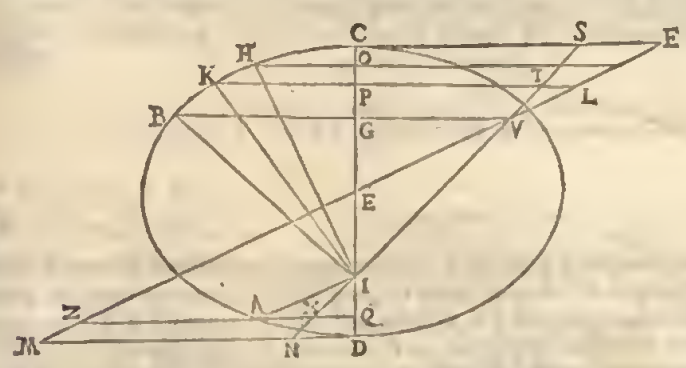
Coniungamus rectas A G, G B, BF, F C; & secetur C H æqualis comparatæ: iungãturque F H, H B, H G. b



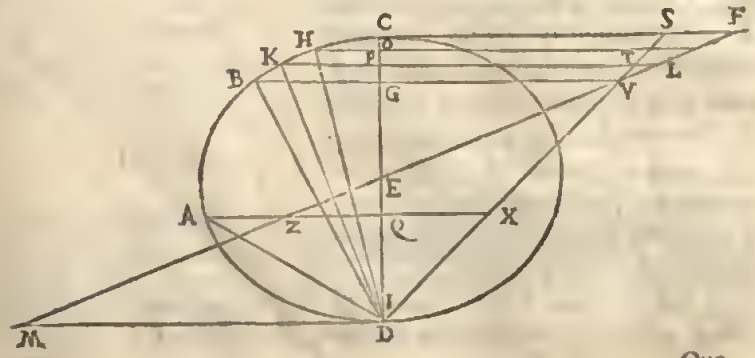
Et quoniam H C maior est, quàm H F, (16. 17. 18. ex 5.) erit angulus H C F minor, quàm H F C; & ideo multo minor erit, quàm E F C, quare E C maior est, quàm E F: & sic constat, quod E F maior sit, quàm E B, & E B, quàm E G, & E G, quàm A E; quod erat ostendendum. PROP.

PROPOSITIO XX. XXI. & XXII.

a SI in ellipsi A B C mensura I C in axe minori C D sumpta minor fuerit comparata, C F, & maior dimidio axis E C, (perficiaturque figura, vt antea) dico, quod omnium ramorum I A, I B, I K, I H, I C egredientium ex origine I maximus

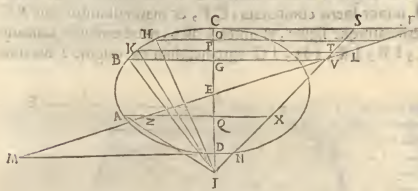


est I B, cuius potentialis B G abscindit à mensura versus originem rectam G I, ad quàm inuersa E G eandem proportionem habet, quàm D C ad eius erectum; Et quadratum maximi I B superat quadratum cuiuslibet alterius rami I K exemplari applicato ad G P differentiam eorum abscissarum.



Quo-

Quoniam proportio E G ad G I facta est, vt E C ad C F, nempè E G ad G V, erit G V æqualis G I; & propterea quadratum G I æquale est duplo trianguli G I V, & quadratum G B æquale est duplo trapezij G F (1. ex 5.) ergo quadratum I B æquale est duplo trianguli I C S cum b



duplo trianguli F S V; & sic constat, quod quadratum I K æquale est duplo trianguli I C S cum duplo trapezij S L; & propterea quadrati I B excessus supra quadratũ I K æqualis erit duplo trianguli L T V, quæ æqualia sunt exemplari applicato ad G P (6. ex 5.) atque sic ostendetur, quod I B potentia superat I H; estque excessus exemplar applicatum ad G O, & superat quoque I A portestate, estque excessus æqualis exemplari applicato ad G Q; est vero G O maior, quàm G P; ergo I B maior est quã I K, & quàm I H; & sic ostendetur, quod I B maior sit, quàm I A; & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

EContra, si maximi rami origo ponatur in axi minore, at non in cẽtro ellipsis, nec sit mensura continet cum ipsa mensura angulum acutum, & eius inuersa ad abscissam à potentiali cum origine habet eandem proportionem figuræ axis recti minoris: si vero educatur ex centro, erit perpendicularis super rectum.

a

Sit sectio elliptica A B C centrum D, & E origo, quæ sit in axi minori C A, & E F ramus omnium maximus; erit vtique E C, vel maior semie- b

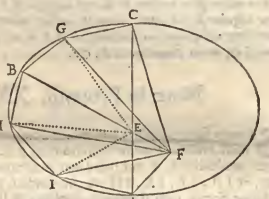
semierecto, aut æqualis, aut minor illo; sed si esset æqualis, aut maior esset quoque E C maximus ramorum (16. 17. 18. 19. ex 5.) ergo C E minor est dimidio erecti, & ideo aliqua minor, quàm D C ad residuam vsq; ad E eandem proportionẽ habebit, quàm D C ad semissim erecti; & sit D G ad G E, & ex G ad axim ducamus perpendicularem: hanc, dico, occurrere sectioni in F; alioquin occurrat ei in H, & iungamus E H; igitur E H est maximus ramus (20. ex 5.) & propterea maior, quàm E F, qui maximus suppositus fuit, & hoc est absurdum; igitur occurrit sectioni in F; & quia G est rectus angulus, erit F E G acutus. Si verò ramus maximus educatur *ex* cẽtro, vt D B erit perpendicularis super A C; alioquin educatur D I perpẽdicularis ad axim; igitur D I est semisis axis transuersi (11. ex 5.) & propterea est ramus omnium maximus, sed D B suppositus fuit maximus, quod est absurdum, vti dictum est; quare patet propositum.

c

d

PROPOSITIO XXV.

a SI in ellipsi ramus maximus E B mẽsuram secans vltra originem E, in axe eius minori existentem, producatur ad F, fiet F B maximus omniũ ramorum F G, F H, F I, ab eodem puncto, ad sectionem A B C cadentium, & propinquior maximo maior est remotiore.



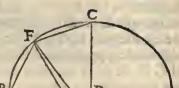
b Educamus B G, B H, H I, I A, E G, E H, E I; & quia E B maior est, quàm E H, erit angulus B H E maior, quàm E B H; igitur angulus B H F multo maior erit, quàm H B F, & propterea B F maior, est quàm F H; atque sic demonstrabitur, quod H F maior sit, quàm F I, & F I, quàm F A; & hoc erat ostendendum.

Notæ in Propositi. XIX.

a SI vero fuerit mensura E C ex recto duorum axium ellipsis A B C, sed sit maior comparata, &c. *Similiter hic declarari debet, quod axis rectus sit minor; & propterea lego: Si mensura E C sumatur in axe minori ellipsis, &c.*

Nam

Nam si coniungamus A G, B G, B F, F C, &c. *Idest*; *secetur C H aqualis comparatæ, seu semissi lateris recti axis A C; quia mensura E C suppositæ est maior comparata, erit quoque E C maior, quàm C H, & propterea recta linea E F cadet infra H F; ideoque angulus C F E maior erit angulo C F H: eadem ratione angulus F B E maior erit angulo F B H, atque angulus B F E minor erit angulo B F H, & sic de reliquis, cumque C H sit aqualis comparatæ, & sit* b

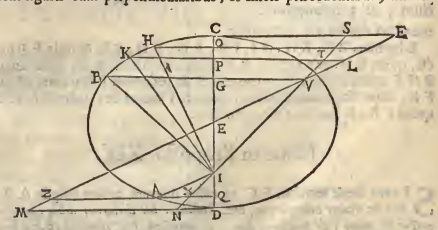


16. 17. 18. huius. *maior C D semisse axis recti minoris, omnium ramorum ex origine H ad ellipsim C F B G, cadentium maximus erit H C; & propterea H C maior erit, quàm H F, & in triangulo H F C angulus H F C oppositus maiori lateri maior erit angulo C; estque ostensus angulus E F C maior angulo H F C; igitur in triangulo C E F erit angulus C F E maior angulo F C E; & propterea ra-*

Ibidem. *mus E C maior erit, quàm E F: simili modo, quia ramus H F propinquior maximo maior est remotiore H B, erit angulus H F B minor angulo H B F: ideoque angulus E F B, pars minoris, adhuc minor erit angulo E B F, maiorem excedente; & propterea in triangulo E F B erit ramus E F propinquior maximo E C, maior remotiore E B, &c.*

Notæ in Propositi. XX. XXI. XXII.

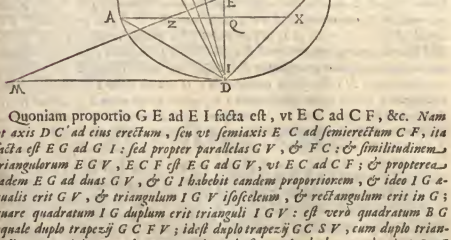
SI vero fuerit mensura I C minor comparata, quæ sit C F, nempe semisse recti, & maior dimidio recti E C, & origo sit in recto, aut in eius productione, vt in I; tunc maximus ramorum egredientium ex origine, vt I A, I B, I K, I H est cuius inuersi proportio E G (post absolutionem figuræ cum perpendicularibus, & lineis præcedentibus) ad ab- a



scissam eius potentialis ex mensura cum origine, vt I G est, vt proportio figuræ recti, vt D C ad erectum illius, & quadratum eius, nempe quadratum

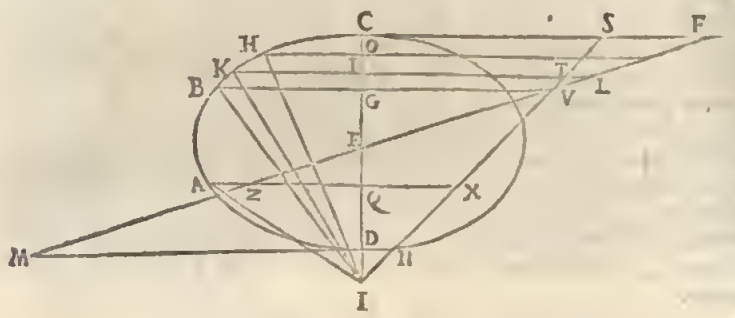
dratum maximi, qui est I B, superat quadratum cuiuslibet illorum exemplari applicato abscissionibus eorum potentialium, &c. *Sensus huius textus pene vix diuinari potest inter tot mendas, & phrasis Arabicæ obscuritatem; puto tamen, cum esse, quem in textu appossui, vbi pauculæ verba immutani, quæ desiderari videbantur, aliqua verò transposui, vt sensus continuari posset.*

Cæterum animaduertendum est in hisce propositionibus, sicuti in 8. 9. & 10. huius libri supponi vt res manifesta intra sectionem duci posse à puncto originis ramum maximum, vel breuissimum, idest necessario reperiri debere ramum, cuius potentialis abscindit à mensura versus originem rectam lineam, ad quam tmuersa eandem proportionem habeant quam axis transuersus ad suum erectum: hoc autem sine demonstratione admittere nefas est. Ergo quod in textu desideratur suppleri potest hac ratione. Quia C I maior est, quàm C E, sed minor, quàm C F; ergo eadem E C ad minorem C I maiorem proportionẽ habet, quàm ad C F; & comparando antecedentes ad differentias terminorum C E ad E I maiorem proportionem habebit, quàm E C ad differentiam ipsius C F à C E; quare aliqua magnitudo minor quàm prima scilicet G E ad E I eandem proportionem habebit, quàm C E ad differentiam ipsarum C F, & C E: & iterum comparando antecedentes ad summas terminorum E G ad G I eandem proportionem habebit, quàm E C ad C F; quare punctum G cadet intra sectionem, pariterq; G B ad axim perpendicularis occurrens sectioni in B cadet intra eandem sectionem: & ideo duci poterit ramus I B, qui ostendetur maximus reliquorum omnium.



b Quoniam proportio G E ad E I facta est, vt E C ad C F, &c. *Nam vt axis D C' ad eius erectum, seu vt semiaxis E C ad semierectum C F, ita facta est E G ad G I: sed propter parallelas G V, & F C: & similitudinem triangulorum E G V, E C F est E G ad G V, vt E C ad C F; & propterea eadem E G ad duas G V, & G I habebit eandem proportionem, & ideo I G æqualis erit G V, & triangulum I G V isosceleum, & rectangulum erit in G; quare quadratum I G duplum erit trianguli I G V: est verò quadratum B G æquale duplo trapezij G C F V; idest duplo trapezij G C S V, cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B (quod est æquale duobus quadratis I G, G B circa angulum rectum G) æquale est duplo trianguli I G V duplo trapezij G C S V.* 1. huius.

C S V cum duplo trianguli F S V; id est quadratum I B aquale est duplo trianguli I S C cum duplo trianguli F S V; & quoniam propter parallelas C S, & G V, triangulum I C S simile est isoscelio, & rectangulo triangulo I G V, erit, quadratum I C aquale duplo trianguli I C S isoscelei, & rectanguli in C; ergo excessus quadrati I B supra quadratum I C aquale est duplo trianguli F S V; est verò rectangulum, cuius basis F S, altitudo verò C G aquale duplo trianguli F S V; atque huiusmodi rectangulum est exemplar applicatum ad abscissam G C, vt in notis prop. 16. 17. & 18. litera c. ostensum est igitur quadrati I B excessus supra quadratum I C est exemplar applicatum ad abscissam G C; Simili

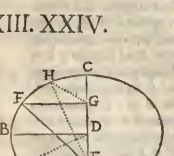


modo quadratum I K ostendetur aquale duplo trianguli I C S vna cum duplo trapezij L T S F; atque duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V excessus supra duplum trianguli I C S cum duplo trapezij L T S F est duplum trianguli L T V; ergo quadrati I B excessus supra quadratum I K est duplum trianguli L T V, seu exemplar applicatum ad G P differentiam abscissarum. Postea quia triangula similia E C F, E D M sunt aqualia, eum eorum homologa latera E C, E D aqualia sint; ergo addito communi triangulo I E V, erit triangulum E C F cum triangulo E I V, seu triangulũ I C S cum triangulo F S V aquale duobus triangulis E D M, & I E V, seu duobus triangulis M V N, & N I D: erat autem quadratum I B aquale duplo trianguli I C S cum duplo trianguli F S V; igitur quadratum I B aquale erit duplo trianguli M N V cum duplo trianguli N I D; estque quadratum I D aquale duplo trianguli isoscelei, rectanguli I D N; igitur quadratum I B superat quadratum I D, estque excessus duplum trianguli M N V seu exemplar applicatum ad G D. Tandem quia quadratum I Q aquale est duplo trianguli isoscelei rectanguli I Q X, atque quadratum Q A aquale est duplo trapezij Q M; igitur quadratũ hypothenusæ I A aquale est duplo trianguli I D N cum duplo trapezij X N M Z; ergo excessus quadrati I A supra quadratum I D aqualis est duplo trapezij X N M Z; excessus autem trianguli N M V supra trapezium N Z est triangulum X Z V; & erat quadrati I B excessus supra quadratum I D, triangulum ipsum M V N bis sumptum. Igitur quadrati I B excessus supra quadratum I A est duplum trianguli X Z V, seu exemplar applicatum ad G Q. Quod autem exemplaria aqualia sint prædictis triangulis bis sumptis, ostensum est in prop. 6. huius.

Notæ

Notæ in Propoſ. XXIII. XXIV.

a EContra linea maxima, ſi non egrediatur ex centro, continet cum mẽſura angulum acutum, & proportio illius inuerſæ ad abſciſſam eius potentialis ex mẽſura cum origine, eſt vt proportio figuræ recti. Si verò fuerit extra centrum, erit perpendicularis ſuper rectum, &c. *Manifeſtè nõ nulla in textu Arabico deficiunt; aliqua verò immutari debent; alioquin propoſitio vera non eſſet, itaque legendum puto: E contra ſi maximi rami origo ponatur in axi minore, &c: Vt in textu habetur.*



b Sit ſectio A B C elliptica, & E origo, & E F linea maxima, &c. *Addidi pariter in hac expoſitione verba, quæ deficiunt; nimirum: Sit centrum D, & origo E, quæ ſit in axi minori A C.*

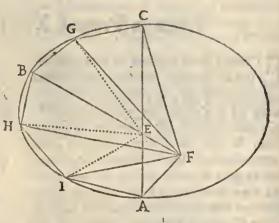
c Et ideo D C ad dimidium erecti eſt linea minor, quàm D C, & ſit D G ad G E, &c. *Nonnulla adiungi debent huic textui corruptiſsimo, ne ſint verba nil prorſus ſignificantia, itaque ſic legendum puto. Et ideo aliqua minor, quàm D C ad reſiduam vſque ad E eandem proportionem habebit, quàm D C ad ſemiſſem erecti; & ſit D G ad G E, &c. Quæ verba breuiſsimè more Apollonij expoſita ſic confirmantur. Quia E C oſtenſa eſt minor dimidio erecti axis minoris C A, fiat C K æqualis dimidio erecti; erit E C minor quàm C K, & ablata communi D C erit D E minor, quàm K D; & propterea D E ad eandem D C minorem proportionem habebit, quàm K D: fiat E D ad D G, vt K D ad D C, erit D G minor, quàm D C: & componendo, E G ad G D eandem proportionem habebit, quàm K C ad C D, & inuertendo, D G ad G E eandem proportionem habebit, quàm D C ſemiſsis axis recti ad C K ſemiſsim erecti eiuſdem axis; & ex G ducatur G F perpendicularis ad axim, quàm, dico, occurrere ſectioni in F termino maximi rami E F.*

d Et ſi maxima fuerit extra centrum, vt D B erit perpendicularis, &c. *Textus euidenter corruptus ſic corrigi debet. Si verò ramus maximus educatur ex centro, vt D B, &c.*

Notæ in Propoſ. XXXV.

a SI producatur vna linearum maximarum, vt E B ad latus illius originis E ad punctum F, fiet maxima linearum egredientium ab illo puncto F G, F H, F I, F A ad ſectionem B I A in directum, & propinquior illi maior eſt remotiore, &c. *Immutati nonnulla, quæ ad propoſitionis integritatem facere videbantur: vt in textu habetur.*

Erit angulus BHE maior, quàm E B H, &c. *Eo quod ramorum omnium ab origine E ad ellipſim C B H cadentium maximus ſupponitur E B; ergo maior erit, quàm E H, & propterea angulus E B H minoris lateri oppoſitus minor erit angulo E H B: cadit vero recta H F infra H E; propterea quod punctum F infra punctum E exiſtit; igitur angulus F H B maior eſt angulo E H B; & ideo angulus F H B multo maior erit angulo F B H; igitur ramus F B, maiorem angulum ſubtendens, maior erit, quàm F H, &c.*



b

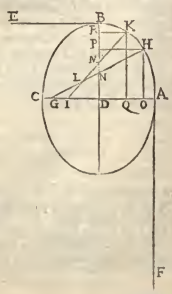
SECTIO DECIMAOCTAVA

Continens XXXII. XXXIII. XXXIV. XXXV. XXXVI. XXXVII. XXXVIII. XXXIX. XXXX. XXXXVII. XXXXVIII. Propoſit. Apollonij.

PROPOSITIO XXXII.

IN ellipſi A B C rami cuiuslibet maximi G H vtrumque axim ſecantis portio N H inter axim maiorem, & ſectionem intercepta, eſt linea breuiſsima.

Producatur rectus axis minor A D vltra centrum D ad I, G, & ex I, G adſectionem ducantur duo rami maximi G H, I K, qui ſecent tranſuerſum B D in N, M, & ſit B E dimidium erecti axis B D, & A F dimidium erecti axis A G; & educantur perpendiculares ad axes H O, H P, K Q, K R. Dico, N H breuiſsimum eſſe ramorum egredientium ex H. Quia G H eſt linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, vt D O ad O G (22. ex 5.) nempe N H ad H G, ſeu N P ad



a

b

P D; ergo B E semisis erecti ad B D semisim transuersi est, vt N P ad P D, & ideo N H est breuissima linearum egredientium ex N (10. ex 5.) & sic ostendetur, quod si K I fuerit maximus, erit K M breuissima.

PROPOSITIO XXXIII. XXXIV.

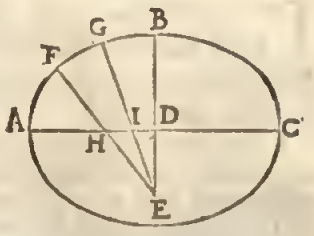
a EContra ostendetur, quod duæ breuissimæ, si producantur ad partes suarum originum vsque ad axim minorem rectũ ellipsis, fient duo maximi; & lineæ maximæ mutuò se secant inter transuersum, & rectum in eadem parte, & quod continent cum mensura angulos, quorum proximior vertici sectionis maior est.

b Quia D Q ad Q I est, vt D O ad O G, quia quælibet earum est, vt D A ad A F (22. ex 5.) diuidendo, & permutando, fiet D Q minor ad D O maiorem, vt D I ad D G; ergo D I minor est, quàm D G, & K Q maior, quàm H O; quare angulus I maior est, quàm G; igitur H G, K I, se mutuo secantes, conueniunt in L.

Et constat, quod occursus duarum breuissimarum (si producantur versus suam originem) erit intra angulum contentum à duabus medietatibus axium ellipsis B D, D C supra vnum eorum, nempe punctum L cadit intra angulum B D C. Quoniam breuissimæ N H, M K se mutuò secant, si producantur ad partes suæ originis (28. ex 5.) occurrent vtique extra B D, & intra A G (33. ex 5.) & hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXV.

a SI per centrũ ellipsis transierit vna duarum breuissimarum, vtique rami egrediẽtes ab eorum occursu ad sectionis quadrantem alterius breuissimæ habebunt proprietates expositas in propositionibus 54. & 55.

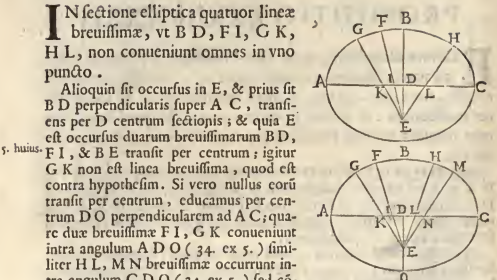


In ellipsi A B C sit punctum E occursus duarum breuissimarum B D, C I, & centrum sectionis D: & ex E educamus E F, quæ secet transuersum axim in H. Dico, quod H F nõ est breuissima, & quod breuissima egrediens ex F abscindit ex sagitta A C eum A lineam maiorem, quàm A H. Quoniam G I est breuissima; igitur F H, si esset quoque breuissima, 34. huius. occurreret ipsi G I intra angulum A D E: sed non occurrit ei, nisi in E, ergo F H non est breuissima; & quia F E non cadit inter duas breuisecantes E B, E G; ergo breuissima, egrediens ex F, abscindit ex sagitta lineam maiorem, quàm A H (54. ex 5.) quod erat ostendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXVI.

IN ſectione elliptica quatuor lineæ breuiſſimæ, vt B D, F I, G K, H L, non conueniunt omnes in vno puncto.



Alioquin ſit occurſus in E, & prius ſit B D perpendicularis ſuper A C, tranſiens per D centrum ſectionis; & quia E eſt occurſus duarum breuiſſimarum B D, F I, & B E tranſit per centrum; igitur G K non eſt linea breuiſſima, quod eſt contra hypotheſim. Si vero nullus eorũ tranſit per centrum, educamus per centrum D O perpendicularem ad A C; quare duæ breuiſſimæ F I, G K conueniunt intra angulum A D O (34. ex 5.) ſimiliter H L, M N breuiſſimæ occurrunt intra angulum C D O (34. ex 5.) ſed cõueniunt in E, quod eſt abſurdum; igitur quatuor lineæ breuiſſimæ non cõueniunt in vno puncto; quod erat oſtendendum.

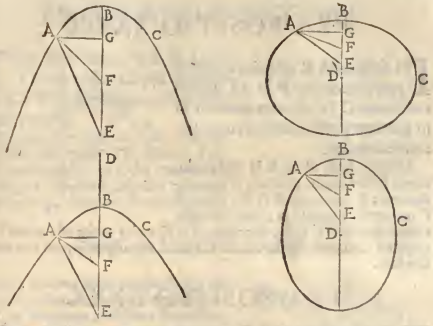
35. huius.

PROPOSITIO XXXVII. XLVI.

IN coniſectione A B, cuius centrum D duci non poſſunt duæ lineæ maximæ in ellipſi, neque duæbreuiſſimæ in omnibus ſectionibus, vt A E, A F ad vnum punctum A circumferentiæ ſectionis terminatæ.

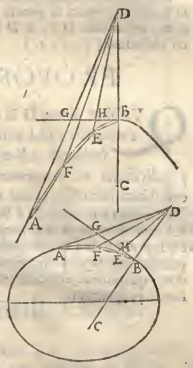
Educamus A G perpendicularem ad axim B E. Si itaque ſectio fuerit parabole, fiet E G æqualis F G, quia quælibet earum eſt æqualis dimidio erecti (13. ex 5.) ſi vero fuerit hyperbole, aut ellipſis, fiet D G ad G E, vt D G ad G F; quia quælibet earum eſt, vt proportio figuræ (14. 15. ex 5.) igitur G F æqualis eſt G E, quod eſt abſurdum. Similiter ſi B G fuerit minor duarum axium ellipſis, & fuerint A E, A F rami maximi oſtendetur, quod G F æqualis ſit G E (23. ex 5.) Patet igitur, vt dictum eſt, quod ex vno puncto ſectionis educi non poſſunt ad axim illius duæ lineæ maximæ, neque breuiſſimæ, & hoc erat oſtendendum.

PROP.



PROPOSITIO XXXVIII.

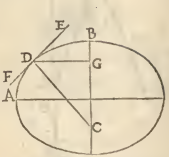
SI linea maxima, aut breuiſſima, vt C B, producatur extra ſectionem A B ad D, erit eius portio B D extra ſectionem abſciſſa minima omnium linearum D E, D F, D A egredientium ab illo puncto ad circumferentiam ſectionis: reliquarũ vero propinquior, illi minor eſt remotiore.



a Educatur B G, tangens ſectionem in B; erit D B minor, quàm D H; ergo multo minor eſt, quàm D E: & iungamus F E, F A, erit angulus F E D obtuſus, & propterea D E minor eſt, quàm D F, & ſimiliter D F minor, quàm D A; quod erat oſtendendum.

PROP.

PROPOSITIO XXXIX.



IN sectione A B elliptica quælibet perpendicularis F D ad lineam maximam C D, ab eius termino D in sectione posito educta, continget conisectionem.

Alioquin secet illam, & in eius productione D G sumatur punctum G intra sectionem: & educamus B G C, igitur G C maior est, quàm C D, quia subtendit rectum angulum C D G, & propterea B C multo maior est, quàm C D, quod est absurdum; igitur educta illa linea est tangens; quod erat ostendendum. a

PROPOSITIO XXXX.

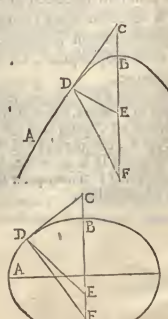
EContra si fuerit F D tangens, erit perpendicularis super maximam D C.

Alioquin educamus aliam E D perpendicularem super illam; ergo E D tangit sectionem in puncto D (39. ex 5.) sed F D supposita fuit tangens; igitur duæ D F, & D E tangunt sectionem in vno puncto, quod est absurdum (36. ex 1.)

PROPOSITIO XXXXVII.

QVælibet linea D E ex puncto contactus D ad axim alicuius sectionis A B educta perpendicularis ad tangentem D C, erit linea breuissima, aut maxima.

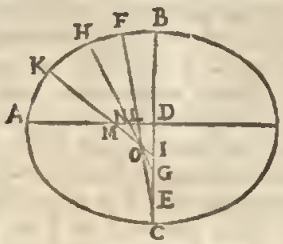
Ex 30. & 20. huius. Alioquin educamus D F breuissimam, vel maximam; ergo D C perpendicularis 40. huius. est super D F; sed C D supposita fuit perpendicularis super D E; quod est absurdum: quapropter demonstratũ est, quod fuerat propositum.



PROP.

PROPOSITIO XXXXVIII.

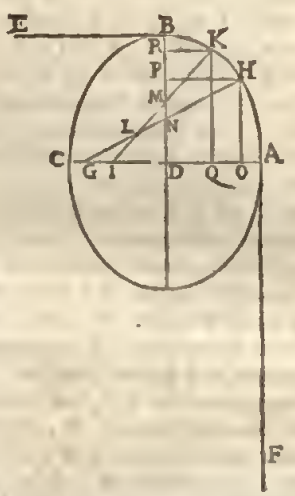
a TRes lineæ maximæ E F, G H, I K ad vnum ellipſis quadrãtem A F B cadentes non cõueniunt in vno puncto.



Alioquin cõueniant in O, & quia ſunt lineæ maximæ erunt M K, H N, L F, lineæ breuiſſimæ (32. ex 5.) & conueniunt in puncto O; quod eſt abſurdũ (54. ex 5.) oſtenſum ergo eſt, quod fuerat propoſitũ.

Notæ in Propoſit. XXXII.

a LInea maxima ſecat tranſuerſam in pũcto, cuius intercepta inter punctum illud, & ſectionem, eſt linea breuiſſima, &c. *Verba, qua in textu Arabico deſiderantur ſupplenda cenſui, vt aquiuocationes tollerentur.*



b Quia G H eſt linea maxima, erit D A ad A F, nempe B E ad B D, &c. *Quia in 22. huius oſtenſum eſt, lineæ maximæ G H potentialem H O ſecare ſemiaxim minorẽ A D in O, vt ſit D O ad O G in eadẽ proportione figura axis minoris A C; ſcilicet erit, vt D A ſemiaxis minor ad A F eius ſemierectum; ſed vt A D ad A F, ita eſt B E ſemiſtis lateris recti axis tranſuerſi ad B D ſemiſſem eiuſdem tranſuerſi; igitur D O ad O G eandem proportionem habebit, quàm E B ad B D; ſed propter parallelas N D, H O, eſt N H ad H G, vt D O ad O G; pariterque propter parallelas D G, H P, erit N P ad P D, vt N H ad H G; & propterea N P ad P D eandem proportionem habebit, quàm D O ad O G, ſeu quàm E B ad B D; & permutando D P ad P N erit, vt D B ad B E, ſeu vt axis tranſuerſus ad eius erectum; & propterea linea N H erit breuiſſima.*

Ex 15. lib. 1.

15. huius.

Notæ in Propoſit. XXXIII. XXXIV.

a EContra oſtendetur, quod duæ breuiſſimæ, ſi educantur ex parte ſuæ originis ad rectum, fient duo maximi eum relatione ad rectum: Et

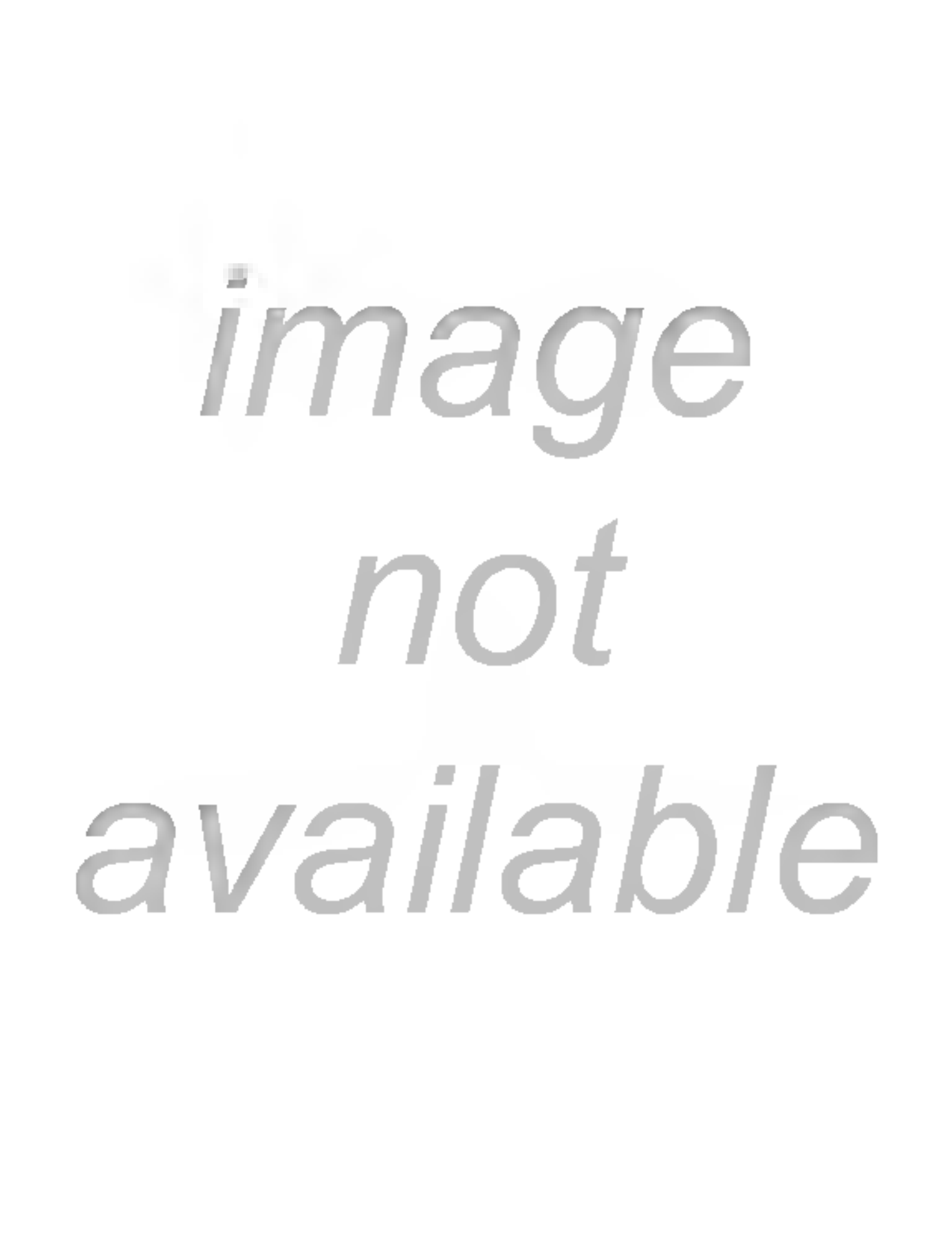
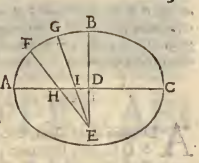


image
not
available

breuissimæ B D, G I, quarum B D per centrũ transit, quæ productæ concurrunt in punctõ E axis minoris, & concluditur, quod rami E F, portio F H, nedũ breuissima non est, sed suprà ipsam breuissimã ex punctõ F eductam cadit.

Sed duo hic notanda sunt. Primo, quod hæc prop. 35. non poterat postponi, nã vsum habet in 57. huius vbi malè citatur prop. 52. loco huius 35., vt ibidem insinuatum est. Secundo, quod hæc demonstratio non videtur omnino perfecta nam pendet ex prop. 34., & ex eius conuersa, quæ demonstrata non reperitur quare supernacanea non fuit noua demonstratio in Lemmat. 8. apposita.



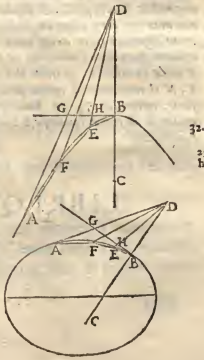
Notæ in Prop. XXXVI.

a SI verò nulla earum transit per centrũ, educamus D O, &c. *Si enim fuerint quatuor lineæ breuissimæ G K, F I, H L, M N, quarum nulla per centrum D transit, similiter ostendetur, quod non conueniunt in vno punctõ E; nam dnctõ semiaxe minori D O necesse est, vt punctum E concursus duorũ breuiscantiũ E G, E F cadat intra angulũ A D O; pariterque idem punctum E concursus duorum breuiscantium E H, E M, cadet necessario intra angulum C D O; sed idem punctum E nequit duobus in locis reperiri, nimirũ intra angulum A D O, & intra angulum C D O, igitur non possunt ab eodẽ punctõ educi ad ellipsim quatuor rami breuiscantes.*

34. huius.
Ibidem.

Notæ in Prop. XXXVIII.

a NAm si educamus B G tangentem erit B D minor quàm D H, &c. *Quoniam C B est linea breuissima, aut si maxima est, eius portio erit breuissima, & G B cõtingens sectionem in eius termino B perpendicularis ad B C; propterea in triangulo B D H latus H D, subtendens angulum rectum B, maius erit latere D B; est verò D E maior, quàm D H, eo quod punctum H contingentis B G cadit extra sectionem; igitur linea B D minor est, quàm D E, & propterea angulus D E B acutus erit, quare est minor obtuso*

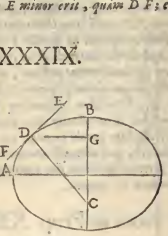


32. huius.
29. 30. huius.

angulo D E E; cadit verò F E infra rectam B E, quam secat in E, propter curuitatem sectionis F E B; igitur angulus D E F obtusus quoque erit, & angulus D F E acutus; & propterea recta linea D E minor erit, quàm D F; eadem ratione ostendetur D F minor, quàm D A.

Notæ in Propositi. XXXIX.

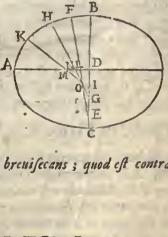
a



ALioquin secet illam, & secemus ex, & D G intra sectionem, &c. *Si enim recta F D non contingit ellipsim A B, secet eam si fieri potest in D: quare F D producta in directum cadet intra sectionem, & in producta recta linea F D G sumatur quodlibet punctum G dummodo intra sectionem existat, & per G ad concursum C coniungatur recta linea G C, quæ producta occurrat sectioni in B: & quia ex hypothesi recta F D G perpendicularis erat ad maximum ramum D C, ergo in triangulo D G C rectangulo erit hypothenusa G C maior quàm D C, & ideo B C multo maior erit quàm D C; quod est absurdum, supposita enim fuit D C omnium maximæ earum, quæ ex C ad sectionem A B ducí possunt.*

Notæ in Propositi. XXXXVIII.

a



ALioquin occurtant in O, quia istæ lineæ sunt maximæ, &c. *Secant enim lineæ maximæ semiaxim maiorem D A in punctis M, N, & L: & siquidem tres lineæ maximæ conueniunt in vnico puncto O,* 32. huius. *erunt segmenta inter axim maiorem, & sectionem intercepta, nimirum M K, N H, L F lineæ breuissimæ; quarum duæ quæquè L F, N H educuntur ab eodem puncto concursus O: igitur (ex 54. 55. huius) tertius ramus O K ab eodem concursu O eductus non erit breuisecans; quod est contra hypothesim.*

LIBRI QVINTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VI.

DEFINITIONES.

I.

SEctiones ÆQVALES sunt, quæ ad inuicem superpositæ sibi mutuò congruunt.

II.

SIMILES verò sunt, in quibus omnes potentiales ad axium abscissas vtrobique sunt in ijsdem rationibus, tum abscissæ ad abscissas.

III.

Et linea, quæ subtendit segmentum circumferentiæ circuli, aut sectionis coni vocatur BASIS illius segmenti.

IV.

Et linea, quæ bifariam diuidit ordinationes æquidistantes basi illius, vocatur DIAMETER illius segmenti.

V.

Et eius terminus, qui est ad sectionem, VERTEX segmenti.

VI.

Et SEGMENTA ÆQVALIA sunt, quæ superposita sibi mutuò congruunt.

VII.

Et SIMILIA sunt, quorum bases cum diametris æquales angulos continent, & in eorum singulis ductæ lineæ basi parallelæ numero æquales ad abscissas diametrorum sunt in ijsdem rationibus tum abscisæ ad abscisas.

VIII.

VIII.

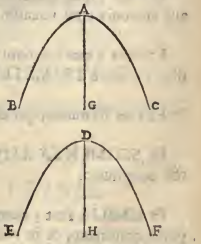
CONI SIMILES sunt, quorum axes æquè ad bases inclinati, ad diametros basium proportionales sunt.

IX.

Et dicitur conus continere sectionem, & sectio in cono posita esse, si sectio tota fuerit in superficie coni, aut cadat in illa, si producatur ex parte basis.

NOTÆ.

Definitiones huius sesti libri ferè omnes sunt Appollonij, in paucis quidem alterata ab interprete Arabico: quod quidem constat testimonio Eutocij Ascalonitæ, qui in tertiam propositionem secundi æquiponderantium Archimedis affert definitionem similium portionum conicarum sectionum, traditam ab Apollonio in eius sesto libro: & sanè ordo doctrinæ exigebat, vt prius sectiones æquales, & similes definirentur, vt postea earum symptomata demonstrari possent: sed animaduertendum est, hactenus nomen sectionis conicæ significasse quamlibet indeterminatam portionem curuæ lineæ in coni superficie ortam ex sectione alicuius plani non per verticem coni ducti, non considerando termiuos eius neque mensuram. Segmentum verò significat portionem aliquam sectionis conicæ determinatæ mensuræ, & certis finibus terminatam: at multoties significat superficiem à conisectione, & rectæ lineæ eam subtendente contenta. Igitur ad confusionem vitandam vocabo huiusmodi superficiem planam, Mixtam superficiē sectionis conicæ. Modò in relatis definitionibus prius quænam conisectiones vocari debeant inter se æquales exponit Apollonius.



I. *Et primo; Si fuerint duæ quælibet conisectiones B A C, E D F, quarum axes A G, D H; vertices verò A, & D, & siquidem intelligatur sectio B A C superpositæ sectioni E D F, vt nimirum vertex A super verticem D eadat, atque axis A G super axim D H, atque pariter peripheriæ B A C, & E D F sibi mutuò congruant: tunc quidem vocantur duæ dictæ sectiones conicæ æquales inter se. Vbi notandum est, non oportere longitudinem curuæ B A C æqualem esse longitudini curuæ E D F; sicuti, vt duo anguli rectilinei dicantur æquales, & sibi mutuò congruentes, necesse non est, vt rectæ lineæ, angulos continentes, sint æquales longitudine, dummodo certum sit, quod lineæ ipsæ vlterius productæ semper sibi mutuò congruant; sic pariter peripheria conicarū sectionum A B, & D E, si vlterius producantur, semper sibi mutuò congruent.*

II. *In*

II. *Codex Arabicus habet*. Similes verò sunt, quarum proportio potentium in vna earum ad sua abscissa est eadem proportioni aliarum potentium ad sua abscissa, & proportio abscissarum in vna earum ad sua opposita abscissa eadem est. *Putabit forte quispiam, me nimis licentiosè transformasse potius, quàm emendasse textum in hac secunda definitione; sed is sciat velim, non meo arbitratu id fecisse sed ex præscripto eiusdem Apollonij pluribus in locis; non quidem in hisce compendiosissimis definitionibus, in quibus vna particula omissa, vel addita, (vt passim cõtingit in codicibus vetustissimis) sensum omninò permutat; sed iis in locis in quibus oratione continua exponit, & exemplis declarat germanum sensum huius secundæ definitionis, & septimæ subsequentis, vt suis in locis monebitur. Primo igitur supplere debent particulæ* ad conterminas axium abscissas, *quæ in textu omnino subintelligi debent vt expresè declaratur in propos.* 11. 12. 15. *&* 16. *huius libri, quibus in locis semper in sectionibus similibus præcipitur vt abscissæ tantummodo in axibus sumantur, aut æquè sint inclinatæ ad conterminas potentiales. Secundò postrema verba* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas *possent retineri cũ sensum definitionis non omnino intollerabilẽ reddant: & insuper in textu græco Eutocij repetantur, & eius sensus talis est. In coniectionibus B A C, E D F, quarum axes A G, D H fuerint quotcunq; potentiales, sen ad axim applicatæ B C, E F, I L, M O occurrentes axibus in G, H, K, N hac lege, vt potentialis B C ad abscissam G A eandem proportionem habeat quàm potentialis E F ad abscissam H D, & potentialis I L ad abscissam K A sit, vt M O ad N D, & tandem abscissa G A ad K A sit, vt abscissa H D ad N D: & hoc verificetur in omnibus alijs potentialibus eadem lege ductis; tunc quidem duæ illæ sectiones similes appellantur iuxta Eutocij, & Mydorgij sententiam.*

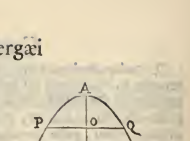
Ego contra puto, hanc expositionem neq. Apollonio, neq. veritati conciliari posse, vt ad propos. 12. *ostendetur attamen existimo, definitionem hac ratione formari posse.*

Similes coniectiones sunt, in quibus qualibet axium abscisse erectis proportionales etiam ad conterminas potentiales eandẽ rationem habent: quæ omnino conformis est præcedenti definitioni, præterquam in postrema particula, vbi enim ait. Sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad abscissas. *Legendum esset:* sunt in ijsdem rationibus tum abscissæ ad erecta. *Sed an hac particula corrigi debeat, vel non, alij videant.*

III. *Si verò fuerit portio sectionis conicæ B A C, vel circunferentiæ circuli, atq. recta linea B C eam subtendat, & secet in duobus punctis B, & C, vocatur B C, Basis prædicti segmenti B A C.*

IV. *Et*

IV. *Et si in eodem segmento ducantur ordinatæ parallelæ basi B C, atque rectæ lineæ A M secet omnes æquidistantes ipsi B C bifariam in punctis M, N, & O vocabitur A M: Diameter eiusdem segmenti.*

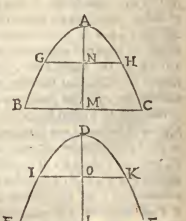


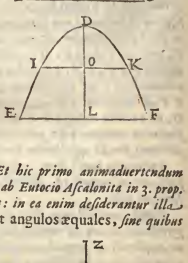
V. *Et terminus eiusdem diametri A ad sectionem positus, vocatur Vertex segmenti.*

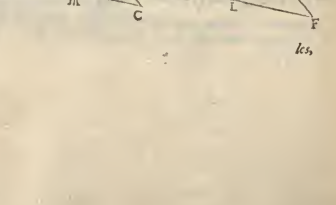
Tres prædictæ definitiones superadditæ ab interprete Arabico fuerunt, vt ego puto, quandoquidem omnino necessariæ non sunt.

VI. *Sicuti in prima definitione sectiones sibi mutuò congruentes æquales vocabantur, sic pariter, si segmentum B A C superpositum segmento E D F sibi mutuò congruant, sunt duæ illæ lineæ curuæ æquales inter se.*

VII. *Declarat Apollonius in hac definitione septima, quanam segmenta conica similia inter se censeri debeant. Vt si fuerint duarum conicarum sectionum segmenta B A C, & E D F, quarum diametri A M, & D L efficiant cum ordinatim applicatis, seu cum basibus B C, & E F angulos æquales in M, & L, & in vnaquaque earum ductæ fuerint pares multitudines applicatarum, quæ sint basibus æquidistantes, vt G H, & I K, & in eis verificentur hæ conditiones, vt habeat B C ad abscissam M A eandem proportionem, quàm E F ad abscissam L D, & G H ad abscissam N A eandem proportionem habeat, quàm I K ad abcisam O D, & tandem abcisa M A ad abscissam A N eandem proportionem habeat, quàm abscissa L D ad abscissam D O; tunc quidem vocat Apollonius duo segmenta B A C, & E D F similia inter se. Et hic primo animaduertendum est, disinctionem segmentorum similium relatam ab Eutocio Ascalonita in 3. prop. lib. 2. æquipond. Archimedis, non esse integram: in ea enim desiderantur illa verba,* quarum bases cum diametris continent angulos æquales, *sine quibus definitio esset erronea, vt optime notat Mydorgius. Hoc autem ita esse verba textus Arabici aperte declarant, habent enim.* Et similia sunt quorum bases continent cum diametris angulos rectos *legendum aqua-*

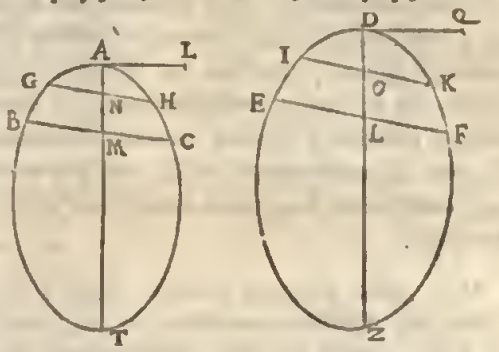






les,

les, & educantur in quolibet eorum ordinationes ad ſuas baſes numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus. *Idem repetit in propoſ. 15. huius lib. rurſus in propoſ. 16. litera* a *inquit*: Et quod anguli à potentialibus, & abſciſſis contenti ſint æquales in duobus ſegmentis, erit ſegmentum H A G ſimile ſegmento I C K: &c. *& propoſ. 17. litera* c *ait*: & anguli comprehenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; &c. propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia; *Et in eadem propoſ. litera* d *dicit*. Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales. *Et eodem modo ſemper loquitur Apollonius; quare dubitandum non eſt, in Eutocy definitione hæc eadem verba deſiderari.*



Immutani poſtea verba ſubſequentia; nam ordinationes, ſeu ordinatim applicata ducuntur ad diametros, non ad baſes, & debent eſſe baſibus aquidiſtantes. Deinde breuitas affectata poſtremæ partis huius definitionis non Apollonio, ſed Arabico Interpreti tribui debet, nam eadem expreſſe, & extenſe declaratur in textu Eutocy his verbis. In quarum ſingulis ductis lineis baſi parallelis numero æqualibus, ſint ipſæ parallelæ, & baſes ad abſciſſas diametrorum partes ſumptas à verticibus in ijſdem rationibus, tum abſciſſe ipſæ ad abſciſſas. *In textu verò Arabico hæc non habentur expreſsè, ſicut in ſecunda definitione, quàm etiat hiſce verbis.* Et educantur ex quoliber eorum ordinationes baſibus parallelæ numero æquales, quarum proportio cum diametris eſt, vti diximus in ſectionibus ſimilibus.

MONITVM.

AMOR veritatis, & muneris ſuſcepti ratio exigere videtur, vt definitiones ſectionum conicarum ſimilium, quæ circunferuntur, accuratius examinentur, ne (vt Mydorgij verbis vtar) à magnis nominibus (Eutocium dico, Commandinum, & Mydorgium) præiudicium diutius fiat veritati, hoc autem ad propoſ. 11. 12. huius lib. præſtabo. Interim monendus es Lector, in definitione ab Eutocio relata aliqua verba deficere (nimirum quod abſciſſæ in axibus, aut diametris æquè ad ordinatas inclinatis ſumantur) in definitionibus Commandini aliquod deſiderari, & eas meritò re-

rito reiectas à Mydorgio fuisse, nam licet latera transuersa proportionalia sint lateribus rectis, non tamen duæ eiusdem nominis sectiones similes erunt, nisi diametri æquè inclinatæ sint ad ordinatim ad eas applicatas: tandem definitionem Mydorgij similium sectionum pariter imperfectam esse suspicor; nam licet duæ sectiones, quibus competit tradita definitio, seu passio eiusdem definitionis, sint reuera similes, non tamen è conuerso similibus sectionibus conuenit solummodo definitio, seu eius passio, cum aliquando apposita passio in eisdem reperiatur: quod perinde est, ac si quis putaret triangulum æquilaterum aliquando latera inæqualia habere posse.

VIII. *In hac definitione manifestè aliquid desideratur; inquit enim* (Coni similes sunt quorum axium proportio ad diametros suarum basium eadem est.) *Quod quidem verificatur tantummodo in conis rectis: at in scalenis debent necessario axes conorum efficere æquales inclinationes super bases: Quod quidem in sequentibus propositionibus manifestè ab Apollonio declaratur. Itaque textum hac ratione restitui debere puto. Coni similes sunt, quorum axes æquè ad bases inclinati ad diametros basium proportionales sunt.*

IX. *Sectio genita in superficie coni à plano eum secante, non per verticem eius ducto dicitur in dicto cono posita, & contenta; & conus ille continere dicitur eandem sectionem: & licet coniectio exhibeatur extra conum; dicetur nihilominus contineri ab illo cono, in quo sectio illa accomodari potest, seu in quo ab aliquo plano secante effici potest in coni superficie eadem illa coniectio.*

SECTIO PRIMA

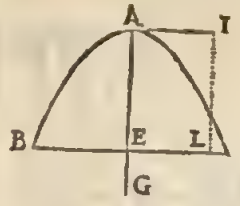
Continens Proposit. I. II. IV. & X.

PROPOSITIO I.

QVælibet duæ sectiones parabolicæ A B, C D, si habuerint axium erectos A I, C N æquales: erunt inter se æquales. Si verò duæ illæ sectiones fuerint æquales, erunt axium erecta æqualia inter se. a

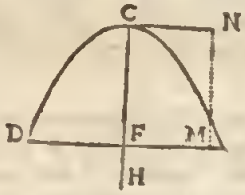
Quoniam superposita axi C H super axim A G, cadet sectio C D super sectionem A B: si enim cadere non concedatur super illam, signetur (si fieri potest) punctum eius D, extra sectionem A B cadens: & educatur D F perpendicularis ad axim; & perficiatur planum rectangulum F N, & ab axi A G secetur A E æqualis C F; & educatur ex E perpen- b

pespendicularis B E, & perficiatur planũ E I. Et quia A I, A E æquãtur C N, C F, vnaquæque ſuo homologo: igitur planum I E, nempe (12. ex 1.) quadratum B E æquale eſt rectangulo F N, nempe quadrato D F (12. ex 1.) ergo B E æqualis eſt D F; ſi autem ſuperponatur axis axi cadet D ſuper B, quæ tamẽ haud cadere conceſſum fuerat: & hoc eſt abſurdum; ergo fieri non poteſt, vt duæ ſectiones æquales non ſint.



11. lib. 1.

Ibidem.



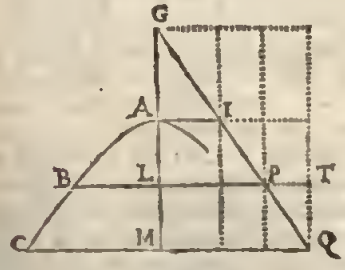
c Præterea ſupponamus duas illas ſectiones æquales eſſe inter ſe, & fiat F C æqualis E A, & educamus ad axes perpendiculares B E, D F, & perficiamus plana rectangula F N, E I. Quia ſectio A B cadit ſuper ſectionem C D, & A E ſuper C F cadet; alioquin eſſent in eadem parabola duo axes: ergo F cadit ſuper E, & D ſuper B, & propterea B E potens planum E I (12. ex 1.) æqualis erit D F potenti planum F N (12. ex 1.); ergo duo plana ſunt æqualia; ſed ſunt applicata ad æquales F C, A E; igitur C N, A I erectæ æquales ſunt. Et hoc erat oſtendendum.

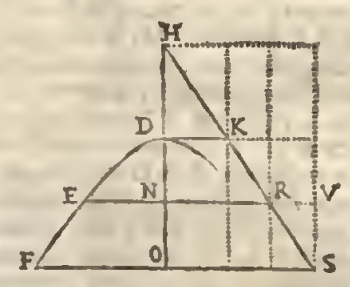
11. lib. 1.

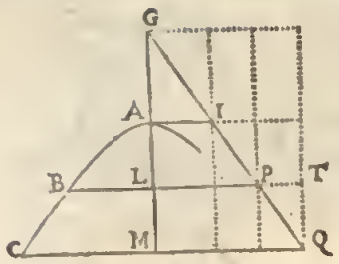
Ibidem.

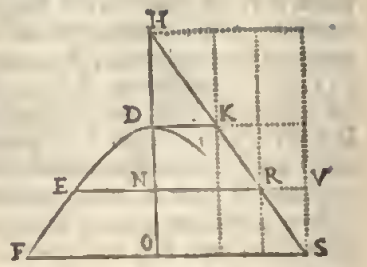
PROPOSITIO II.

SI duæ ſectiones hyperbolicæ, aut duæ ellipſes A B C, D E F habuerint axium figuras G I, H K ſimiles, & æquales;
a duæ illæ ſectiones æquales erunt. Si verò duæ ſectiones æquales fuerint, earũ figuræ axiũ erunt æquales, ſimiles, & ſimiliter poſitæ.





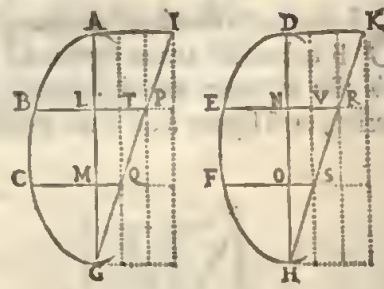




Quoniam facta conuenienti superpositione axis A M super axim D O, cadet quoque sectio A B super sectionem D E: si enim non cadit super illam, sumatur (si fieri potest) eius punctum B, extra sectionem D E cadens; & producatur ad axim perpendicularis B L vsque ad P: & perficiatur planum A P applicatum comparatum; & secetur D N æqualis A L, & erigatur per N ad axim perpendicularis N E, & producatur vsque ad R, perficiendo planum D R applicatum comparatum; Et quia A I æqualis est D K, & A L æqualis D N: erit planum I L, æquale plano K N; cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, parterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia: & propterea E N, B L, quæ illa spatia possunt (13. 14. ex 1.) sunt æquales. Si autem superponatur axis axi cadet B L super E N, eoquod duo anguli N, & L sunt æquales; igitur B cadit super E, quod prius cadere non concedebatur: & hoc est absurdum. Quapropter sectio sectioni æqualis est. b

12. 13. lib. 1.

Deinde ponamus duas sectiones æquales, vtique congruet sectio A B sectioni D E, & axis A L axi D N, quia si non cadit super illum, essent in hyperbola duo axes, & in ellipsi tres axes, quod est absurdum (52. 53. ex 2.) Et fiat A L æqualis D N, & reliqua perficiantur, vt prius cadent duo puncta L, B super N, E; ideoque B L æqualis erit E N; & poterunt æqua-



c

48. lib. 2.

d

12. 13. lib. 1.

lia rectangula A P, D R applicata ad æquales A L, D N (13. 14. ex 1.) ergo L P æqualis est N R. Similiter ponatur A M æqualis D O, & educantur C M Q, F O S duæ ordinationes, ostendetur, quod M Q æqualis est O S, & L M æqualis N O; & propterea duo plana P Q, R S sunt æqualia, & similia; igitur duo plana G P, H R sunt æqualia, & similia, & L P ostensa est æqualis N R: ergo G L æqualis est H N, & A L æqualis D N; & propterea G A æqualis est D H, & A I æqualis D K.

Quapro-

Quapropter duæ figuræ G I, H K ſunt æquales, & ſimiles. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO IV.

a SImili modo demõſtrabitur, quod duæ ſectiones oppoſitæ ſint ſimiles, & æquales.

Eo quod axis inclinatus eſt communis, & erecti ſunt æquales (16. ex 1.) & propterea earum figuræ æquales quoque ſunt inter ſe. Et hoc erat propoſitum.

14. lib. 4.

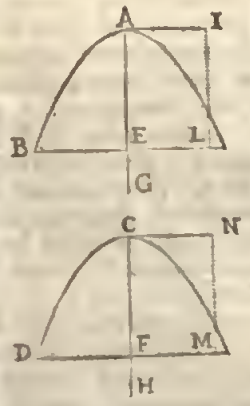
PROPOSITIO X.

a PAriter conſtat, quod ſi potentiales cum ſuis abſciſſis cõpræhendant angulos æquales obliquos, eadem conſequentur, quæ prius dicta ſunt.

Et hoc erat propoſitum.

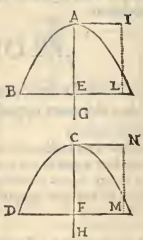
Notæ in Propoſit. I.

a QVælibet duæ ſectiones parabolicæ, vt A B, C D, quarum relationes ſunt duo plana A L, C M, & erecti earum A I, C N æquales. ipſæ quoque ſunt æquales. Si verò duæ illæ ſectiones fuerint æquales, vtique earum applicata, & erecti erunt æquales, &c. *Verba illa propoſitionis (* applicata ſunt duo plana A L, C M, &c. *) caſu in textum irrepſiſſe puto, eo quod rectangula illa A L, C M, nedum æqualia non ſupponuntur, ſed è contra conſtruuntur, atque demonſtrantur æqualia eſſe inter ſe.*



b Quia ſi ponamus ſagittam C H ſuper ſagittã A G, cadet ſectio C D ſuper ſectionem A B: ſi verò non cadit ſuper illam, ſignemus ſuper literam, in quam non cadit punctum D: &c. *Sic legendũ puto. Quoniam,*

niam, superposita axi C H super axim A G, &c. vt in textu habetur. Si enim axis C H super axim A G applicatur, ita vt vertices A, C coincidant, necessariò sectio C D cadet super sectionem A B alias assignari posset punctum eius D, extra sectionem A B cadens.



Præterea ponamus duas sectiones æquales, & C F æqualis A E, &c. *Textum corruptum sic restituendum censeo. Præterea supponamus, duas illas sectiones aquales esse inter se, & fiat C F aqualis A E, educamus ad axes perpendiculares B E, D F, &c. Sic enim distinguitur hypothesis propositionis à constructione eius.* c

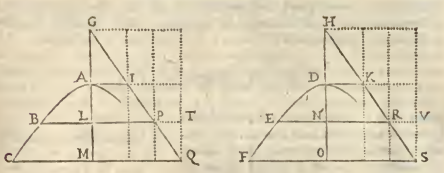
Ergo sectio A B cadit super sectionem C D, & A E super C F: alioqui essent sectioni parabolicæ duo axes; ergo F cadit super E, &c. *Quoniam (ex hypothesi) sectiones A B, & C D æquales sunt, facta intellectuali conuenienti superpositione, sibi mutuò congruent, & vertex A cadet super verticem C. Dico iam, axim A E cadere super axim C F: alioquin in eadem parabola, scilicet in duabus parabolis sibi congruentibus à communi vertice C, vel A, duo axes A E, & C F ducerentur: quod est impossibile. Quare axis A E cadit super axim C F.* d

Notæ in Propositionem II.

SI fuerint figuræ duarum sectionem hyperbolicarum, aut duarum ellipsium, vt duo plana G I, H K in A B, D E similes, & æquales; vtique duæ sectiones æquales erunt: si verò duæ sectiones sint æquales earum figuræ erunt æquales, similes, &c. *In duabus sectionibus A B, & D E sumi debent figuræ G I, & H K, non qualescunque, sed illæ, quæ ad axes sunt, nimirum debent esse G A, & H D axes inclinati, seu transuersi, & A I, atque D K eorum latera recta; tunc quidem, si figuræ axium G I, H K fuerint similes, & æquales, conicæ sectiones B A, D E æquales quoque ostenduntur in propositione. Quod verò particula illa (axium) desideretur in textu propositionis, constat ex primis verbis immediatè sequentis constructionis. Inquit enim.* Quoniam si ponamus axim A M super axim D O, &c. a

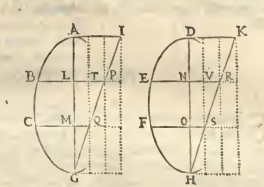
Cumque G I, H K sint duæ figuræ similes, & æquales, pariterque I P, K R; ergo duo plana A P, D R sunt æqualia, &c. *Quia rectangula I P, G I circa communem diametrum G I P consistunt, erunt inter se similia: pariterque K R simile erit rectangulo K H: quare duo rectangula I P, & K R similia sunt duobus rectangulis G I, H K inter se similibus; & ideo illa inter se quoque similia erunt, & habent latera homologa æqualia, illa nimirum, quæ opponuntur æqualibus abcissis A L, & D N, igitur rectangula P I, & R K* b

æqualia



æqualia sunt inter se: sunt verò rectangula N K, & L I æqualia quoque (cum latera circa angulos rectos æqualia habeant, singula singulis) ergo duo rectangula A P, & D R æqualia sunt inter se.

c Quia, si non cadit super illum, essent sectioni hyperbolicæ duo axes, & in ellipsi tres axes, &c. *Quoniam æquales sectiones B A, E D sibi mutuò congruunt, & vertices A, & D coincidunt, siquidem axis A L non cadit super axem D N (cum ambo tamen axes sint) haberet vnica sectio, scilicet duæ sectiones congruentes, duos axes A L, & D N conuenientes in eodem puncto verticis, quod in hyperbola est impossibile; in ellipsi verò, in qua semper duo axes reperiuntur se se secantes in centro ad angulos rectos, reperietur tertius axis, ille nimirum, qui ab eodem vertice A ducitur in eadem sectione A B, & non coincidit cum axi A L.* 48. lib. 2.

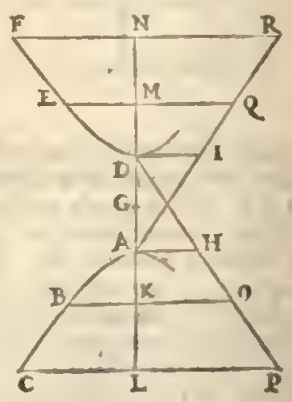


d Ideoque B L æqualis est N E, & poterunt A P, D R, applicata ad A L, D N æqualia &c. *Quia quadrata æqualium B L, E N æqualia sunt rectangulis A P, D R; erunt illa æqualia, & eorum latera A L, D N facta sunt æqualia; igitur reliqua duo latera L P, N R æqualia quoque sunt. Simili modo ostendetur, quod M Q æqualis est O S, seù L T æqualis est N V, & L M, seu T Q æqualis est N O, seu V S; erant autem prius L P, N R æquales; igitur residuæ P T, & R V æquales erunt, sed quia T Q, & G L sunt parallelæ pariterque V S, & H N; ergo vt T P ad P L ita est Q T ad L G, simili modo vt V R ad R N ita est S V ad N H; habent verò duæ æquales T P, & V R ad duas æquales P L, & R N eandem proportionem, igitur duæ æquales Q T, & S V eandem proportionem habent ad L G, & N H, & propterea hæ erunt æquales, & ablatis æqualibus A L, D N, erunt reliquæ A G, & D H inter se æquales, & habet G A ad A I eandem proportionẽ, quam Q T ad T P, seu quam S V ad V R; pariterq; H D ad D K est vt S V ad V R (propter parallelas & similitudinẽ triangulorũ) igitur vt G A ad A I ita erit H D ad*

ad D K, & propterea etiam consequentes A I, & D K æquales sunt inter se, & comprahendunt angulos rectos A, & D; ergo figura G A I, & H D K similes sunt inter se, & æquales.

Notæ in Propoſit. IV.

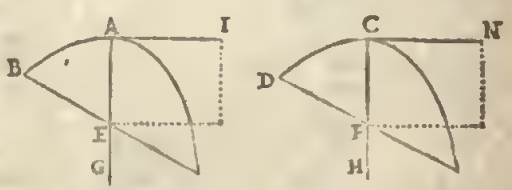
IAm ergo demonſtratum eſt, quod duo vertices tympani ſunt ſimiles, & æquales, & inclinatus communis inter vtrumque verticem (16. ex 1.) ergo figura eſt communis, &c. *Hac propoſitio eſt veluti Corollarium primæ partis ſecundæ propoſitionis in qua oſtenſum eſt, quod ſi duæ hyperbolæ habuerint axium figuras æquales, & ſimiles, erunt quoque ſectiones ipſæ æquales, & congruentes; habent verò ſectiones oppoſita A B, & D E (quæ vocantur Vertices Tympani ab Arabico interprete) figuras D A H, & A D I axis D A æquales, & ſimiles (vt in 14. primi libri demonſtrauit Apollonius); ergo ſectiones oppoſita æquales erunt inter ſe, & congruentes.*



a

Notæ in Propoſit. X.

SImiliter conſtat, quod ſi potentes contineant cum ſuis abſciſſis angulos æquales obliquos, iudicium eſt, quod memorauimus in ſectionibus, &c. *Senſus huius propoſitionis talis eſt. In duabus ſectionibus conicis, ſi cum earum diametris ordinatim applicata 'contineant' angulos æquales, non rectos, & earum latera recta ſint æqualia in parabolis, in reliquis verò ſectionibus latera recta, & tranſuerſa æqualia, itaut figuræ ipſæ æquales ſint; erunt ſectiones ipſæ inter ſe æquales: & è conuerſo, ſi ſectiones æquales fuerint, habebunt latera æqualia earum diametrorum, cum quibus ordinatim applicata angulos æquales, non rectos continent.*



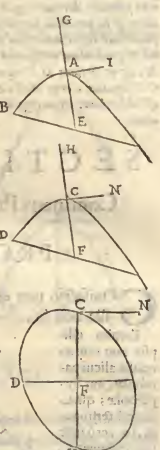
a

Demonſtrationes non apponuntur ab Apollonio, quia ijſdem verbis omnino in eiſdem figuris abſolui poſſunt. Sint enim primo duæ parabolæ A B, & C D, atque earum diametri A G, & C H efficiant æquales angulos F, & E, cum ordinatim ductis D F, & B E, ſintque latera recta A I, C N æqualia. Dico,

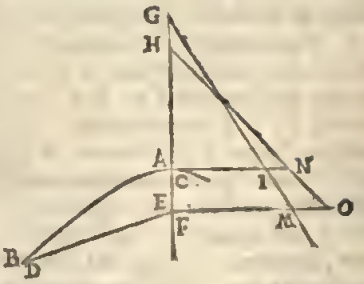
ſectiones

sectiones æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B in sectione B A ducaturque ordinatim applicata B E, secturque C F æqualis A E, & ducatur ordinatim D F. Manifestum est, rectangula E A I, & F C N æqualia esse (cum latera sint æqualia, singula singulis); his verò rectangulis æqualia sunt quadrata ordinatim applicatarum E E, D F; ergo & quadrata sunt æqualia, atque eorum latera B E, D F æqualia quoque. Si igitur parabolæ superponantur ita, vt punctum E super F, & diameter A E super C F cadat, necessariò punctum A super C cadet (propter æqualitatem abscisarum) atque punctum B super punctũ D incidet (propterea quod anguli E, & F æquales sunt, pariterque rectæ B E, & D F sunt æquales), & quia quodlibet punctum B parabolæ A B cadit semper super sectionem C D; ergo duæ sectiones B A, & D C sibi mutuò congruunt, & ideo æquales sunt. Non secus conuersum huius propositionis demonstrari potest. 11. lib. 1.

Altera verò pars propositionis brevius demonstrabitur hac ratione. In duabus hyperbolis, aut ellipsibus efficiant ordinatim applicatæ B E, D F cum diametris A E, & C F angulos æquales, & non rectos; sintque transuersa latera G A, & H C æqualia, pariterque latera recta A I, & C N æqualia. Dico, sectiones B A, C D æquales esse. Sumatur quodlibet punctum B sectionis B A, ducaturque ad A E diametrum ordinatim applicata B E, secetur-que C F æqualis abscissa A E, ducaturque F D ad H C F diametrũ ordinatim applicata. Erit rectangulum G E A ad quadratum B E, vt latus transuersum G A ad rectum A I; pariterque rectangulum H F C ad quadratum F D erit, vt H C ad C N: habent verò duæ æquales G A, & H C eandem proportionem ad duas æquales A I, & C N; igitur rectangulum G E A ad quadratum B E eandem proportionem habebit, quam rectangulum H F C ad quadratum D F, sunt verò rectangula G E A, H F C æqualia inter se (quandoquidem eorum latera A E, C F facta sunt æqualia) quæ addita ipsis A G, & C H æqualibus efficiunt latera E G, & F H æqualia; ergo quadrata duarum B E, & D F æqualia sunt inter se; & ideo ordinatim applicatæ B E, & D F æquales erunt. Quare facta, vt prius, intellectuali superpositione; necdum vertex A super C, sed etiam quodlibet punctum B sectionis A B super sectionem C D cadet; ideoque sectiones sibi mutuò congruent, & æquales erunt. 21. lib. 1.



E conuerso, si sectiones B A, & C D æquales supponantur, sibi mutuò con-



gruent, & ideo à communi vertice A, ducta qualibet diametro A E, vel C F, ad quàm ordinatim applicetur qualibet B E, seu D F in angulo non recto; sintque latera transuersa, & recta G A, A I, atque H C, C N. Dico, huiusmodi latera, & figuræ seu rectãgula G A I, H C N aqualia, & similia esse inter se, & sibi mutuò congruentia. Si enim hoc verum non est, eorum diametri G I, & H N similiter posita, & subtendentes communem angulum A non coincident; & ideo aquidistantes erunt aut se mutuò secabunt in vno puncto: ducatur ergo à termino E alicuius ordinatim applicatæ B E recta linea E M parallela lateribus rectis A I, C N, ita vt secet diametros figurarum supra aut infra occursum in duobus punctis M, & O. Igitur in sectione A B idem quadratum ordinatim applicatæ B E, seu D F æquale erit rectangulo A E M, & in sectione D C æquale erit rectangulo C F O, suntque abscissa A E, & C F æquales; ergo M E, & O F æquales inter se sunt: pars, & totum quod est absurdum: Non ergo latera figurarum inæqualia sunt. Quod erat ostendendum.

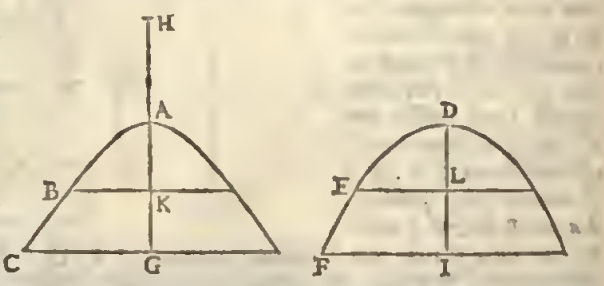
SECTIO SECVNDA

Continens Propositt. III. VI. VII. & IX.

PROPOSITIO III.

COnisectio non est æqualis sectioni quæ eiusdem generis cũ illa non sit.

Etenim ellipsis non erit æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ; quia illa est terminata, hæ verò sunt indeterminatæ. At parabola D E F, cuius axis D I non erit æ- a



qualis hyperbolæ A B C, cuius axis A G, & inclinatus A H. Quia si abscindantur A K, K G æquales D L, L I, & educamus ad axes perpendiculares B K, C G, E L, F I: Dico, quod sectio D F non est æqualis

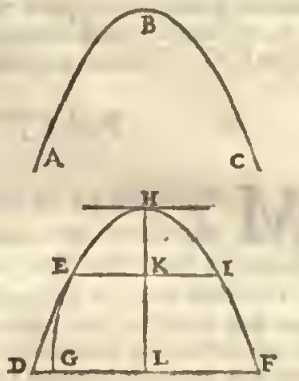
sectioni

ſectioni A C; quia ſi eſſet æqualis illi, facta ſuperpoſitione, ſibi mutuò congruerent, & caderent puncta E, F, L, I, ſuper B, C, G, K, & eſſet F I æqualis C G, atque E L æqualis B K; ideoque quadratũ F I ad quadratum E L eſſet, vt D I ad D L (19. ex 1.) eſſetque quadratum C G ad quadratum K B, vt A G ad K A, quod eſt abſurdum; quia illius proportio ad iſtam eſt, vt H G in G A ad H K in K A (20. ex 1.) Igitur ſectio parabolica non eſt æqualis ſectioni hyperbolæ, nec ſectio aliqua æqualis eſt ſectioni, quæ non ſit eiuſdem generis; Et hoc erat oſtendendum. 20.lib. 1. 21.lib. 1.

PROPOSITIO VI.

a QVælibet duæ ſectiones A B C, & D H F, quarum portio vnius ſuperpoſita portioni alterius congruit, ſunt æquales inter ſe.

Alioquin congruat portio B C portioni E F, at non eadat portio A B ſuper D E, ſed cadat in ſitu E G, & educamus lineam tangentem duas ſectiones in H, & educamus E I, D G F parallelas tangenti; & ex H ad ſemipartitionem ipſius E I ducatur H K, quæ occurrat D F in L. Et quia H L ſecat bifariam lineam parallelam tangenti ab eius termino ductæ; ergo eſt diameter vniuerſæ ſectionis (5. ex 2.) quare bifariam ſecat vnamquanque ex D F, G F, & fiet D L æqualis G L, quod eſt abſurdum: igitur ſectio A B C tota congruit ſectioni D H F. Quod erat oſtendendum.

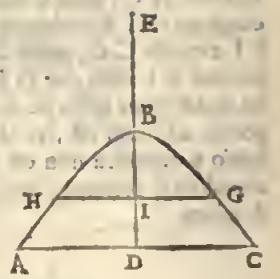


34.lib. 1. 7.lib. 1.

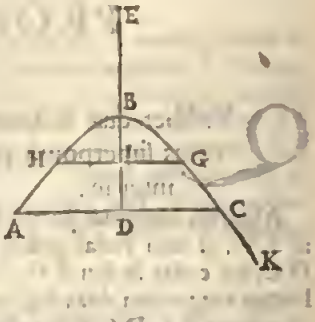
PROPOSITIO VII.

a DVæ ordinationes axis in qualibet coni ſectione abſcindunt à ſectione ex vtraque parte axis duas portiones, quarum ſi vna alteri ſuperponatur ſibi mutuò congruent, nec congruunt alicui aliæ portioni ſectionis.

Sit coniſectio A B C, & eius axis B D, & ſumantur in ſectione puncta G, C, ab eis educãtur duæ ordinationes G H, C A occurrentes axi in I, D. Dico, quod B G congruit B H, & G C ipſi H A, & ſuperficies B D C ſuperficiei B D A, & ſegmentum B G C ſegmento B H A. Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C in I, D, vtique G I ipſi I H congruet, & D C ipſi D A, & duo puncta G, C ſuper duobus punctis H, A cadent, & portio ſectionis conicæ G C ſuper portionem H A, & G B ſuper H B: Et dico, quod portio H A non congruit alicui alteri portioni, quàm G C: ſi enim poſſibile eſt cõgruat portioni C K, & portio H B congruet portioni, quæ continuatur ipſi K C; ergo cadet B ex H B non ſuper B ex C G B; quia portio H B non eſt æqualis portioni C B; & propterea incidet axis B D in alium locum, eſſentque eidem ſectioni plures axes: quod eſt abſurdum; 42.lib. 2. (51. 52. ex 2.) igitur non cadit H A niſi ſuper C G. Vt fuerat propoſitum.



b



PROPOSITIO IX.

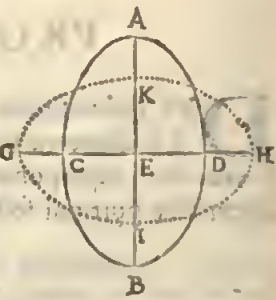
MAniſeſtum eſt ex demoſtratis, quod portiones ſectionum æqualium non congruunt ſibi inuicem, niſi earum diſtantiæ à verticibus ſint æquales. a

Oſtenſum enim eſt ſibi non congruere, quarum diſtantiæ à verticibus non ſunt æquales, quia portio H A, ſi caderet ſuper portionem C K, & earum diſtantiæ à B non eſſent æquales, conſequitur, quod in hyperbola 42.lib. 2. ſint duo axes, & in ellipſi tres axes: quod eſt abſurdum (51. 52. 53. ex 2.)

Si autem in ellipſi cadit axis A E tranſuerſus ſuper axim rectum illius, vtique differunt inter ſe, & non ſibi inuicem congruunt ſectiones. b

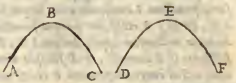
Conſtat etiam, quod in ſectionibus inæqualibus, vt A B C, D E F portio vnius earum non congruit portioni alterius.

Alioqui congruet B A ipſi D E, & congrueret etiam E F ipſi B C (6. ex 6.) eſſetque ſectio C B A æqualis ſectioni F E D: at ſuppoſuimus, non eſſe æquales, quod eſt abſurdum:



Ergo

ergo non congruit portio alicuius sectionis portioni alterius sectionis, cui æqualis non est. Et hoc erat ostendendum.



Notæ in Propositi. III.

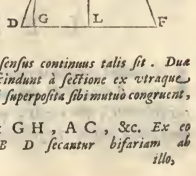
a ETenim ellipsis non est æqualis alicui hyperbolæ, &c. *Supplerì debet in textu verbum* (parabolæ) *dicendo. Etenim ellipsis non est æqualis alicui parabolæ, aut hyperbolæ, quia illa est determinata; hæ verò sunt indeterminatæ, scilicet ellipsis est finita parabole verò, & hyperbole in infinitum extendi possunt, & propterea nulla ratione æquales ostendentur.*

Notæ in Propositi. VI.

a QVælibet duæ sectiones A B C, D E F, quarum vnaquæque literarum superposita literis alterius congruit; vtique sunt æquales, &c. *Legendum puto. Quælibet duæ sectiones A B C, & D E F, quarum portio vnius, alterius portioni superpositæ congruit sunt æquales inter se.*

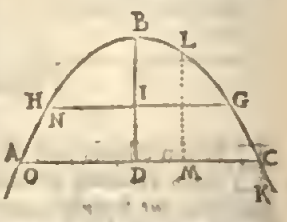
Notæ in Propositi. VII.

a ORdinationes axis in qualibet hyperbolarum abscindunt à sectione ex vtraque parte axis duo segmenta, quæ, si cadit vnum super alterum, sibi mutuò congruunt, nec excedunt, nec deficiunt, nec congruunt alicui portioni sectionis, &c. *Expungi debent verba aliqua huius textus superuacanea, & aliqua adiungi, vt sensus continuus talis sit. Duæ ordinationes axis in qualibet conisectione abscindunt à sectione ex vtraque parte, axis duas portiones, quarum vna alteri superpositæ sibi mutuò congruunt, nec cõgruunt alicui aliæ portioni sectionis.*



b Quoniam axis B D bifariam diuidit G H, A C, &c. *Ex eo enim quod omnes applicatæ ad axim E D secantur bifariam ab illo,*

illo, & ad angulos rectos, si intelligatur superficies B I G, superposita superficiei B I H, itaut axis super axim cadat, atque vertex B sit communis necessario punctum I commune erit, atque recta I G cadet super I H, cum anguli G I B, & H I B recti sint, atque punctum G cadet in H, propter aqualitatem duarum ordinatim applicatarum I G, I H: eadem ratione qualibet alia puncta sectionis G B inter G, & B sumpta cadent super B H; & ideo portio sectionis conica G B congruet portioni B H, & eidem aqualis erit. Simili modo constat,



portionem G C aqualem esse portioni H A, & sic superficies ipsa. Quod verò portio H A non congruat alicui alteri segmento C K praeter G C, constat ex eo, quod si portiones K C, & A H sibi mutuò congruunt, vt nimirum punctum C super H, & punctum K super A cadat: & concipiatur punctũ C idem ac N, & K idem ac O, & portio O N L aqualis summo eadem sectio K C B, & illius axis L M omnino idem ac axis B D: tunc quidem (ex precedenti prop. 6.) sectiones ipsa A B, & K B, seu O L aquales erunt, & sibi mutuò congruentes: & propterea H B cadet super portionem maiorem C B sea ei aqualem N B L (cum H B aqualis ostensa sit ipsi G B) & ideo vertices B, & L duarum axium B D, & L M in duabus sectionibus A B, & K B seu O N L inaqualibus non conuenient: quapropter in duabus congruentibus, seu in eadem sectione duo axes B D, & L M existent, quod est absurdum, quia est contra propos: 48. libri 2.

Notæ in Proposit. IX.

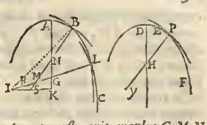
MAnifestum est ex demonstratis, quod portiones sectionum æqualium non congruunt, &c. *Sicuti in propos. 7. dictum est, quod duæ portiones non aqualiter à vertice axis distantes sibi mutuò congruere nõ possunt, ita hic in duabus quibuslibet aqualibus coniſectionibus idem verificari ostenditur, quod nimirum duæ portiones cuiuslibet sectionis conica, vel duarum aqualium sectionum inaqualiter à vertice axis distantes non sint congruentes. Hoc autem alia ratione demonstrare superuacaneum non erit, cum demonstratio, quæ in texta Arabico corrupto affertur non omnino sufficiens videatur, sed prius ostendendum est.* a

LEMMA I.

IN duabus æqualibus coniſectionibus A B C, & D E F, quarum axes A G, D H describere duos circulos æquales contingentes conicas sectiones, quorum is, qui propinquior est vertici extrinsecus, reliquus verò intrinsecùs sectionem tangat.

In

In sectione A B C ducatur ramus breuisecans singularis I L secans axem in G, sitque I punctum concursus perpendicularis I K, & breuisecantis ; & à quolibet puncto B inter L, & verticem A ducatur alius ramus breuisecans B M, qui occurret L I vltra axim in M, & inter puncta G, & I; coniungaturque recta linea B I. Quoniam angulus L G A acutus est, erit angulus G M N internus, & oppositus in triangulo G M N minor illo, & ideo acutus, & propterea qui deinceps est angulus B M I erit obtusus, & ideo in triangulo I B M latus I B subtendens maximum angulum obtusum maius erit latera B M; sed ramus I L maior est, quàm I B, propterea quod remotior est à vertice A, igitur ramus I L maior erit, quàm B M: Secari ergo poterunt aquales rectæ lineæ L R, B S, quæ sint minores quidè, quàm I L, sed maiores, quàm M B; & describantur duo circuli, quorum radij sint S B, & R L æquales, atque centra sint S, & R; Manifestum est circulum, cuius radius B S contingere coniectionem A C in punctо B, & extrinsecùs incedere, propterea quod radius B S maior est maximo breuisecantium M B à concursu M eductо ; è contra circulus radio R L descriptus intrinsecùs continget eandem coniectionem in L cum ramus M L minor sit singulari breuisecante L I. Tandè in sectione D E F secetur axis abscissa D H aqualis A N, & in angulo D H P æquali angulo A N B ducatur radius T H P, qui fiat æqualis S B, & cètro T radio verò T P circulus describatur. Et quia in sectionibus æqualibus abscissæ, breuisecantes, anguli ab eis contenti, & circuli descripti sunt æquales, & congruentes ; igitur circulus radio T P descriptus, contingit coniectionem D E F extrinsecùs ; sicuti circulus radij S B tangebat sectionem A B C in B extrinsecùs. Vt erat propositum.



51. 52. 53. lib. 5.

28. lib. 5. 8. Addit. lib. 5.

13. 14. 15. lib. 5.

67. lib. 5.

Ex 12. Addit. lib. 5.

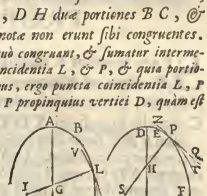
8. Addit. lib. 5.

Ibidem.

PROP. 1. Addit.

Hoc demonstrato ostendetur, quod in duabus coniectionibus A B C, D E F æqualibus, quarum axes A G, D H duæ portiones B C, & E F non æquè ab axium verticibus remotæ non erunt sibi congruentes.

Si enim possibile est B C, & E F sibi mutuò congruant, & sumatur intermedium punctum commune, vel duo puncta coincidentia L, & P, & quia portiones B C, E F inæqualiter distant à verticibus, ergo puncta coincidentia L, P non erunt æquè à verticibus remota; sit ergo P propinquius vertici D, quàm est L vertici A, & per L, & P ducantur rectæ lineæ L O, P Q tangentes sectiones, & exlematæ præcedenti describantur duo circuli æquales Z P T, & V L X radijs I L, & S P, quorum Z T extrinsecus tangat sectionè in P, & V X intrinsecus in L, cumque eorum radij I L, S P sint breuisecantes, erunt perpendiculares ad L O, P Q contingentes sectionem in L, & P; atque portiones B C, E F sibi mutuò congruunt, ideòst constituunt vnicam communem peripheriam, ergo rectæ lineæ L O, P Q contingentes eandem sectionem sibi mutuò congruent, pariterque breuisecantes aquales L I, P M ad illas perpendiculariter insistentes erunt congruentes quoque; & propterea circuli V X, Z T ab ijs radijs geniti erunt quoque congruentes,



33. 34. lib. 1.

29. 30. lib. 5.

35. 36. lib. 1.

entes; ideoque si vnus eorum, nempe Z T extrinsecùs tangit communem portionem conicam B C, reliquus V X extrinsecùs quoque eam tanget, sed ex constructione intrinsecùs sectionem tangebat, quod est absurdum: Non ergo duæ portiones B C, & E F non æquè à verticibus axium remotæ sibi mutuò congruent. Quod erat ostendendum.

Si autem cadit in ellipsi axis A C transuersus super axim rectum illius b
vtique excedit illam, & non sibi mutuò congruunt sectiones, & quædam congruunt, &c. *Sensus est. Si intelligantur duæ ellipses, habentes axes transuersos A E, & G H æquales inter se, pariterque axes rectos C D, I K æquales: & axis A B transuersus vnius ponatur super I K axim rectum alterius, ita vt centra sibi mutuò congruant in E: tunc quidem, quia axes in ellipsi inæquales sunt (alias esset circulus) igitur extremitates axis transuersi A B non cadunt super extremitates axis recti K I, neque G, H cadunt super C, D; & ideo circumferentiæ ellipsium se se mutuò secant quatuor in locis, vt in libro 4. ostensum est.*

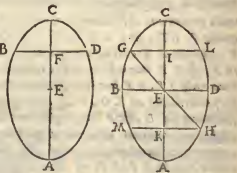
SECTIO TERTIA

Continens Propositi. V. & VIII.

PROPOSITIO V.

SI per centrum E ellipsis A B, C D transeat linea recta A C vsque ad sectionem; vtique bifariam diuidit superficiem sectionis, & circumferentiam illius, scilicet erit superficies A B C æqualis superficiei A D C.

Nam si A C fuerit axis sectionis, vtique circumferentia A B C congruet A D C, nam si non cõgruit signemus locum B, quod alteri sectioni nõ coincidat, & producamus ex illo perpendicularem B F super A C vsque ad D. Ergo B D ordinata est ad C A, & propterea B F superposita cõgruet ipsi D F, & cadet B super D, quia B F æqualis est D F (8. ex 1.); sed non cadebat super illum; quod est absurdum. Igitur circumse-



rentia

rentia A B C æqualis est circumferentiæ A D C, & superficies illius æqualis superficiei.

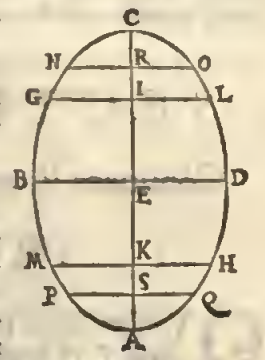
Iam linea G H transiens per centrum ellipsis non sit axis. Ducamus ex G, H super axim C A duas perpendiculares G I, H K, quæ pertingant ad L, M. Et quia si ponatur A D C super A B C, congruit G I super L I (7. ex 6.) & cadet G super L, quia G I æqualis est I L, & cadit circumferentia C G super circumferentiam C L; ergo superficies C I G æqualis est superficiei C I L: & quia B C D congruit B A D, & superficies superficiei, cadet C I super A K, & L I super K H, & circumferentia C L super circumferentiam A H (quia E I æqualis est E K) & superficies C I L congruit superficiei A K H; & propterea superficies A K H æqualis est G I C, & triangulum E G I æquale est triangulo E K H; igitur superficies A E H æqualis est superficiei G E C, & circumferentia A H æqualis est circumferentiæ G C, eritque circumferentia C D H, & superficies eius æqualis A B G, & superficiei illius. Quare G H transiens per centrum sectionis A B C D bifariam eam diuidit. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO VIII.

SImiliter constat, quod si ex quolibet quadrante ellipsis secentur circumferentiæ, per quarum extremitates rectæ lineæ coniunctæ sint ad eundem axim ordinatim applicatæ, & æquè à centro remotæ; vtique sunt congruentes, & æquales, nec alicui portioni eiusdem sectionis vna illarum æqualis est.

a Nam demonstrauimus, quod duæ superficies G I C, L I C sibi congruunt, nec non congruunt, duabus superficiebus H A K, M A K (5. ex 6.); & si eduxerimus duas ordinationes N O, P Q, quarum distantiæ à centro sint æquales, simili modo ostendetur, quod superficies N R C, O R C, A S Q, A S P sint congruentes (5. ex 6.) & quod circumferentiæ N C, C O, A Q, A P sint congruentes, remanebunt quatuor segmenta G N, L O, H Q, M P congruentia, & superficies quoque eorum congruentes. Et insuper dico, quod quodlibet horum segmentorum non congruit alicui alio segmento; nam sequeretur, quod in eadem ellipsi sint tres axes, vti dictum est. Quare patet propositum.

b



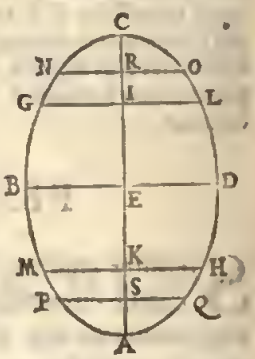
48. lib. 2.

Notæ in Propoſit. V.

ATque B C D congruit B A D, & ſuperficies ſuperficiei, &c. *Quoniam in ſecunda figura B D eſt axis ellipſis per centrum E ductus; ergò vt in prima parte huius propoſitionis dictum eſt, ſibi mutuò congruent ſemiellipſes B C D, & B A D.* a

Notæ in Propoſit. VIII.

NAm demonſtrauimus, &c. *Expoſitio huius propoſitionis hæc erit. Sit ellipſis A B C D, cuius axes C A, & B D, & in quolibet eius quadrante ſignentur tales circumferentiæ N G, O L, H Q, M P, vt coniunctæ rectæ lineæ O N, G L, H M, Q P ſint ad axim A C ordinatim applicatæ ſecantes eum in R, I, K, S; ſintque binarum extremarum N O, P Q à centro E diſtantiæ æquales E R, E S, & binarum intermediarum L G, H M æquales à centro diſtantiæ E I, E K oſtendendum eſt ſegmenta G N, L O, H Q, M P æqualia eſſe.* a



Et inſuper dico, quod quodlibet horum ſegmentorum non congruet alicui alio ſegmento, &c. *Si enim in eodem, vel in duabus ellipſis quadrantibus ſumantur ſegmenta G N, & M P non æque ab axis vertice B vel à verticibus A, C eiuſdem axis remota, non erunt congruentia, vt deducitur ex propoſ. 1. additarum huius.* b

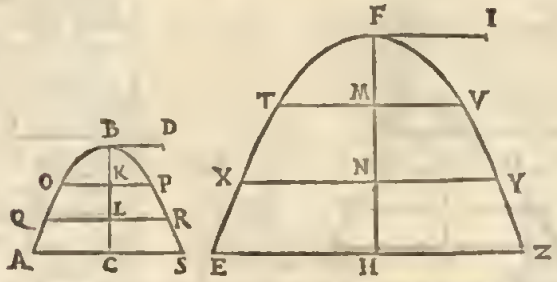
SECTIO QVARTA

Continens Propoſit. XI. XII. XIII. & XIV.

PROPOSITIO XI.

QVælibet ſectio parabolica, vt A B, cuius axis B C, & erectum B D ſimilis eſt cuilibet ſectioni parabolicæ, vt E F, cuius axis F H, & erectum F I.

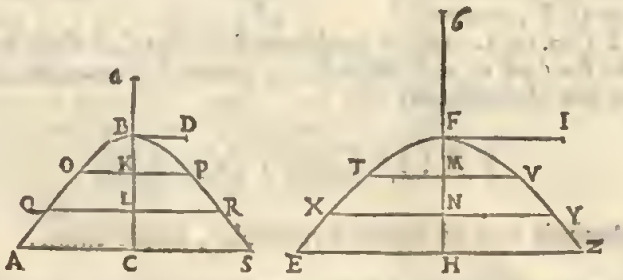
Pona-



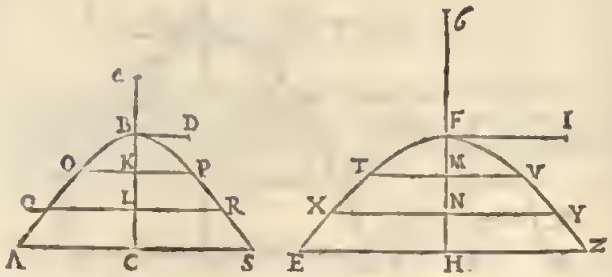
Ponamus itaque C B ad B D, vt H F ad F I, & diuidantur tam B C, quàm F H in punctis K, L, M, N in eisdem rationibus, & educamus super eas ordinationes O P, Q R, A S, T V, X Y, E Z. Quia B C ad B D est vt H F ad F I, & A C est media proportionalis inter C B, B D (12. ex 1.) pariterque E H inter H F, F I (12. ex 1.) igitur A C ad C B est, vt E H ad H F, & A S dupla ipsius A C ad C B est, vt E Z ad
a H F; eumque B C ad B L posita sit, vt H F ad F N, erit B D ad B L, vt I F ad F N; igitur Q R ad L B est vt X Y ad N F; atque sic ostendetur, quod O P ad K B est, vt T V ad M F, quare proportio ordinationum axis vnius sectionum ad sua abscissa est, vt proportio ordinationum alterius ad sua abscissa, & proportiones abscissarum vnius sectionis ad abscissa alterius sectionis eædem sunt. Quare sectio A B similis est sectioni E F. Quod erat ostendendum. Ex 11. lib. 1. Defin. 2. huius.

PROPOSITIO XII.

SI duarum hyperbolarum, aut ellipsium duæ axium figuræ fuerint similes, vtique sectiones similes erunt: Si verò fuerint sectiones similes, figuræ etiam similes erunt.



Sint sectiones A B, E F, earum axes inclinati, vel transuersi B *a*, F *b*,
a & erecti earum B D, F I, & maneant signa, ordinationes, & proportio-
b nes eædem, quæ in præcedenti propositione. Quoniam figura sectionis



A B similis est figuræ sectionis E F, erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B; & *b* H in H F ad quadratum H F, vt *a* C in C B ad quadratum C B (nam posuimus H F ad F *b*, vt C B ad B *a*) ergo ex æqualitate, quadratũ E H ad quadratũ H F est, vt quadratum A C ad quadratum C B: & propterea E Z ad H F est vt A S ad C B; Atque sic ostendetur, quod X Y ad N F sit vt Q R ad L B, & T V ad M F sit vt O P ad K B; ergo proportiones ordinationum axis vnius earum ad sua abscissa sunt eædem rationibus aliarum ordinationum axis ad sua abscissa, & alternatiuè. Quare duæ sectiones sunt similes.

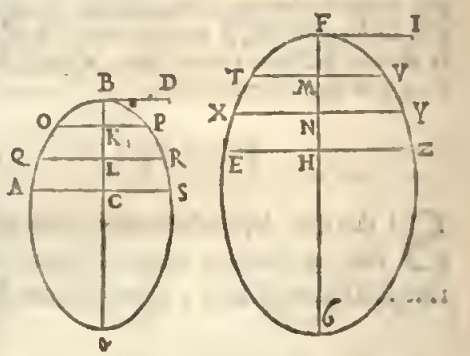
Defin. 2. huius.

E contra ostendetur, quod si duæ sectiones fuerint similes, earũ figuræ similes quoque erunt. Quia est A C ad C B, vt E H ad H F, & eandem proportionem habent earum quadrata, atque quadratum H F ad H F in H *b* est, vt quadratum C B ad C B in C *a* (eo quod H F ad F *b* posita fuit, vt C B ad B *a*); ergo ex æqualitate quadratum E H ad *b* H in H F, nempe I F ad F *b* (20. ex 1.) est, vt quadratum A C ad *a* C in C B, nempe vt D B ad B *a* (20. ex 1.); quare figuræ duarum sectionum sunt similes. Et hoc erat ostendendum.

Ex def. 2. huius.

21. lib. 1.

Ibidem.



C

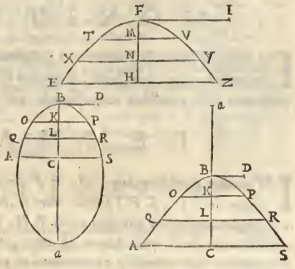
PROPOSITIO XIII.

PArabola non est similis hyperbolæ, neque ellipsi.

Hyperbolæ, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus B *a*, & E F sit sectio parabolæ, cuius axis F H. Dico, quod sectio E F non est similis sectioni A B hyperbolicæ, aut ellipticæ, alioquin sit similis ali-

a

b lis alicui earum (si possibile est) ergo possumus educere in singulis sectionibus potentes, quæ habeant ad sua abscissa axium easdē proportiones, & abscissæ inter se sint proportionales; sintque illæ V M, Y N, P K, R L. Quia Y N ad N F posita fuit, vt R L ad L B, & N F ad F M, vt L B ad B K, & F M ad M V, vt B K ad K P; ergo Y N ad M V in potentia, nempe N F ad M F (cum sectio sit parabola 19. ex 1.) nempe L B ad B K ex contructione erit, vt R L ad K P potentia, quæ eandem proportionem habent, quàm ▵ L in L B ad ▵ K in K B; quia sectio est hyperbolæ, aut ellipsis (20. ex 1.) quare ▵ L in L B ad ▵ K in K B est, vt L B ad B K; quare ▵ L est æqualis ▵ K: quod est absurdum. Igitur parabole non est similis vlli reliquarum sectionum. Et hoc erat probandum.

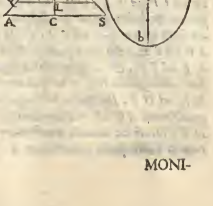


20. lib. 1.
21. lib. 1.

PROPOSITIO XIV.

ET sic ostendetur, quod hyperbolæ non est similis ellipsi.

a Alioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, nempe ▵ L in L B ad ▵ K in K B in hyperbola est, vt quadratum Y N ad quadratum M V, seu vt *b* N in N F ad *b* M in M F in ellipsi. His positis: quia L B ad B K posita fuit, vt N F ad M F; ergo ▵ L ad ▵ K eandem proportionem habet, quàm *b* N ad *b* M: & hoc est absurdum. Quare sectio A B non est similis E F; vt fuerat propositum.



21. lib. 1.

MONI-

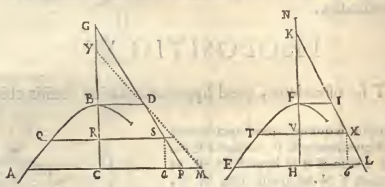
MONITVM.

IN principio huius libri monuimus, definitionem similium conicarum sectionum, quæ circumfertur, vitiosam esse; quod hic ostendendum suscepimus; sed prius hæc demonstranda sunt.

LEMMA II.

IN duabus coniectionibus A B, E F eiusdem nominis sint axium figuræ G B D, K F I similes inter se, ideſt transuersa latera G B, K F proportionalia sint lateribus rectis B D, F I: duci debent in singulis sectionibus series applicatarum ad axes, ita vt axium abscissæ (quæ proportionales sunt inter se) ad conterminas potentiales non sint in iisdem rationibus.

Sumantur duæ abscissæ B C, F H, quarum C B ad B D habeat maiorem proportionem, quàm habet H F ad F I, & C B, H F secentur proportionaliter in R, V, & per ea puncta ducantur ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportio-



21. lib. 5. *nem habet, quàm latus rectum D B ad transuersum G B, pariterq; quadratum E H ad rectangulum K H F eſt vt I P ad F K; atq; D B ad B G ex hypotheſi, eſt vt I F ad F K; ergo quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet quàm quadratum E H ad rectangulum K H F: & quia G B ad B D eſt vt K F ad F I, & D B ad B C minorem proportionẽ habet quàm I F ad F H, ergo ex æquali G B ad B C, minorem proportionem habet quàm K F ad F H, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi G C ad C B seu rectangulum G C B ad quadratum B C minorem proportionẽ habebit quàm K H ad H F, seu quàm rectangulum K H F ad quadratum F H; erat autem quadratum A C ad rectangulum G C B vt quadratum E H ad rectangulum K H F; igitur ex æquali, quadratum A C, ad quadratum C B minorem proportionem habet quàm quadratum E H ad quadratum H F, & ideo A C ad C B*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm E H ad H F. Poſtea quia C B ad B R erat vt H F ad F V, & prius G B ad B C minorẽ proportionem habebat, quàm K F ad F H, ergo ex æquali G B ad B R minorem proportionem habet, quàm K F ad F V, & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi G R ad R B, ſeu rectangulum G R B ad quadratum B R minorem proportionem habet, quàm K V ad V F, ſeu rectangulum K V F ad quadratum V F; ſed propter ſimilitudinem figurarum, vt prius quadratum Q R ad rectangulum G R B eſt vt quadratũ T V ad rectangulum K V F; ergo ex æquali quadratum Q R ad quadratum R B minorem proportionem habet, quàm quadratum T V ad quadratum V F, & Q R ad R B minorem proportionem habebit, quàm T V ad V F. Et ſic reliquæ omnes abſciſſæ: quapropter patet propoſitum.

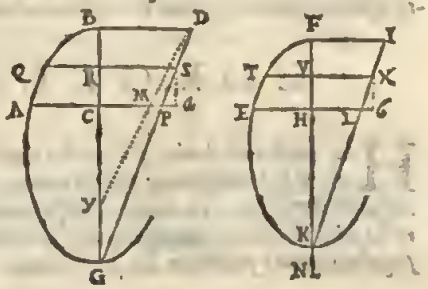
COROLLARIVM.

Hinc conſtat in duabus ſimilibus coniſectionibus duci poſſe duas ſeries applicatarum ad axes, itaut abſciſſæ axium, quæ inter ſe proportionales ſunt, ad ſuas potentiales non ſint in eiſdem rationibus. Quandoquidẽ ex prima parte propoſitionis 12. quotieſcunque axium figuræ ſimiles ſunt etiam ſectiones ipſæ ſunt ſimiles.

LEMMA III.

IN eiſdem figuris habeat G B ad B D maiorem proportionem, quàm K F ad F I duci debent duæ ordinatim ad axes applicatæ, quæ ad conterminas abſciſſas eandem proportionem habeant.

Ducatur qualibet ordinata E H, producanturq; vt ſecet coniunctam K I in L, & vt D B ad B G ita fiat L H ad H N, atq; fiat G C ad B C, vt N H ad H F, ducaturque ordinata A C; quæ producta ſecet coniunctam G D in P. Dico A C, & E H eſſe quæſitas. Quoniam quadratum A C ad rectangulum G C B eandem proportionem habet, quàm D B ad B G, ſeu L H ad H N, & rectangulum G C B ad quadratum B C eſt vt G C ad C B, ſeu vt N H ad H F, ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eſt vt L H ad H F, ſeu vt rectangulum L H F ad quadratum H F; vel potius vt quadratum E H ad quadratum H F; ideoque A C ad C B erit vt E H ad H F. Quod erat propoſitum. 21. lib. 1.

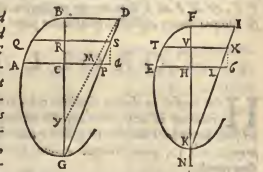


12. 13. lib. 1.

LEMMA IV.

LEMMA IV.

SI G B ad B D maiorem proportionem habuerit, quàm K F ad F I: Dico in singulis sectionibus reperiri non posse binas axium abscissas inter se proportionales, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus.



Si enim fieri potest, sit A C ad C B, vt E H ad H F, & Q R ad R B sit, vt T V ad V F, atque C B ad B R sit vt H F ad F V; coniungantur rectæ G D, K I quæ secêt ordinatas in S, P, X, L & secentur C a æqualis R S, & H b æqualis V X, suntq; æquidistantes; ergo coniungentes S a, R C æquales sunt, & parallelæ, & sic etiam coniungentes X b, & V H, quare quadratum A C, seu rectangulum P C B ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H, seu rectangulum L H F ad quadratum H F; ideoque P C ad C B eandem proportionem habet, quàm L H ad H F; est verò C B ad B R, vt H F ad F V, & per conuersionem rationis C B ad C R est vt H F ad H V, ergo ex æquali C P ad C R est vt L H ad H V: Eodem modo ostendetur, quod S R, seu a C ad R C est, vt X V, seu b H ad V H; erat autem P C ad C R vt L H ad H V; ergo a P differentia ipsarum S R, P C ad G R, seu ad S a est vt b L differentia ipsarum X V, L H ad H V, seu ad X b; estque D B ad B G vt P a ad S a (propter parallelas a S, C G, & parallelas a P, & B D) pariterque I F ad F K est vt L b ad b X, ergo D B ad B G eandem proportionem habet, quàm I F ad F K; quod est contra hypothesim, non ergo binæ axium abscissæ inter se proportionales reperiri possunt in sectionibus A B, & E F, quæ ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus; quod erat ostendendum.

12. 13. lib. 1.

COROLLARIVM.

HInc constat in duabus sectionibus eiusdem nominis si axium figuræ G B D, & K F I non fuerint similes, neque sectiones A B, & E F, similes esse. Nam est impossibile, vt omnes, ideſt infinitæ axium abscissæ inter se proportionales ad conterminas potentiales sint in eisdem rationibus, cum neque binæ singulis reperiri possint ex hac propositione.

LEMMA V.

LEMMA V.

IN eisdem figuris rursus G B ad B D maiorem proportionem habeat, quàm K F ad F I: Dico quod minimè reperiri possunt axium abscissæ erectis proportionales, quæ habeant eandem rationem ad conterminas potentiales.

Secentur qualibet abscissæ, B C, F H ita vt C B ad B D sit vt H F ad F I, & ducantur ordinatim ad axes applicatæ A C, E H, quæ productæ secent, coniunctas G D, K I in P, L, atque fiat T B ad B D vt K F ad F I, iungaturque T D secans A P in M. Manifestum est rectam C M inæqualem esse C P, (propterea quod T B minor est, quàm G B, cum ad eandem B D minorem proportionem habeat, quàm G B, ideoque punctum T, & recta T D cadent intra triangulum G B D, & punctum M intra ipsum cadet, aut extra G D productam). Quoniam D B ad B T est vt I F ad F K, & erat C B ad B D vt H F ad F I; ergo ex æquali C B ad B T erit vt H F ad F K, & comparando terminorum summas in hyperbola, & differentias in ellipsi ad antecedentes, T C ad C B erit vt K H ad H F; est verò M C ad C T vt L H ad H K (quod triangula M C T, & L H K similia sunt triangulis similibus B D T, I F K,) ergo ex æquali M C ad C B erit vt L H ad H F, & rectangulum M C B ad quadratum C B eandem proportionem habebit, quàm rectangulum L H F ad quadratum H F; sed rectangulum M C B æquale nō est rectangulo P C B (cum M C ostensa sit inæqualis P C); ergo rectangulum P C B, seu quadratum A C ad quadratum C B non eandem proportionem habet, quàm rectangulum L H F, seu quadratum E H ad quadratum H F; & propterea A C ad C B non eandem proportionem habebit quàm E H ad H F. Idem ostendetur in reliquis omnibus abscissis similiter positis. Quare patet propositum. 12. 13 lib. 1.

COROLLARIVM I.

MAnifestum est in coniectionibus non similibus duci posse duas series applicatarum ad axes, itaut abscissæ similes, seu proportionales inter se ad cōterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus.

COROLLARIVM II.

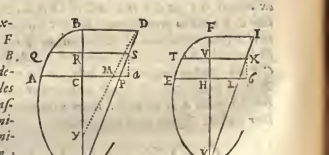
COlligitur pariter conuertendo, quod in duabus sectionibus eiusdem nominis si duæ series abscissarum similium in axibus positæ fuerint, & in vna serie abscissæ ad conterminas potentiales maiorem proportionem habeant, quàm in altera serie, fieri potest vt figuræ axium non sint inter se similes: Quod verificatur saltem in casu præcedentis propositionis.

His præmissis, quoniam passio in definitione posita essentialiter conuenit definito est impossibile, vt eidem subiecto definito competant duæ passiones diuersæ, & inter se oppositæ, excmpli gratia, fieri non potest, vt in triangulis similibus ali-

quando anguli vnius inæquales sint angulis alterius, aut aliquando latera circa angulos æquales non sint proportionalia; ita in definitione Mydorgiana, quia coniectiones dicuntur similes in quibus omnes axium abscisæ, quæ proportionales sunt inter se in ijsdem sunt rationibus ad conterminas potentiales, igitur eidem subiecto definito, ideſt in duabus sectionibus conicis similibus, est impossibile, vt reperiatur series aliqua infinitarum similium abscissarum in axibus, quæ ad conterminas potentiales non sint in ijsdem rationibus, & siquidem duæ passiones oppositæ eidem subiecto definito conueniant nulla earum erit eius passio essentialis, & ideo definitio bona non erit: vt exempli gratia quia in duobus similibus circulorum segmentis duo triangula inscripta possunt esse æquiangula, & etiam non æquiangula; ergo similitudo inscriptorum triangulorum non est passio essentialis segmentorum circularium similium inter se, & ideo non erit hæc bona definitio.

Similia circulorũ segmenta sunt in quibus describi possunt duo triangula similia, *& ratio est, quia per definitionem nedum natura rei declaratur, & indicatur, sed etiam distinguitur, & diuersificatur à qualibet alia; & quoniam in*

Coroll. Lem 2. huius. *sectionibus similibus reperiuntur duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales non sunt in ijsdem rationibus; & è contra ex definitione Mydorgij duæ series similium abscissarum, quæ ad conterminas potentiales sunt in ijsdem rationibus, essentialiter conueniunt definito; igitur hæ duæ oppositæ passiones conueniunt eidem subiecto definito, scilicet sectionibus similibus iuxta Mydorgij sententiam: quapropter tradita definitio sectionum similium vitiosa erit, & manca.*



Vt autem hoc clarius pateat exponantur duæ sectiones A B, E F eiusdem nominis, quarum axes B C, F H, & propositum primò sit demonstrare sectiones illas esse similes inter se; ergo ostendendum est passionem definitionis traditæ conuenire sectionibus A B, E F; quod nimirum similes axium abscisæ in ijsdem rationibus debent esse ad cõterminas potentiales, & quia in definitione nulla cautio, vel determinatio adhibetur, igitur sumi possunt quælibet axium abscissæ B C, F H, & hæ secari proportionaliter in R, V, & à punctis diuisionum duci posunt ad axes ordinatim applicatæ A C, E H, Q R, T V; & supponamus demonstratum esse, quod B C ad C A sit vt F H ad H E, pariterque vt B R ad R Q sit vt F V ad V T, tunc quidem ex vi definitionis deducitur, quod similes sint sectiones A B, & E F. At quia demonstrari potest

ex Lem. 2. huius. *in ijsdem sectionibus (sumendo abscissas B C, F H ad libitum, & proportionaliter diuidendo eas in R, & V) quod B C ad C A habet maiorem proportionem, quàm F H ad H E; pariterque B R ad R Q maiorem proportionẽ habeat, quàm*

Coroll. 2. Lem. 5. huius. *F V ad V T, & sic semper; ergo non poterit deduci similitudo potius quàm non similitudo; ideoque definitio similium sectionum erit vitiosa, quandoquidem ex ea duæ contradictoriæ deducuntur.*

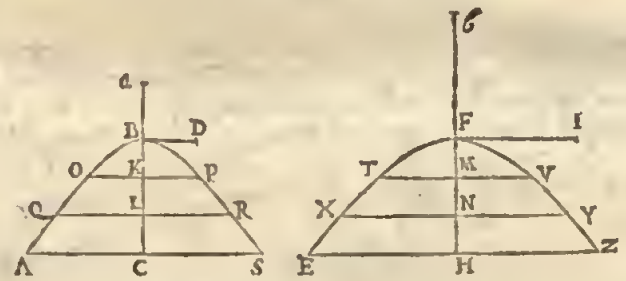
Secundo loco supponantur duæ sectiones A B, & E F similes inter se, & propositum, sit demonstrare quod axium figuræ, seu rectangula G B D, & K F I

sint

ſint ſimilia, qua quidem, eſt propoſitio 3. libri 4. Mydorgij, eiuſque præparatio, ſeu conſtructio talis eſt (, & appono eius verba immutatis tantummodo literis figurarũ) ſint à ſectione A B ordinatim ad axim B C applicatæ binæ quæquæ A C, Q R, & vt C B ad B R ita ſit, H F ad F V, ordinatimque à ſectione E F applicentur E H, T V *(ſubſequitur poſtea demonſtratio ſic.)* Quoniam igitur ſimiles ponuntur ſectiones A B, E F, & ſunt H F, F V portiones portionibus C B, B R ſimiles, *(ideſt proportionales)* vt B C ad C A, ita erit F H ad H E, & vt B R ad R Q, ita erit F V ad V T, &c.

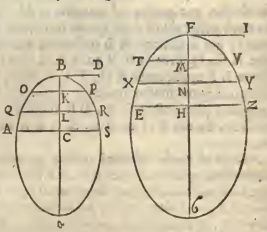
Huiuſmodi verba ſubtiliori trutina expendenda ſunt. In præparatione, ſeu conſtructione aſſumit abſciſſas B C, & F H abſque vlla lege, aut determinatione; ergo ſumi poſſunt eiuſcunq; longitudinis: quare fieri poteſt vt C B ad latus rectum B D non habeat eandem proportionem quàm habet F H ad F I, & tunc Lem. 2. huius. *licet C B, H F diuidantur proportionaliter, & ducantur potentiales, &c. A C ad C B habebit matorem, aut minorem proportionem quàm E H ad H F, & pariter Q R ad R B non habebit eandem rationem, quàm T V ad V F, & ſic vlterius in tota ſerie; ſed ex hac ſequitur, quod poſſint eſſe figura axium inter ſe* Coroll. 2. Lem. 1. huius. *non ſimiles; Mydorgius autem ſimiles eſſe concludit; igitur ex eadem hypotheſi, & ex eadem definitione deducitur, quod ſectiones ſimiles habent figuras axium ſimiles inter ſe, & non ſimiles, quod eſt impoſſibile; non igitur definitio à Mydorgio tradita legitima, & perfecta eſt: quod fuerat oſtendendum.*

Quod vero definitio à me reformata tribui poſſit Apollonio conijcitur præcipuè ex demonſtratione ſecundæ partis propor. 12. ibi enim ex hac ſuppoſitione, quod

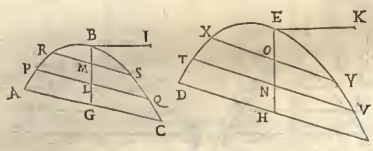


ſcilicet duæ ſectiones A B, & E F ſint ſimiles deducit earum figuras ſimiles eſſe. Ait enim: quia eſt A C ad C B vt E H ad H F, & eandem proportionẽ habent earum quadrata, atque quadratum H F ad rectangulum: F H *b* eandem proportionem habet quàm quadratum C B ad rectangulũ B C *a* *(eo quod H F ad F b poſita fuit vt C B ad B a)* ergo, &c. *Modo ſi accuratè hæc verba perpendantur non poterit hic vſurpari vulgata definitio Entocij, vel Mydorgij; nam eum ſectiones A B, E F ſupponantur ſimiles, ea tantummodo quæ in definitione ſimilium ſectionum perhibentur concedi poſſunt, & nihil amplius; igitur ſi in definitione non includitur particula illa [abſciſſæ H F, C B ad erecta, vel tranſuerſa latera F b, B a ſint proportionalia] delirantitpo-*

tis potius, quàm demonstrantis esset dicere. Eo quod H F, ad F *b* posita fuit vt C B ad B *a*; *vbi nam, aut quando hoc suppositum est, si in definitione non continetur? Nec suspicari potest casu hæc verba in textu irrepsisse, cum in alijs locis repetantur, & ab eis pendeat tota demonstratio; igitur in definitione vulgata addenda est illa particula*, absciſſæ ſint in eadem ratione ad erecta;



Rursus in propoſ. 11. & 1. parte 12. quando concluſio demonſtrationis eſt quod ſectiones A B, E F ſimiles ſint: tunc quidem quia tenetur oſtendere Apollonius definitionem traditam, conuenire ſectionibus A B, E F, non aſſumit incauè, abſciſſas homologas C B, H F, ſed ait in 11. propoſitione ponamus C B ad B D vt H F ad F I, *& in 12. inquit*, nam poſuimus H F ad F *b* vt C B ad B *a*, &c. *Poſtea in propoſitione 16. litera a*: ergo M A ad A P, *ideſt abſciſſa ad erectum* eſt vt O C ad C Q, *ſeu vt homologa abſciſſa ad latus rectum*, & angulus O æqualis eſt M: patet igitur, vt diximus in 11. ex 6. quod ſi, &c. *Ex quibus locis ſatis apertè colligitur (ni fallor) id quod ſupra rationibus non leuibus inſinuaui, quod abſciſſæ proportionales eſſe debent erectis in ſectionibus ſimilibus.*

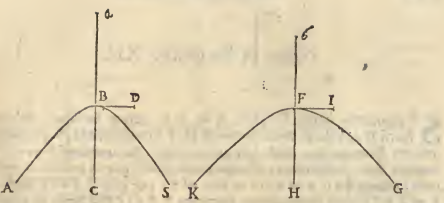


Sed hic animaduertendum eſt, eandem definitionem non poſſe aquè aptari ſectionibus conicis, atque ſegmentis conicis ſimilibus, vt perperam cenſuit Mydorgius: nam in ſegmentis conicis ſimilibus A B C, & D E F diametrorum aquè ad baſes inclinatarum abſciſſæ homologæ ex ſui natura determinatæ ſunt, quandoquidem non poſſunt eſſe maiores, neque minores quàm G B, & H E, quæ inter baſes A C, & D F ſegmentorum conicorum, & vertices B, E intercipiuntur;

Propoſ. 12. huius. lib. 1.

at ſi in conicis ſectionibus A B S, & K F G ſint axes tranſuerſi a B, & b F ad ſua latera recta B D, & F I in eadem proportione, tunc quidem ſimiles erunt curuæ lineæ A B S, & K F G, quæ poſſunt habere indeterminatas, & multiplices longitudines, immo poſſunt in infinitum prolongari, ſi fuerint parabolæ

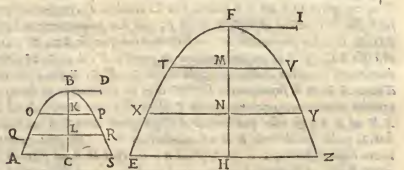
vel



vel hyperbolæ, nec habent baſes, à quibus circumſcribantur, igitur in ſectionibus ſimilibus A B, & G F homologæ axium abſciſſæ B C, F H non ſupponuntur iam diſſectæ, & determinatæ; quare poſſunt eſſe cuiuſcunque menſuræ, & habere poſſunt eandem, & non eandem proportionem ad conterminas potentiales; & ideo ad vitandam incertitudinem adiungi debet determinatio, quod prædictæ homologæ abſciſſæ B C, F H proportionales ſint lateribus rectis B D, F I, at in ſegmentis, ſeu portionibus ſectionum conicarum ſimilium inutilis omnino eſſet illa determinatio. An verò hac mea ſententia omninò reijci debeat alijs iudicandũ relinquo.

Notæ in Propoſit. XI.

a CVmque B C ad B L poſita ſit vt H F ad F N, &c. *Quia inuertendo D B ad B C eandem proportionem habet quàm I F ad F H, & C B ad B L eſt vt H F ad F N; ergo ex æquali ordinata D B ad B L eandem proportionem habebit, quàm I F ad F N; eſtque ordinatim applicata 2 L media pro-*



portionalis inter abſciſſam B L, & latus rectum B D (cum in parabola quadratum 2 L æquale ſit rectangulo L B D) pariterque X N media proportionalis eſt 11 lib. 1.
inter F N, & I F; ergo 2 L ad L B eſt vt X N ad N F, & antecedentium duplæ, ſcilicet 2 R ad L B, atque X Y ad N F in eadem ratione erunt. Non ſecus oſtendetur O P ad K B vt T V ad M F.

Notæ

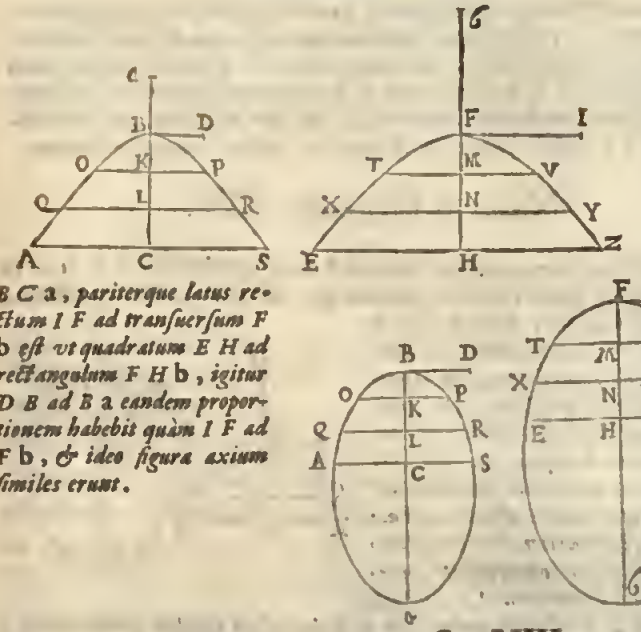
Notæ in Propoſit. XII.

SVpponamus itaque ſectiones A B, E F, earum inclinati, vel tranſuerſi B *a*, F *b*, & erecti eorum B D, F I ordinationes, & propoſitiones, vti diximus, &c. *Ideſt. Sint axes inclinati, ſiue tranſuerſi* B a, F b, *& maneant ſigna, ordinationes, & proportiones eadem, quæ in præcedenti propoſitione; ſcilicet fiat C B ad B D, vt H F ad F I, & quia D B ad B a eſt vt I F ad F b (propter ſimilitudinem figurarum D B a, I F b) ergo ex æquali C B ad B a erit vt H F ad F b; & comparando antecedentes ad ſummas terminorum in hyperbola, & ad differentias in ellipſi erit B C ad C a vt F H ad H b: poſtea diuidantur tam B C, quàm F H in iiſdem rationibus in punctis K, L, M, N, & educantur ordinatim applicatæ, ſeu æquidiſtantes baſibus O P, Q R, A S, T V, X T, E Z.* a

Quoniam figura ſectionis A B ſimilis eſt figuræ ſectionis E F erit quadratum H E ad H *b* in H F, vt quadratum A C ad C *a* in C B, & *b* H in H F ad quadratum H F, vt C *a* in C B ad quadratum C B (nam poſuimus H F ad F *b*; vt C B ad B *a*, &c.) *Quoniam in figuris, ſeu rectangulis ſimilibus D B a, & I F b habet D B ad B a eandem proportionem, quàm* 21. lib. 1. *I F ad F b, & vt D B ad B a, ita eſt quadratum A C ad rectangulum B C a, pariterque vt I F ad F b ita eſt quadratum E H ad rectangulũ F H b ſed (ſicut in præcedenti nota dictum eſt) C a ad C B, ſeu rectangulum B C a ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm H b ad H F, ſeu quàm rectangulum F H b ad quadratum F H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionem habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F.* b

Atque quadratum H F ad H F in H *b* eſt vt quadratum C B ad B C in C *a* (eo quod H F ad F *b* poſita fuit C B ad B *a*), ergo ex æqualitate, &c. *Ideſt ſumãtur axium abſciſſæ C B, H F, quæ ſint proportionales lateribus rectis B D, & F I, ſeu proportionales ſint lateribus tranſuerſis* B a, *&* F b, *& ſecẽtur abſciſſæ B C, & F H proportionaliter in punctis K, L, M, N, & per puncta diuiſionum ducantur ordinatim applicatæ A C, Q L, E H, X N, &c. Quia ſectiones A B, E F ſupponuntur ſimiles; ergo ex definitione 2. huius A C ad C B eandem proportionem habebit, quàm E H ad H F, nec non Q L ad L B erit vt X N ad N F; & ideo quadratum A C ad quadratum C B eandem proportionẽ habet, quàm quadratum E H ad quadratum H F; & quia ex conſtructione inxta leges definitionis 2. vt C B ad B a ita erat H F ad F b, & comparando antecedentes ad terminorũ ſummas in hyperbolis, & ad differentias in ellipſibus, habebit B C ad C a, ſeu quadratum B C ad rectangulum B C a eandẽ proportionem quàm F H habet ad H b, ſeu quàm quadratum F H habet ad rectangulum F H b; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum B C a eãdem proportionem habet, quam quadratum E H ad rectangulum F H b; eſt verò latus rectum D B ad latus tranſuerſum B a, vt quadratum A C ad rectangulum* c

B C a,



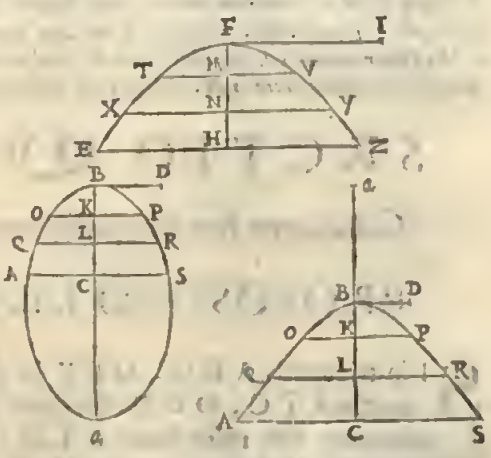
B C a, pariterque latus rectum I F ad transuersum F b est vt quadratum E H ad rectangulum F H b, igitur D B ad B a eandem proportionem habebit quàm I F ad F b, & ideo figura axium similes erunt.

21. lib. 1.

Notæ in Propositi. XIII.

a Sint axes earum B C, & inclinatus, seu transuersus B *a*, &c. *Addidi verba, qua in expositione propositionis deficiunt. Hyperbole, seu ellipsis A B sit axis B C, & inclinatus, seu transuersus B a, & E F sit parabole, cuius axis F H, &c.*

b Alioquin sit (si possibile est) similis vni earum, & minima similis earum figuræ, quæ non sunt similes suis figuris: deinde possumus producere in singulis sectionibus potentes, &c. *Non nulla verba ex hoc textu expunxi vt superuacanea eiusq; sensus hic est. Si enim parabola E F similis est hyperbola, aut ellipsi A B (ex definitione similium figurarum) duci possunt in vnaquaque duarum similium sectionum ordina-*



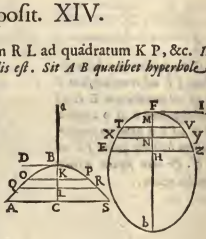
Defin. 2.

natim

natim ad axium applicatæ, numero pares, quæ ad abscissas sint proportionales; tum abscisse inter se: Vnde sequitur postrema conclusio, quæ in textu habetur, quod nimirum rectangulum a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habeat, quàm abscissa, L B ad abscissam K B: sed quotiescunque duo rectangula eandem proportionem habent, quàm bases, illa sunt æque alta: igitur altitudines* a *L, &* a *K æquales sunt inter se, pars, & totum: quod est absurdum.*

Notæ in Propositionem XIV.

A Lioquin sequitur, quod quadratum R L ad quadratum K P, &c. *In propositione deficit expositio, quæ talis est. Sit A B quælibet hyperbole, & E F quælibet ellipsis. Dico A B ipsi E F similem non esse. Sint eorum axes latera transversa, & recta eadem, quæ in præcedenti propositione posita sunt. Et siquidem sectiones A B, & E F similes credantur, necessario ex definitione secunda, duci poterunt ad axes ordinatim applicatæ numero pares proportionales abscissis, tum abscisse inter se proportionales: & vt in præcedenti propositione ostensum est, quadratum R L ad quadratum P K, scilicet* a



21. lib. 1. Ibidem. *rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm quadratum Y N ad quadratum V M, seu quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F in ellipsi, ergo rectangulum* a *L B ad rectangulum* a *K B eandem proportionem habet, quàm rectangulum* b *N F ad rectangulum* b *M F: sed eorundem rectangulorum bases proportionales sunt, eo quod L B ad B K erat vt N F ad F M; igitur eorundem altitudines proportionales erunt, scilicet* a *L ad* a *K eandem proportionem habebit, quàm* b *N ad* b *M, sed in hyperbola* a *L maior est, quàm* a *K; in ellipsi vero contra* b *N minor est, quàm* b *M; igitur maior* a *L ad minorem* a *K eandem proportionem habebit, quàm minor* b *N ad maiorem* b *M. Quod erat absurdum.*

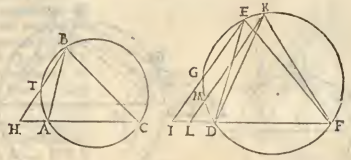
SECTIO QVINTA

Continens sex Propositiones Præmissas,

PROPOSITIO I. II. III. IV. & V.

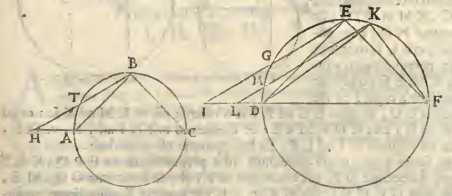
SI in triangulis A B C, D E F in duobus circulorum segmentis A T C, D G F descriptis, à duobus angulis B, E, educantur duæ rectæ lineæ B T H, E G I efficientes cum basibus A C, D F duos angulos H, I æquales (incidentes in 1

prima

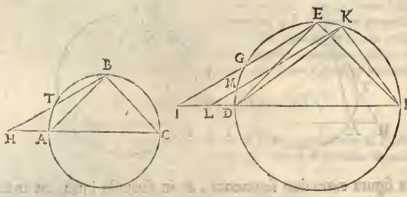


prima figura extra duo ſegmenta, & in ſecunda intra, at in tertia intra duos ſemicirculos), & fuerit proportio plani rectanguli ex portionibus lineæ baſis inter angulum prouenientem, &
2 duos angulos reliquos trianguli, nempe A H in H C ad quadratum interceptæ inter prouenientem angulum, & circuli peripheriam, nempe ad quadratum H B in quolibet caſu eadem ſit; quàm D I in I F ad quadratum I E, vel H A in H C ad quadratum H T ſit, vt D I in I F ad quadratum I G; ſintque duo priores anguli, inter ſe æquales, & prouenientes extra duo
3 triangula poſiti: vel duo priores recti, & prouenientes intra
4 duos angulos non ſint recti; aut duo priores non recti, & pro-
5 uenientes recti intra duo triangula: vel duo priores diuerſæ, aut eiuſdem ſpeciei, ſed duæ lineæ efficiant duos angulos æquales cum lateribus duorum triangulorum ſubtendentibus angulos prouenientes: vtique duo priora triangula ſunt ſimilia.

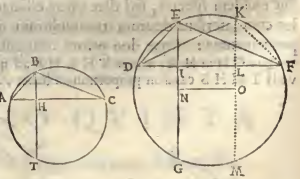
Quia C H in H A, nempe T H in H B ad quadratum H B, quod eſt, vt H T ad H B eandem proportionem habet, quàm D I in I F, nempe



G I in I B ad quadratum I E, quod eſt vt I G ad I E, erit B H ad H T, vt E I ad I G, ſimiliter, & eorum quadrata; oſtendetur igitur ex æqua-



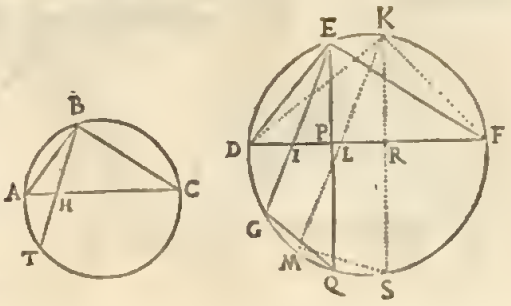
litate, quod si fuerit A H in H C ad quadratum H B, vt D I in I F ad quadratum I E, quod A H in H C ad quadratum H T sit etiam, vt I D in I F ad quadratum I G. Dico iam, quod triangulum A B C simile est triangulo D E F. Si enim hoc verum non est, non erit angulus A æqualis vni duorum angulorum D, vel F: sitque angulus D maior, quàm A, & fiat angulus K D F æqualis A, iungaturque F K; quia angulus K, veluti E, est æqualis angulo B; similia erunt triangula A B C, D K F, & educamus K L parallelam E I: quare K L F simile quoque erit B H C ideoque H A ad H B est vt D L ad L K, & H C ad H B, vt F L ad L K; igitur H A in H C, nempe B H in H T ad quadratum H B, quod est, vt H T ad H B, quæ ostensa est, vt I G ad I E, erit vt D L in L F, nempe K L in L M ad quadratum K L: & propterea M L ad L K erit vt G I ad I E in omnibus figuris; & hoc est absurdũ in prima figura: in secunda verò secentur bifariam E G, K M in N, O, & iungatur N O, quæ parallela erit L I, quia sunt duæ perpendiculares super K M, E G, quæ sunt parallelæ; ergo I N est æqualis L O, & quia E G ad E I iam ostensa est vt K M ad K L; ergo E N ad E I est, vt O K ad K L: & diuidendo erit N I ad I E, vt O L, quæ est æqualis N I ad L K. Et hoc quoque est absurdum.



In figura autem tertia educamus duas perpendiculares E P Q, K R S super diametrum D F, cui occurrant in P, R: & iungamus G Q, M S, quia erat G E ad E I, vt M K ad K L, & propter similitudinem triangulorum I E P, K L R, E I ad E P est, vt L K ad K R, atque E P ad E Q est, vt R K ad K S, & angulus G E Q æqualis est M K S; ergo E G

Q simile

Q simile est M K S, quare angulus G æqualis est angulo M, & propterea peripheriæ E F Q, & K F S, quibus insistunt, æquales erunt, quod est absurdū: est enim E F Q maior, quàm K F S; ergo duo triāgula A B C, D E F in omnibus figuris sunt simulia. Quod erat ostendendum.



PROPOSITIO
Præmissa VI.

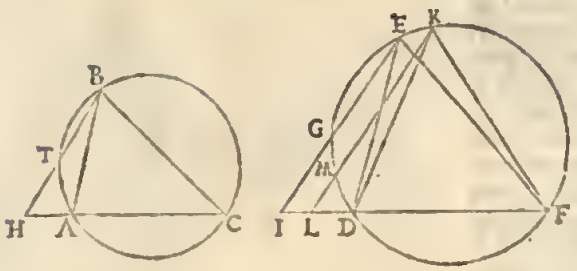
a DEinde sint duo anguli B, E qualescunque; sed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I, aut F E I: & supponantur reliqua omnia iam dicta.

Quia proportio C H in H A ad quadratum H B supposita est, vt F I in I D ad quadratum I E, & H C, vel H A ad H B est, vt F I, vel D I ad I E; erit etiam H A ad H B, vt I D ad I E, & duo anguli H, I sunt æquales; igitur triangulum H B A, aut H B C simile est triangulo E D I, aut E F I, quare duo triangula A B C, D E F similia sunt; Et hoc erat ostendendum.

Notæ in Propositt. Præmissas I. II. III. IV. & V.

AFferuntur in hac sectione aliqua propositiones simul coacervatæ, quæ lemmatica sunt, & vsum habent in sequentibus propositionibus; sanè conijcitur ex hoc titulo PRAEMISSAE *rubeis characteribus inscripto, huiusmodi lēmata Textui Apollonij ab Arabico Interprete, vel ab aliquo alio superaddita fuisse; licet Pappus Alexandrinus libro 7. afferat eadem ferè lemmata, tanquā propria, & conferentia ad Apollony sexti libri intelligentiam.*

Potest tamen propositio vniuersalis brevius exponi hac ratione. Si à verticibus duorum triangulorum à duobus circulis comprahensorum recta linea ductæ efficiant cum basibus angulos æquales; atque eorundem segmentorum inter basim, & peripheriam interceptorum quadrata ad rectangula sub factis segmentis ba-



sium eandem proportionem habeant, fuerintque anguli verticales inter se æquales, vel qui à lateribus, & à vertice ductis continentur, sint æquales: semper triangula erunt similia.

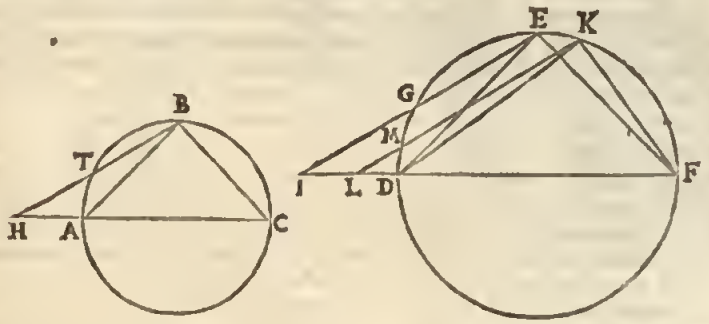
Dico iam, quod triangulum A B C simile est triangulo D E F, si enim hoc verum non est, sit angulus D maior, quàm angulus A, &c. *Textus alterari debuit, nam duo triangula B A C, & E D F ponuntur non similia, & propterea æquiangula non erunt, scilicet non habebunt duos angulos æquales duobus angulis alterius trianguli; sed ex hypothesi anguli verticales A B C, & D E F æquales erant; ergo angulus B A C non erit æqualis angulo E D F, neque angulo E F D; alias dicta triangula essent æquiangula, & similia, quod non ponitur; igitur necesse est, vel angulus A non sit æqualis vni duorum angulorum D, vel F, postea rectangulorum A H C, & D I F tam latus A H ipsius H C non sit maius, quàm D I ipsius I F, & ad punctũ D fiat angulus F D K æqualis angulo A.* a

Quare K L F simile quoq; erit B H C, &c. *Quoniã angulus F D K æqualis est facto angulo C A B, & angulus F K D seu ei æqualis F E D est ipsi angulo A B C æqualis (cum in similibus circulorum segmentis existant), igitur in triangulis F K D, & C B A tertius angulus K F D æqualis erit tertio angulo C; & propter parallelas K L, E I est angulus D L K æqualis angulo D I E; est verò angulus A H B ex hypothesi æqualis eidem angulo D I E; ergò angulus D L K æqualis est angulo A H B, & F L K æqualis angulo C H B: at ostensus fuit angulus K F L æqualis angulo B C H; ergo angulo C B H æqualis est angulus F K L; ideoque triangula C B H, & F K L similia erunt. Pariterq; duo triangula B A H, & K D L similia erunt, cum angulus L æqualis sit angulo H, & angulus K D L æqualis sit interno B A H.* b

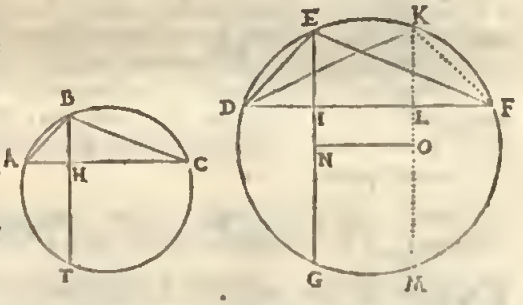
Et hoc est absurdum in prima figura, &c. *Quoniam sunt recta linea in circulo applicata K M, E G parallela inter se; ergo coniuncta recta linea E K, G M parallelæ erunt inter se, aut conuenient extra circulum cum diametro bisariam, & ad angulos rectos diuidente applicatas E G, K M; sed eadem recta linea G M secat triangulí basim F A I intra circulũ, aut extra ipsum inter puncta I, A, & F (propterea quod angulus E I F constituitur à duabus in circulo applicatis extra ipsum concurrentibus); ergo tres coniuncta recta linea K E, M G, & I L, nec sunt omnes inter se parallelæ, nec in vno puncto cõueniunt, & propterea E I, & K L,* c

secta

secta non erunt proportionaliter in punctis G, & M, sed prius ostensa fuit E I ad I G vt K L ad L M; quod est absurdum.



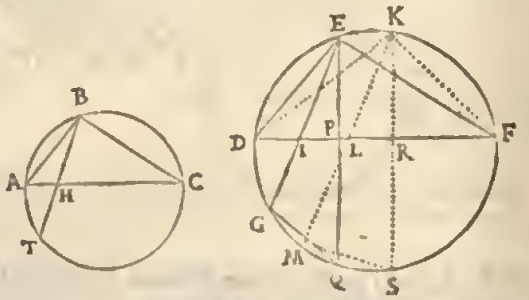
d In secunda verò secentur bifariam E G, K M in N O, &c. *Sunt enim in tertio casu K M, & E G perpendiculares ad basim D F; igitur si secentur bifariam in O, & N coniuncta recta linea N O diameter circuli erit, quandoquidem diuidit bifariam duas equidistantes in circulo applicatas; & ideo eas secat ad angulos rectos, sicuti D F easdem perpendiculariter secabat; & propterea I N O L parallelogrammum erit, cuius latera opposita N I, & O L aqualia erunt. Postea quia ostensa sunt I G ad I E, vt L M ad L K; ergo summa terminorum ad consequentes proportionales erunt; scilicet G E ad E I erit vt M K ad K L, & antecedentiũ semisses N E ad E I, vt O K ad K L; & diuidendo, dua aquales N I, O L eandem proportionem habebunt ad I E, & L K; ideoq; I E aqualis est L K. Et quoniã triangulum A B H simile est triangulo D K L; ergo A H ad H B eandem proportionem habet, quàm D L ad L K; estque triangulum B H C simile triangulo K L F; ergo B H ad H C est vt K L ad L F, & ex aqualitate vt A H ad H C ita est D L ad L F; erat autem segmentum A H non maius segmento H C; ergo D L maius non erit segmento L F; sed erat segmentum D I non maius segmento I F, igitur duo segmenta D I, & D L non sunt maiora, ideest non sunt maiora medietate totius D F, sed diameter parallela ipsis K M, & E G secat D F bifariam; ergo K M, E G ad easdem partes diametri cadunt versus D, & sunt inter se parallelæ; ergo inaqualiter à centro distant; ideoque inaquales erunt inter se, & earum meditates N E, O K inaquales erunt; & ablatis aqualibus N I,*



Lem. 1.

I, O L remanebunt I E, L K inæquales. Quod eſt abſurdum: eſtenſa enim fuerunt prius æquales inter ſe.

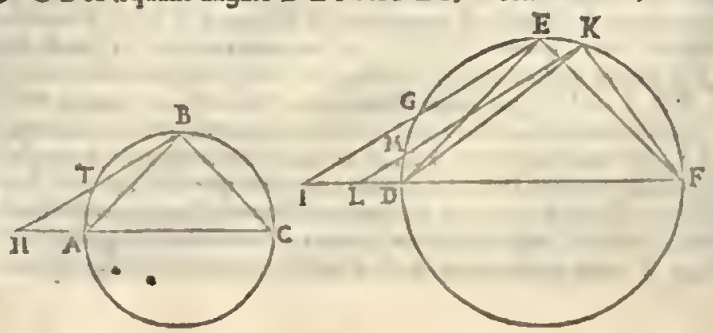
In figura autem tertia ducamus duas perpendiculares, &c. *In quarto caſu ſupponuntur baſes A C, & D F per centra circulorum tranſire, eo quod anguli A B C, & D E F recti ſupponuntur, atque rectæ lineæ B H, E I non ſunt perpendiculares ſuper eaſdem baſes, licet intra circulos efficiant angulos B H C, & E I F inter ſe æquales: perfecta igitur conſtructione, vt prius ad diametrũ D F, ducãtur ex punctis E, & K perpendiculares E Q, K S, quæ diuidẽtur bifariã, & ad angulos rectos in P, & R. Et quoniam (vt in præcedenti caſu oſtẽſum eſt) G E ad E I eandem proportionem habet, quàm M K ad K L, cumque latera I E, L K ſint parallela, pariterque P E, & K R æquidiſtent, atque baſes I P, L R in directum poſita ſint, erunt triangula I E P, & L K R æquiangula, & ſimilia: & propterea I E ad E P erit, vt L K ad K R: eſt verò P E ad eius duplam E Q, vt R K ad eius duplam K S (enim diameter ſecet eas bifariam, quas perpendiculariter prius ſecabat) ergo, ex æquali ordinata, erit G E ad E Q, vt M K ad K S; ſuntq; anguli verticales G E Q, & M K S æquales, propterea quod continẽtur à rectis lineis quæ bina binis ſunt æquidiſtantes; ergo triangula G E Q, & M K S ſimilia ſunt inter ſe: & propterea angulus E G Q æqualis erit angulo K M S.* c



Et propterea ſegmentum E F Q maius ſimile erit ſegmento K F S minori: quod eſt abſurdum, &c. *Legendum puto. Et propterea peripheria E F Q, & K F S, quibus inſiſtunt æquales erunt: quod eſt abſurdum. Eſt enim E F Q maior, quàm K F S.* f

Notæ in Propoſit. Præmiſſ. VI.

DEinde ſint duo anguli B, E qualeſcumque; ſed angulus A B H, vel C B H æqualis angulo D E I vel F E I, & conditiones, vti dixi- a



mus, &c. *Expoſitio, atque demonſtratio huius propoſitionis obſcura eſt propter nimiam eius brevitatem: itaque duo eius caſus diſtingui debent hac ratione. In duobus triangulis A B C, D E F ſupponantur anguli H, & I æquales, pariterque anguli H B A, I E D æquales inter ſe; ideoque duo triangula A B H, & D E I ſimilia erunt, & propterea A H ad H B eandem proportionem habebit, quàm D I ad I E; ſed ex vniverſali hypotheſi rectangulum C A H ad quadratum H B eandem proportionem habet, quàm rectangulum F I D ad quadratum I E, & componuntur proportiones rectangulorum ad quadrata iam dicta ex rationibus laterum circa angulos æquales H, & I, ſuntque oſtenſa proportiones A H ad H B, atque D I ad I E eadem inter ſe; igitur reliqua componentes proportiones, ſcilicet C H ad H B, atque F I ad I E eadem quoque erunt inter ſe, & comprahendant angulos æquales H, & I; igitur triangula C H B, & F I E ſimilia ſunt inter ſe: & propterea angulus B C A æqualis erit angulo E F D, ſed anguli B A C, & E D F æquales ſunt inter ſe, quia eorum conſequentes æquales erant in triangulis æquiangulis E A H, & E D I, igitur duo triangula B A C, & E D F æquiangula, & ſimilia inter ſe erunt.*

Simili modo ſi ſupponantur anguli C B H, & F E I æquales, cum anguli H, & I æquales ſint, erunt triangula B C H, & E F I ſimilia inter ſe, & vt prius, oſtendentur quoque triangula ablata B A H, E D I æquiangula, & ſimilia inter ſe (propterea quod circa angulos æquales H, & I habent latera proportionalia); & ideo reſidua triangula C A B, & F D E erunt quoque ſimilia, vt propoſitum fuerat.

SECTIO SEXTA

Continens Propoſit. XV. XVI. & XVII.

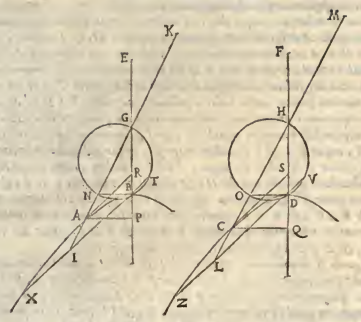
PROPOSITIO XV.

DVarum hyperbolarum, aut ellipſium, ſi figuræ diametrorum, quæ axes non ſint, fuerint ſimiles, atque potentes contineant cum diametris angulos æquales: vtique ſectiones ſunt ſimiles.

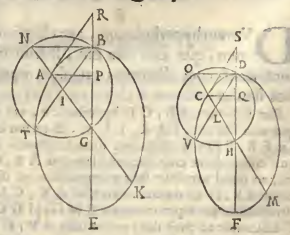
Sint ſectiones A B, C D hyperbolicæ, vel ellipticæ earum diametri, quæ non ſint axes I A K, L C M, & earum centra G, H, & duo axes ſint E B, F D: & educamus duas tangentes A R; C S ad duos axes, quæ continebunt cum duabus diametris A K, C M duos angulos æquales, eo quod parallelæ ſunt potentialibus ad diametros eductis; & educamus à B, D ad duabus diametros A K, C M tangentes B N, D O, & circumducamus ſuper triangula B N G, H D O duos circulos, & ex A, C educamus ad axes duas potentiales A P, C Q, & per B, D ducamus I B T, L D V parallelas ipſis A R, C S, quæ ſecent duos circulos in B, T, D, V: eritque G I in I N, ſcilicet ei æquale T I in I B ad quadra-

b

tum



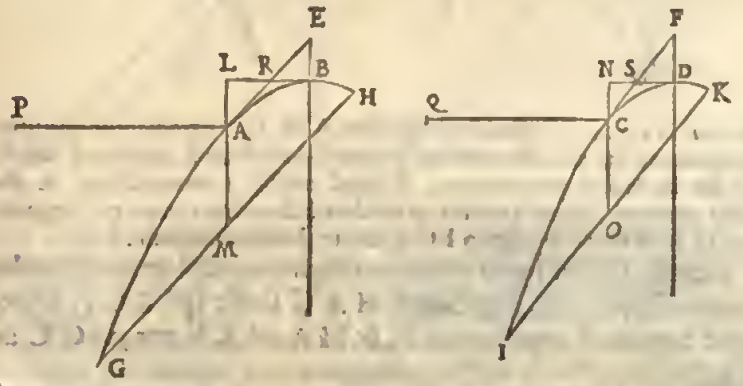
tum potentialis I B, vt H L in L O, seu L V in L D ad quadratum L D, cò quod quælibet ex dictis proportionibus eadem est proportioni fi-
37. lib. 1. guræ K A, & M C (39. ex 1.), ergo T I ad I B est, vt V L ad L D, & angulus I, qui æqualis est ipsi R A G æqualis est angulo L, qui æqualis
Propos. 2. præmiss. est S C H; igitur angulus G æqualis etiam est angulo H: & propterea G A R simile est H C S, & pariter G A P, H C Q sunt similia, quia P, Q sunt recti, vnde A P R, C Q S sunt etiã similia, & proportio vniuscuiusq; eorum, nempe G P, P R ad P A, est, vt proportio H Q, S Q ad C Q; igitur G P in P R ad quadratum P A, nempe B E ad erectum illius (39. ex 1.) est vt H Q in Q S ad quadratum C Q, nempe D F ad erectum
37. lib. 1. illius (39. ex 1.); igitur figuræ duorum axiũ sunt similes, & duæ sectiones similes sunt (12. ex 6. (sed oportet in ellipsi, vt duæ diametri, ideoque duo axes sint simul aut transuersi, aut simul recti. Et hoc erat propositum.



PROPO-

PROPOSITIO XVI.

SI sectiones A B, C D similes inter se, quæ sint prius parabolæ, tangant lineæ A E, C F terminatæ ad earum axes E B, F D, & contineant cum illis angulos æquales E, F, & in qualibet earum educantur ordinationes G H, I K ad diametros L A M, N C O transeuntes per puncta contactus axibus



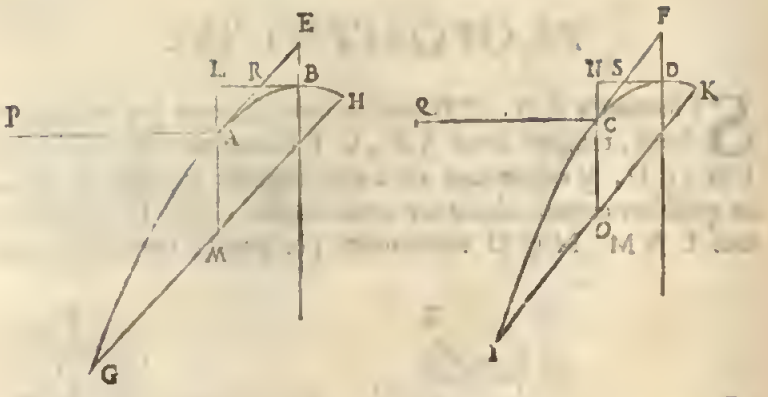
æquidistantes, & fuerit proportio suarum abscissarum A M, C O ad lineas tangentes A E, C F eadem; vtique ordinationes abscindent ex sectionibus similia segmenta, & similiter posita, vt G A H, I C K. Si verò ordinationes secuerint similia segmenta; vtique sectiones similes erunt, & abscissarum ad lineas tangentes proportio erit eadem, atque lineæ tangentes continebunt cum axibus angulos æquales.

Educamus enim duas B L, D N super duos axes B E, F D perpendiculares, quæ tangent sectiones in B, D: & ponamus A P ad duplam A E, vt R A assumpta ad A L ei similem, nec non C Q ad duplam C F, vt assumpta S C ad C N; igitur P A, Q C sunt erecti duarum diametrorum L M, N O (52. ex 1.) ergo G M potest P A in A M, (12. ex 1.) & similiter I O potest O C in C Q, (12. ex 1.) & propter æquidistantiam E B, L A, atque F D, C N sunt similia E R B, R L A, atque D S F, S N C; & duo anguli E, F suppositi sunt æquales; igitur angulus R A L æqualis est S C N, & N, L sunt recti; quare R A ad A L, nempe P A ad duplam A E est, vt S C ad N C, nempe vt Q C ad duplam C F, & M A ad A E supposita est, vt O C ad C F: ergo M A ad A P a est, vt O C ad C Q, & angulus O æqualis est M. Ostendetur igitur (vt

32. lib. 1.

49 lib. 1.

11. lib. 1. ibidem.



diximus in 11. ex 6.) quod si ad abscissas A M, C O egrediantur quælibet potentes, ad sua abscissa eandē proportionē habebunt si abscissæ ad abscissas sint in eadem proportione, & quod anguli à potentialibus, & abscissis contenti, erunt æquales in duabus sectionibus: quare erit segmentum H A G simile segmento I C K atque similiter positum.

Defin. 7. huius.

Deinde ijsdem signis in eisdem figuris manētibus, vt prius designatis supponatur, segmentum H A G simile ipsi K C I. Dico, quod angulus E æqualis erit F, & M A ad A E erit, vt O C ad C F.

Quoniam duo segmenta sunt similia erit angulus O æqualis M, & duo anguli E A L, F C N illis æquales, sunt quoque inter se æquales; ergo duo anguli F, E, qui illis æquales sunt, erunt inter se æquales, eoquod A E, C F parallelæ sunt G H, I K, & anguli N, L sunt recti; ergo duo triangula proportionis sunt similia, ideoque R A ad A L, nempe P A ad duplam A E est, vt C S ad C N, nempe Q C ad duplam C F: & quia G M potest P A in A M (12. ex 1.) & similiter I O potest Q C in C O; ergo P A ad G M est, vt Q C ad O I, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M est, vt C F ad C O: & iam ostensum est, quod duo anguli E, F sunt æquales. Et hoc erat ostendendum.

Defin. 7.

49. lib. 1. 11. lib. 1.

b

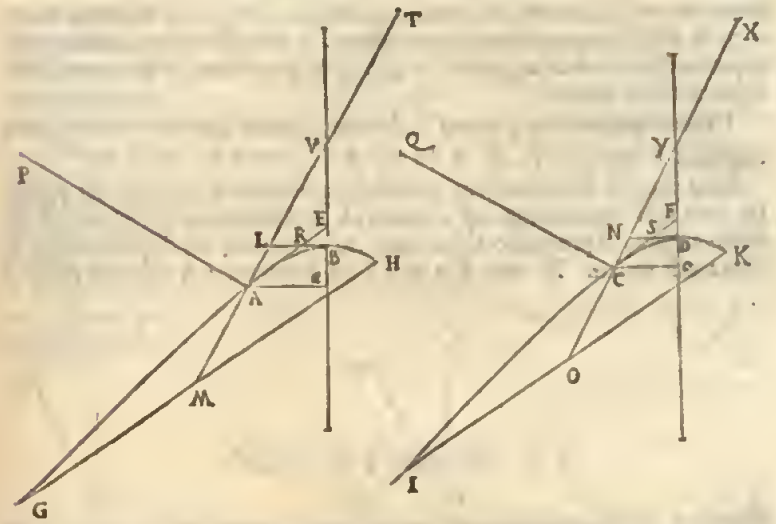
PROPOSITIO XVII.

DEinde sectiones sint hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua supponantur, vt prius.

a

Educamus C *c* perpendicularē super axim D F, & A *a* perpendicularem super axim B E; atque V, Y sint duo centra. Ergo (propter similitudinem duarum sectionum) erit V *a* in *a* E ad quadratum A *a* potentis,

vt Y *c*

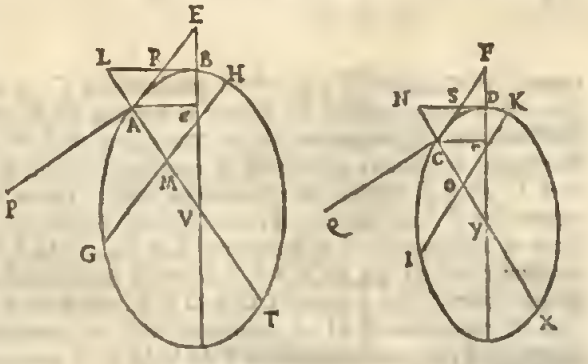


vt Y c in c F ad quadratum C c (39. ex 1.) quæ habent eandem proportionem, quàm figuræ axis habent, & angulus F ſuppoſitus eſt æqualis E: ergò Y c C ſimile eſt V a A: & propterea angulus Y æqualis eſt V, & angulus F C Y æqualis E A V: & propter ſimilitudinem N D Y, L B V æquales ſunt duo anguli C N S, A L R; ergo ſimilia ſunt C N S, A L R. Quare C S aſſumpta ad ei coniugatam C N eſt vt R A ad A L: & ponamus C Q ad duplam C F, vt C S ad C N, nec non A P ad duplam A E, vt A R ad A L; igitur Q C, A P ſunt erecti duarum diametrorum C Y X, A V T (53. 54. ex 1.) ſed C F ad C X duplam ipſius C Y eſt vt A E ad A T duplam ipſius A V, propter ſimilitudinem C F Y, A E V: ergo ex æqualitate Q C ad C X diametrum inclinatam, ſeu tranſuerſam eſt vt A P ad A T; & propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, & quia C O ad C F ſuppoſita eſt, vt A M ad A E: ergo ex æqualitate Q C ad C O eſt, vt P A ad A M: Quare potentes ad duo eius abſciſſa C O, A M, à quibus diuidũtur bifariam, eãdem proportionem habent: & proportio abſciſ

37. lib. 1. 12. huius.

6. præmiſ. huius.

50. lib. 1.



farum

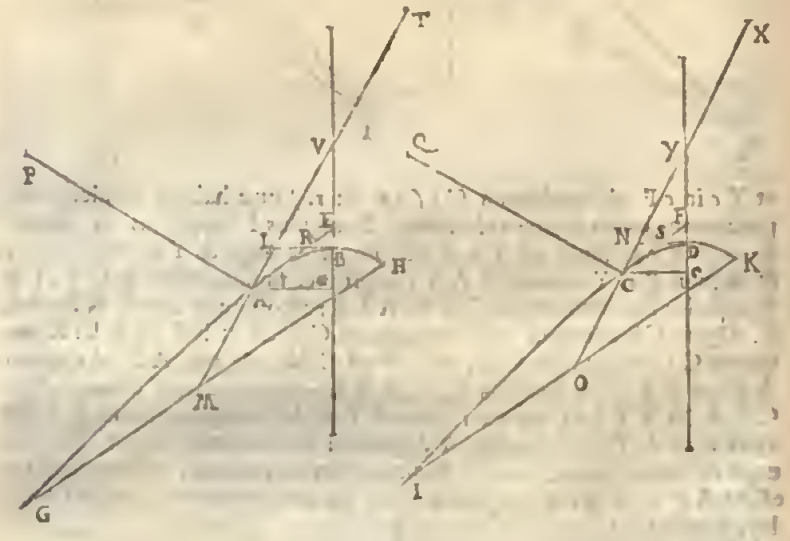
ſarum in vna ſectionum ad homologa abſciſſa alterius eſt eadem (12.ex 6.), & anguli comprehenſi à potentibus, & abſciſſis ſunt æquales; quia æquales ſunt duobus angulis R A L, S C N æqualibus, & propterea duo ſegmenta ſunt ſimilia.

Defin. 7. huius.

Poſtea oſtendetur, quod ſi duo ſegmenta fuerint ſimilia, erit angulus F æqualis E, & A M ad A E, vt O C ad C F.

Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales, & erit proportio potentium ad abſciſſas eadem, & proportio abſciſſarum, in vna earum ad ſua homologa in altera, erit eadem. Et quia V *a* in *a* E ad quadratũ *a* A eandem propor- d

Defin. 7. huius.

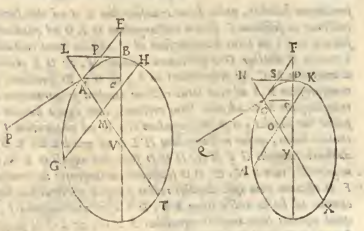


tionem habet, quàm Y *c* in *c* F ad quadratum *c* C, & duo anguli *a*, & *c* ſunt recti; atque angulus C, nempe O æqualis eſt A, nempe M, propter ſimilitudinem ſegmentorum: ergo triangulum A E V ſimile eſt C F Y, & angulus V æqualis eſt angulo Y; pariterque angulus E æqualis eſt F, & A V ad A E eandem proportionem habet, quàm Y C ad C F. Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F; ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius eſt, vt C X diameter ad C Q erectum eius (53. 54. ex 1.) & T M in M A ad quadratum M G eandē proportionem habet, quàm X O in O C ad quadratum O I: at ſuppoſitum eſt quadratum A M ad quadratum M G, vt quadratum C O ad quadratum O I; ergo ex æqualitate T M in M A ad quadratum A M, nempe T M ad M A, eandem proportionem habet, quàm X O in O C ad

21. lib. 1.

qua-

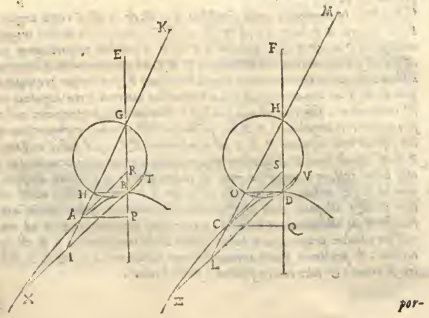
quadratũ O C, nempe X O ad O C; quare diuidendo, vel cõponendo, & ex æqualitate A M ad A E est vt C O ad C F; & iã ost enſũ est, quod duo anguli F, & E sunt æquales. Quare patet propoſitum.



Notæ in Propoſit. XV.

a SI figuræ diametrorum hyperbolarum, aut ellipſium fuerint ſimiles diſſimilium axium, & potentes illarum diametrorum contineant ſimul angulos rectos, vtique ſectiones ſimiles ſunt, &c. *Textus mendoſus huius propoſitionis ex ſubſequenti expoſitione, & demonſtratione corrigi debuit.*

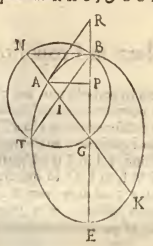
b Et G I in I N æquale ipſi T I in I B ad quadratum I B potentis eſt, vt H L in L O æquale ipſi V L in L D ad quadratum L D; quia, &c. *Quoniam à puncto B ſectionis A B ad diametrum K A I ducuntur ordinatim applicata B I, & B N contingens ſectionem in B ſecantes diametrum in I, & N; igitur rectangulum G I N ad quadratum ordinatim applicatæ I B eandem pro-* 37. lib. 1.



por-

portionem habebit, quàm latus transuersum K A ad eius latus rectum: eadem ratione in sectione C D erit rectangulum H L O ad quadratum ordinatim applicatæ D L, vt latus transuersum M C ad eius latus rectum; propterea quod à puncto D ducitur D O sectionem contingens, & D L ordinatim applicata ad diametrum M C, ei occurrentes in L, & O. Et quoniam ex hypothesi latus transuersum K A ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum M C ad eius latus rectum, cum figuræ harum diametrorum suppositæ sint similes; ergo rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D: deinde quia in duobus triangulis G B N, & H O D sunt duo anguli G B N, & H D O æquales,

Coroll. 32. lib. 1. *nempe recti (cum B N, & D O sectiones contingentes in terminis axium E B, & F D efficiant cum ipsis angulos rectos) atq; à verticalibus angulis B, & D ducuntur ad bases rectæ lineæ B I, D L efficientes angulos I, & L æquales, eo quod æquales sunt angulis æqualibus R A G, & S C H propter æquidistantiam*



linearum B I, A R, atque linearum D L, S C, & insuper rectangulum G I N ad quadratum I B eandem proportionem habet, quàm rectangulum H L O ad quadratum L D; igitur trianguli G B N, & H D O similia sunt inter se; & propterea angulus G æqualis erit angulo H.

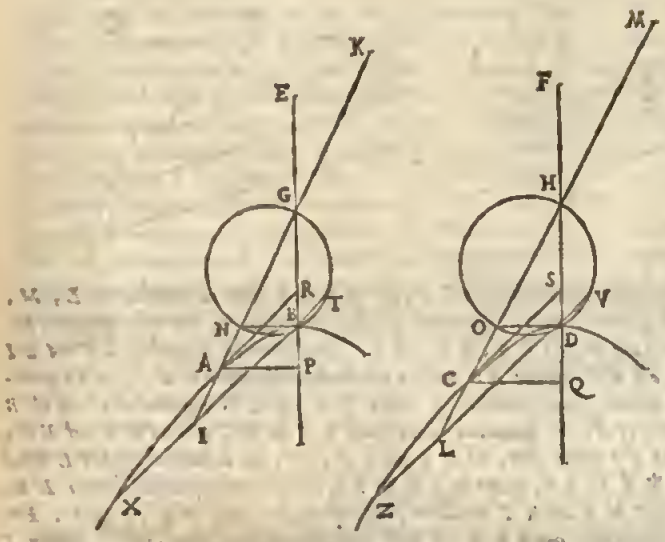
Propos. 2. præmiss.

Et proportio vniuscuiusque eorum, nempe G P, P R ad P A est, vt proportio H Q, Q S ad C O; &c. *In triangulis enim similibus G P A, & H Q C circa angulos rectos P, & Q erit G P ad P A, vt H Q ad Q C: pariter in duobus triangulis similibus R P A, & S Q C habebit R P ad P A eandem porportionem quàm, S Q ad Q C; proportio verò rectanguli G P R ad quadratum P A componitur ex iisdem rationibus laterum circa angulum rectum P: pariterque proportio rectanguli H Q S ad quadratum Q C ex rationibus laterum circa angulum rectum Q componitur, suntque ostensæ prædictæ componentes proportiones eadem inter se; igitur rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H Q S ad quadratum Q C; sed habet rectangulum G P R ad quadratum P A eandem proportionem, quàm axis transuersus E B ad*

37. lib. 1. Ibidem. *eius latus rectum (propterea quod ab eodem puncto A sectionis ducitur contingens A R, & ordinatim applicata ad axim A P) atque eodem modo rectangulum H Q S ad quadratum Q C eandem proportionem habet, quàm axis transuersus F D ad eius latus rectum; igitur axis transuersus E B ad eius latus rectum eandem proportionem habet, quàm latus transuersum F D ad eius latus rectum; & propterea figuræ axium duarum sectionum A B, & C D similes in-*

12. huius. *ter se erunt; & ideo conicæ sectiones similes erunt.*

Sed



Sed oportet in ellipſi, vt duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut rectiſimul, &c. *Addidi verba, quæ videntur in textu deſicere. Sed oportet in ellipſi, vt duæ diametri, ideòque duo axes ſint ſimul, aut tranſuerſi, aut ſimul recti. Licet enim multoties diametri coniugatæ ellipſium æquales eſſe poſſint, nihilominus eæ ſumi debent, quæ ad eaſdem partes reſpiciunt axes tranſuerſos, alias conſtructio, atque demonſtratio non ſequeretur, vt manifeſtum eſt.*

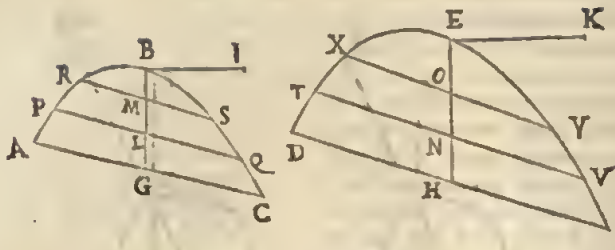
MONITVM.

PRo intelligentia propoſ. 16. & 17. præmitti debent tria hæc lemmata.

LEMMA VI.

SI in duobus parabolicis ſegmentis A B C, & D E F baſes A C, & D F cum diametris G B, & H E æquales angulos G, & H non rectos contineant, atque efficiant abſciſſas G B, & H E diametrorum ad latera recta B I, & E K proportionalia; erunt ſegmenta ſimilia inter ſe.

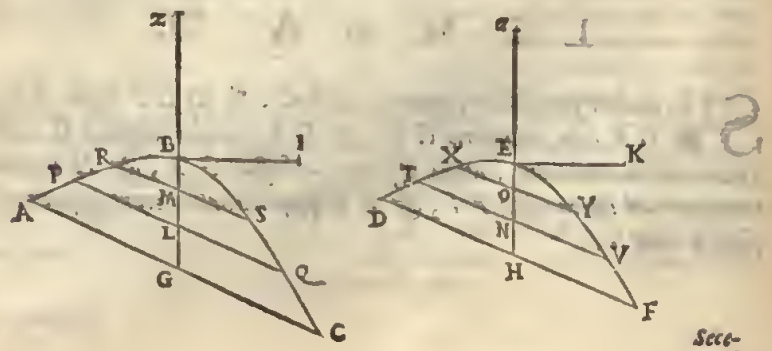
Secentur



Secentur diametrorum abscissæ G B, & H E in ijsdem rationibus in L, M, N, O, & ab ijsdem punctis educantur basibus æquidistantes, seu ad diametros ordinatim applicata P Q, R S, T V, X T. Quoniam ex hypothesi G B ad B I 11.lib. 1. *est, vt H E ad E K; estque A G media proportionalis inter G B, & B I; pariterque D H media proportionalis est inter H E, & E K; igitur A G ad G B est, vt D H ad H E; Et quoniam inuertendo L B ad B G est, vt N E ad E H, atque B G ad B I posita fuit, vt H E ad E K; ergo ex æquali ordinata L B ad B I erit, vt N E ad E K, quare vt L B ad P L, mediæ proportionalis inter L B, & I B, ita erit N E ad N T mediam proportionalem inter N E, & E K. Eodem modo ostendetur, quod R M ad M B eandem proportionem habet, quàm X O ad O E: & hoc semper continget in quibuslibet alijs diuisionibus proportionalibus abscissarum, sumique angulis G, & H æquales; igitur segmenta A B C, &* Defin. 7. huius. *D E F similia sunt inter se. Quod erat ostendendum.*

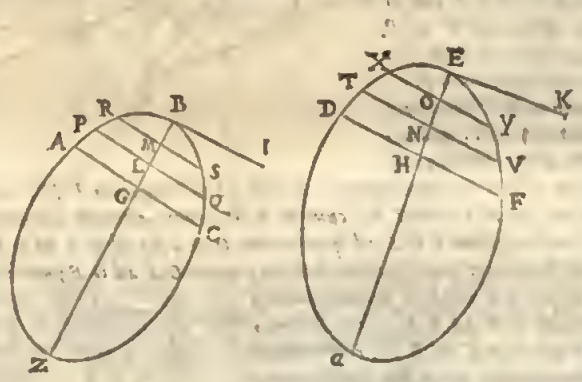
LEMMA VII.

Si in duobus segmentis A B C, & D E F hyperbolicis, aut ellipticis, baseis A C, & D F cum diametris G B, & H E, æquales angulos G, & H obliquos continentes, efficiant abscissas G B, & H E proportionales lateribus rectis B I, & E K, atque transuersis B Z, & E a, erunt segmenta similia inter se.



Sece-

Secentur abſciſſæ G B, & H E in iiſdem rationibus, ducanturque ordinatim applicatæ vt in precedenti factum eſt. Quoniam G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & inuertendo Z B ad B G eſt, vt a E ad E H, ergo ex æquali ordinata Z B latus tranſuerſum ad B I latus rectum erit, vt a E latus tranſuerſum alterius ſectionis ad E K eius latus rectum: eſt verò rectangulum Z G B ad quadratum ordinatim applicatæ G A, vt latus tranſuerſum Z B ad rectum B I; pariterque rectangulum a H E ad quadratum ordinatim applicatæ D H, vt tranſuerſum a E ad latus rectum E K, ſuntque prædicta latera figurarum oſtenſa proportionalia; igitur rectangulum Z G B ad quadratum A G eandem proportionem habet, quàm rectangulum a H E ad quadratum D H; ſed quadratum B G ad rectangulum Z G B eandem proportionem habet, quam G B ad G Z (propterea quod G B eſt illorum altitudo communis) pariterque quadratum E H ad rectangulum a H E eſt, vt H E ad H a, ſeu vt G B ad G Z; igitur quadratum G B ad rectangulum Z G B eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad rectangulum a H E; quare ex æquali quadratum G B ad quadratum G A eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratũ H D; ideoque inuertendo A G ad G B erit vt D H ad H E. Rurſus, quia inuertendo L B ad B G eſt vt N E ad E H; ſed G B, atque H E ad latera trãſuerſa proportionalia ſunt; igitur L B ad B Z erit vt N E ad E a; & propterea, vt prius quadratum L B ad rectangulum Z L B erit, vt quadratum E N ad rectangulum a N E; eſtque rectangulum Z L B ad quadratum ordinatim



applicata P L, vt rectangulum a N E ad quadratum T N, (ſcilicet vt latera tranſuerſa ad recta, qua proportionalia oſtenſa ſunt); igitur ex æquali ordinata quadratũ B L ad quadratum P L eandem proportionẽ habebit, quàm quadratũ E N ad quadratum T N; quare vt prius dictum eſt, P L ad L B eandem proportionem habebit, quàm T N ad N E; & hoc ſemper contingit in reliquis omnibus diuiſionibus abſciſſarum in eiſdem rationibus ſectis; ſuntque anguli G, & H æquales inter ſe, licet non recti; igitur (ex definitione 7.) ſegmenta A B C, & D E F ſimilia ſunt inter ſe. Quod erat oſtendendum.

LEMMA VIII.

Si duo hyperbolica, aut elliptica segmenta A B C, D E F fuerint similia, quorum bases A C, D F efficiant cum diametrorum abscissis B M, E O angulos æquales M, & O; sintque eorum transuersa latera T B, Z E, recta vero B L, E Q. Dico figuras eorum; siue rectangula T B L, & Z E Q similia esse.

Secentur segmentorum abscissa M B, O E proportionaliter in N, P, & per ea puncta ducantur ordinatim ad diametros applicata G N, I P aquidistantes basibus, efficientes abscissas B N, E P, coeuntesque; duæ rectæ lineæ T L, Z Q secantes rectas lineas N H, M V, P K, O S aquidistantes lateribus rectis B L, E Q in punctis H, V, K, S, atque à punctis H, & K ducantur rectæ lineæ H X, K R parallelæ diametris occurrentes ipsis M V, O S in X, & R. Quoniam segmenta supponuntur similia erit A M ad M B, vt D O ad O E, & G N ad N B erit vt I P ad P E, atque quadratum A M, seu

Defin. 7. huius.

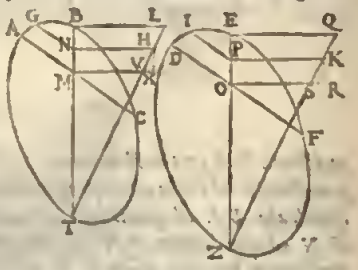
ei æquale rectangulum B M V, ad quadratum M B eandem

12. 13. lib. 1.

proportionem habebit, quàm

Eidem.

quadratum D O, seu ei æquale rectangulum E O S ad quadratum O E; sed vt rectangulum B M V ad quadratum M B ita est M V ad M B (cum M B sit eorum altitudo communis) pariterque vt rectangulum E O S ad quadratum O E, ita est O S ad O E; quare M V ad M B eandem proportionem habebit, quàm O S ad O E; non aliter ostendetur N H ad N B eandem proportionem habere, quàm P K ad P E: erat autem



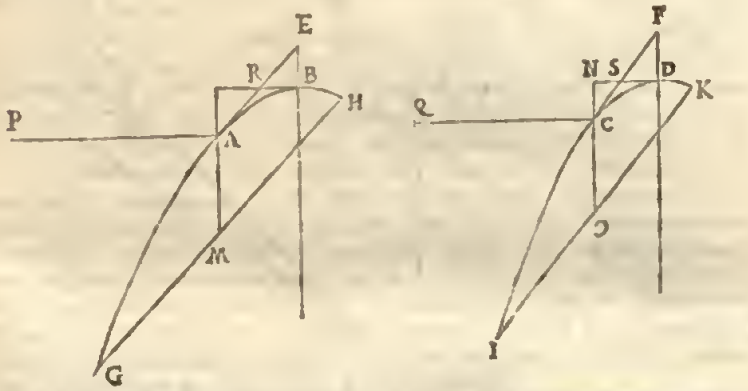
Lem. 1. lib. 5.

M B ad B N vt O E ad E P; ergo comparando antecedentes, & posteà consequentes ad differentias terminorum erit B M ad M N vt E O ad O P; atque B N ad N M eãdem proportionem habebit, quàm E P ad P O. Quare ex æquali V M ad M N erit vt S O ad O P, atque H N ad N M erit vt K P ad P O; & differentia ipsarum V M & H N idest X V ad M N, seu ad X H eandem proportionem habebit, quàm differentia ipsarum S O, & K P, idest S R ad O P, seu ad R K; quapropter V X ad X H erit vt S R ad R K; sed quia X V, L B inter se, nec non X H, & B T sunt parallelæ, atq; etiam S R, Q E inter se, nec nõ R K, & E Z sunt æquidistantes; erunt triangula V X H, & L B T simi-

T similia, pariterque triangula S R K, & Q E Z inter se similia; ideoque erit L B ad B T vt V X ad X H, pariterque Q E ad E Z erit vt S R ad R K; erat autem prius V X ad X H, vt S R ad R K; igitur L B ad B T eandem proportionem habebit, quàm Q E ad E Z; & propterea circa rectos angulos B, E, figuræ sectionum similes erunt inter se. Quod erat ostendendum.

Notæ in Propositi. XVI.

a ERgo M A ad A P est vt O C ad C Q, & angulus O æqualis est M, ostendetur (vt diximus in 11. ex 6.) quod, &c. *Sequitur enim ex æqualitate ordinata, quod M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q, cumque sint duo segmenta parabolica H A G, & K C I, quorũ diametri A M, & C O efficiunt cum basibus G H, & K I angulos M, & O æquales inter se (cum sint æquales angulis R A L, & S C N æqualibus à contingentibus*



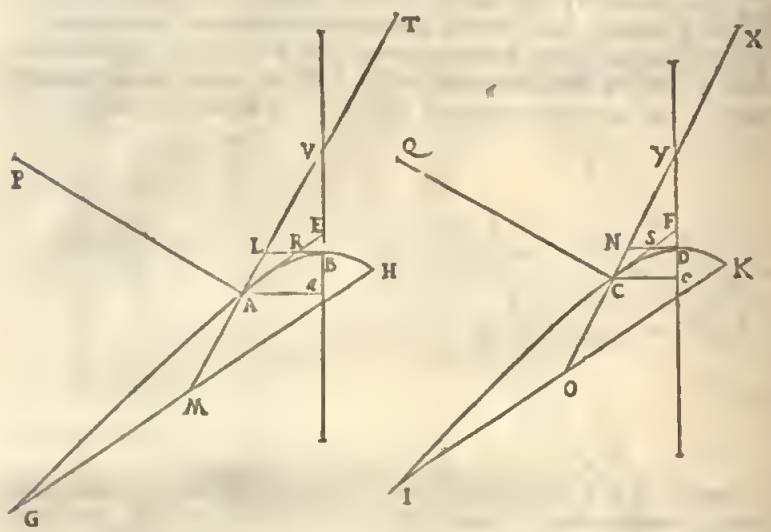
verticalibus parallelis basibus, & à diametris contentis) atque abscisa M A ad latus rectum A P eandem proportionem habet, quàm altera abscisa O C ad C Q latus rectum alterius sectionis; igitur duo segmenta H A G, & K C I similia sunt inter se. Lem. 6. huius.

b Et quia G M potest A P in A M, & similiter I O potest C Q in C O; ergo P A ad G M est, vt C Q ad I O, & G M ad M A est, vt I O ad O C; quia duo segmenta sunt similia, & E A ad A M, est vt F C ad C O; &c. *Sensus huius textus confusi, talis est. Quia segmenta H A G, & K C I similia supponuntur erit A M ad M G, vt C O ad O I, & quadratum A M ad quadratum M G erit vt quadratum C O ad quadratum O I; est verò rectangulum P A M æquale quadrato G M; pariterque rectangulum Q C O est æquale quadrato I O; igitur quadratum A M ad rectangulum P A M eandem proportionem habet, quàm quadratum C O ad rectangulum Q C O; & propterea M A ad A P eandem proportionem habebit, quàm C O ad C Q; sed prius ostensa fuit P A ad A E, vt Q C ad C F; igitur ex æquali ordinata erit M A* Defin. 7. huius. 11. lib. 1.

ad A E, vt O C ad C F, ſuntque anguli E, & F æquales, vt dictum eſt. Et hoc erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XVII.

DEinde ſint ſectiones hyperbolicæ, aut ellipticæ, & reliqua in ſuo ſtatu, &c. *Ideſt. Supponantur ſectiones hyperbolicæ, vel ellipticæ A B, & C D ſimiles inter ſe, ſcilicet figura axium V B, & Y D ſint ſimiles inter ſe, atque à verticibus A, & C duarum diametrorum A M, & C O ductæ ſint re-* a

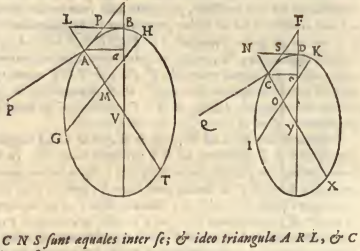


ctæ lineæ contingentes A E, & C F, efficientes cum axibus angulos A E B, & C F D æquales, ſintque H G, & K I ordinatim ad diametros applicatæ, ſcilicet æquidiſtantes contingentibus verticalibus; & habeat abſciſſa M A ad portionem contingentis A E eandem proportionem, quàm abſciſſa O C habet ad portionem contingentis C F; Dico ſegmenta H A G, & K C I ſimilia eſſe inter ſe.

Ergo Y c C ſimile eſt V a A, &c. *Quoniam duæ ordinatim ad axes applicatæ A a, & C c perpendiculares ſunt ad axes, erunt in triangulis A a E, & C c F duo anguli a, & c recti: atque ex hypotheſi duo reliqui anguli E, & F æquales quoque ſunt; igitur tertius angulus a A E æqualis eſt tertio angulo c C F, cumque in duobus triangulis V A E, atque Y C F ab eorum verticibus A, & C ducuntur ad baſes V E, & Y F duæ rectæ lineæ A a, & C c continentes eum baſibus angulos æquales, nempe rectos, & rectangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habet, quàm rectangulum Y c F ad quadratum c C, vt in textu oſtenſum eſt: atq; duo anguli a A E, & c C F æquales oſtenſi ſunt inter ſe; igitur erunt triangula V A E, & Y C F ſimilia inter ſe; ergo angulus V æqualis eſt angulo Y, atque angulus E A V æqualis erit angulo F C* b

ex 37. lib. 1. Propoſ 6. præmiſſ.

Y:



Conuerſ. 32. lib. 1.

T: poſtea, quia B L, & D N contingunt ſectiones in verticibus axium efficient angulos V B L, & T D N rectos, cũque duo anguli V, & T oſtenſi ſint æquales, in triangulis V B L, T D N, anguli V L B, & T N D æquales erunt inter ſe, & qui deinceps A L R, & C N S ſunt æquales inter ſe; & ideo triangula A R L, & C S N ſimilia ſunt inter ſe.

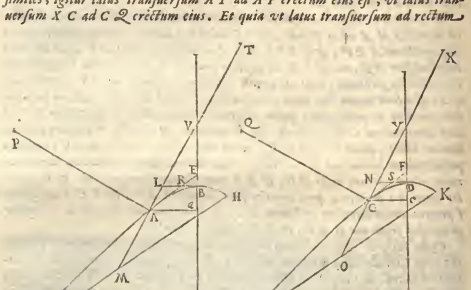
c Et propterea figuræ earundem diametrorum ſunt ſimiles, &c. *Quia ex hypotheſi M A ad A E erat, vt O C ad C F; atque (propter ſimilitudinem triangulorum A E V, & C F T) vt E A ad duplam ipſius A V, ſeu ad latus tranſuerſum A T, ita eſt F C ad duplam ipſius C T, ſeu ad latus tranſuerſum C X alterius ſectionis; ergo ex æquali ordinata erit M A ad A T, vt O C ad C X; oſtenſum autem fuit latus tranſuerſum T A ad A P latus rectum eius habere eandem proportionem, quàm alterius ſectionis latus tranſuerſum X C ad eius latus rectum C Q; ergo ex æquali ordinata M A ad A P eandem proportionem habet, quàm O C ad C Q; quare duæ abſciſſæ A M, & O C eandem proportionem habent ad latera recta, atque ad tranſuerſa earundem diametrorum, atque efficiunt baſes H G, & K I cum diametris angulos M, & O æquales inter ſe: propterea quod æquales ſunt angulis E A V, & F C T æqualibus (propter æquidiſtantiam rectarum H G, & A E; nec non K I, & C F) igitur erunt duo ſegmenta H A G, & K C I ſimilia inter ſe.* Defin. 7. huius.

d Quia propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum continebunt potentes cum ſuis abſciſſis angulos æquales: & erit proportio potẽtium ad abſciſſa eadem, & proportio abſciſſarum in vna earum ad alia ſimilia eadẽ, quia V *a* in *a* E ad quadratum A *a*, eſt vt Y *c* in *c* F ad quadratum C *c*, & duo anguli *a*, & *c* ſunt æquales; ergo angulus Y æqualis eſt angulo V, & angulus C, nempe O æqualis A, nempe M propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum; igitur A E V ſimile eſt Y F C, & angulus E; &c. *In hoc textu nonnulla verba deficiunt, aliqua verò tranſpoſita ſunt, vt nullus ſenſus colligi poſſit: tamen cum reſtitui poſſe cenſeo vt ibidem videre eſt. Quoniam duo ſegmenta H A G, & K C I ſupponuntur ſimilia efficient diametri A M, & C O cum baſibus G H, & K I angulos M, & O æquales, licet non rectos; eruntque figuræ earumdem diametrorum ſimiles inter ſe: & propterea habebit T A ad eius rectum eandem proportionem, quàm X C ad eius latus rectum; igitur ſectiones A B, & C D ſimiles ſunt, ideſt ductis axibus V B, & T D erunt figuræ axium ſimiles inter ſe: ducuntur verò à punctis A, & C ad axes ordinatim applicati A a, & C c, atque contingentes A E, & C F; igitur rectangu-*

Lem. 8. huius. 15. huius. 47. lib. 2. 12. huius. 37. lib. 1.

ctangulum V a E ad quadratum a A eandem proportionem habebit, quàm axis transuersus ad eius erectum, seu quàm axis transuersus alterius sectionis C D ad eius erectum: sed in eadem proportione est rectangulum T c F ad quadratũ
37. lib. 1. *c C; igitur in duobus triangulis A V E, & C T F rectæ a a, & c c ipsi basibus angulos æquales a, & c, nempe rectos efficiunt, cum ordinatim applicatæ sint ad axes; atque duo anguli verticales V A E, & T C F æquales sint inter se, cum propter parallelas æquales sint angulis O, & M æqualibus in segmentis similibus;*
Propos. 7. præmiss. *igitur duo triangula A E V, & C F T æquiangula, & similia sunt inter se: & propterea V A ad A E erit, vt T C ad C F, &c.*

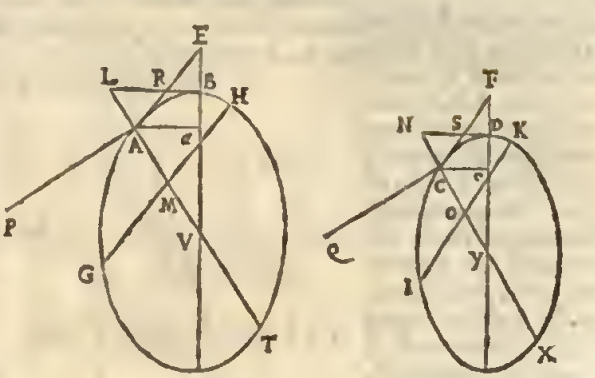
Ponamus iam P A ad duplam A E, vt Q C ad duplam C F: ergo ex æqualitate A T diameter ad A P erectum eius, &c. *In hoc textu nonnulla videntur deficere, eiusq; sensus talis erit. Quia veluti supra dictum est, triangula R A L, & S C N similia sunt inter se, habebit R A ad A L eandem proportionem, quàm S C ad C N: Ponamus iam P A ad duplam A E, vt R A ad A L, & Q C ad duplam C F, vt S C ad C N, erunt A P, & C Q latera rec-*
50 lib. 1. Lem. 8. *ta diametrorum A M, & O C; sed earundem diametrorum figuræ ostensa sunt similes; igitur latus transuersum A T ad A P erectum eius est, vt latus transuersum X C ad C Q erectum eius. Et quia vt latus transuersum ad rectum*



21. lib. 1. *ita est rectangulum T M A ad quadratum M G, & similiter rectangulum X O C ad quadratum O I eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum, scilicet eandem, quàm habent latera figurarũ earundẽ diametrorũ; igitur rectangulum T M A ad quadratum M G eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum X O C ad quadratum O I; habet verò M G ad M A eandem proportionem, quàm I O ad O C propter similitudinem segmentorum; ergo quadratum G M ad quadratum M A erit vt quadratum I O ad quadratum O C: & propterea ex æquali ordinata rectangulum T M A ad quadratum M A, seu T M*

ad A M

ad A M eandem proportionem habebit, quàm X O C ad quadratum O C, ſeu candē, quàm habet X O ad C O, & comparando conſequētes ad differētias terminorum M A ad A T eandem proportionem habebit, quàm O C ad C X: erat autē prius T A ad A E, vt X C ad C F; igitur ex æquali M A ad A E erit, vt O C ad C F, & fuerunt oſtenſi anguli E, & F æquales. Quod erat oſtendendum.



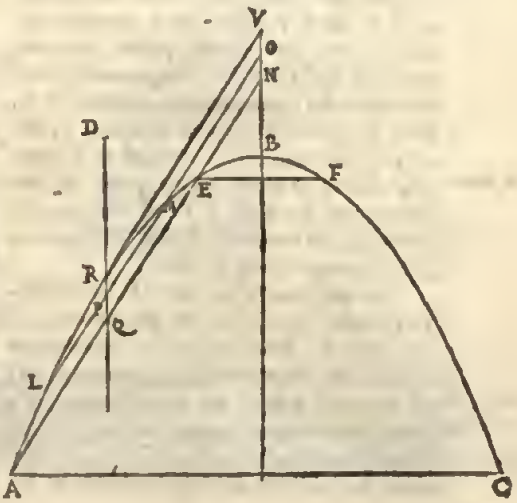
SECTIO SEPTIMA

Continens Propoſit. XVIII. & XIX.

CViuslibet ſectionis A B C duo ſegmenta C F, A E cadentia inter duas ordinationes A C, E F ad vtraſque partes axis B V ſunt inter ſe ſimilia, & ſimiliter poſita, nec ſunt ſimilia alteri ſegmento (niſi in ellipſi, in qua quatuor ſegmenta memorata in propoſitione 8. ſunt æqualia, ſimilia, & ſimiliter poſita, quæ alteri ſegmēto ſimilia nō ſunt.

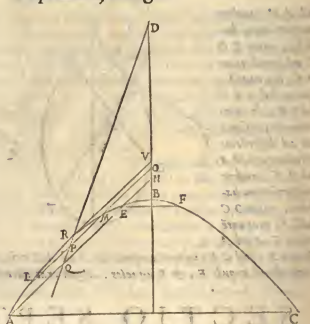
a Quoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non cōgruunt duo ſegmenta G I, K H in ellipſi (7. 8. ex 6.) at non ſunt ſimilia alteri ſegmento: ſi enim hoc fieri poteſt, ſit ſegmentum L M ſimile ſegmento F C. Et quia F C congruit A E. Ergo duo ſegmenta L M, A E ſunt ſimilia, producamus A E, L M

b quouſque occurrant axi in N, O, erit angulus N æqualis O (vti demonſtrauimus in 16. & 17. huius



huius) atque A N parallela erit L O. Educatur iam R Q bifariã diuidens A E, L M in P, Q: quare erit diameter sectionis (32. ex 2.) & educatur R V parallela A N, quæ sectionẽ continget (18. ex 1.). Et quia duo segmenta L M, A E sunt similia habebit maior Q R ad eandem R V eandem proportionẽ, quàm habet minor R P; quod est absurdum. Quare non sunt similia duo segmenta A E, C F alteri segmento. Quod erat ostendendum.

28. lib. 2.
17. lib. 1.
16. 17. huius.



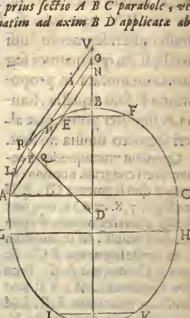
Notæ in Propositt. XVIII. & XIX.

QVoniam vnumquodque eorum alteri congruit, nec non congruunt duo segmenta G I, K H in ellipsi (7. 8. ex 6.) at non sunt similia alteri segmento; &c. *Ideſt. Sit prius sectio A B C parabole, vel hyperbole. Quoniam duæ A C, & E F ordinatim ad axim B D applicatæ abscindunt ex vtraque parte axis duo segmenta A E, & C F congruentia, propterea similia erunt, atque similiter posita. Secundo, in ellipsi ductæ sint ad axim quatuor ordinatim applicatæ, quarum binæ extremæ E F, & I K æqualiter à centro D distent; pariterque binæ intermediæ A C, & G H æqualiter distent ab eodem centro: quare quatuor segmenta G I, H K, C F, & A E æqualia erunt, & sibi mutuo congruent, & propterea similia quoque inter se erunt.* a

7. huius.
8. huius.

Erit angulus N æqualis O, vti demõstrauimus, &c. *Quoniam duo segmenta L M, & A E, ponuntur similia, atque eorum bases L M, & A E productæ occurrunt axi in O, & N: igitur vt demonstratum est, anguli à contingentibus verticalibus segmentorum similium L M, & A E cum axi communi B D eiusdem sectionis continebunt an-* b

Prop. 16. 17. huius.



gulos

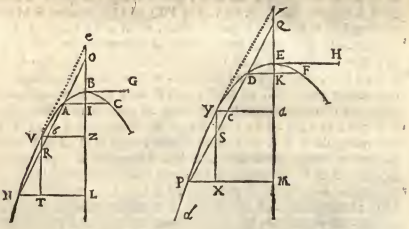
gulos æquales; ij verò anguli æquales sunt angulis O, & N, cum bases L M, & A E parallelæ sint contingentibus verticalibus eorundem segmentorum; igitur anguli L O B, & A N B æquales sunt inter se; & propterea duorum segmentorũ bases L M, & A E parallelæ sunt inter se.

SECTIO OCTAVA

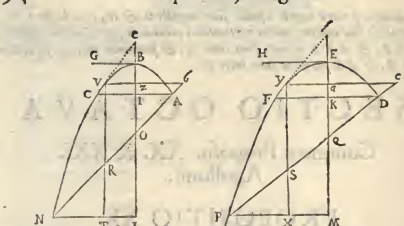
Continens Propoſit. XX. & XXI. Apollonij.

PROPOSITIO XX.

a SI in quibuslibet ſimilibus coniſectionibus A B C, & D E F ductæ fuerint ad axes B O, E Q ordinatim applicatæ A C, D F, N L, P M, quarum illæ, quæ ad eaſdem partes verticum B, & E ducuntur efficiant abſciſſas erectis proportionales, ſcilicet I B ad B G ſit, vt K E ad E H, nec non L B ad B G, vt M E ad E H: Dico ſegmenta facta ab ordinatis ſimiliter poſitis eſſe inter ſe ſimilia, ac ſimiliter poſita, ſcilicet N A ipſi P D, atque A B ipſi D E, nec non N B ipſi P E.



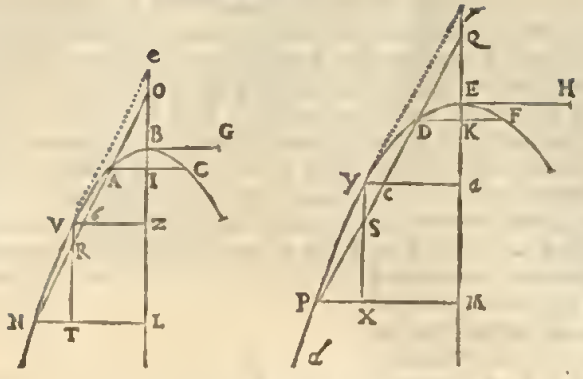
b Sintque primò ſectiones parabolæ; & educamus N A ad B L in O, & P D ad M E in Q. Et quia G B ad B I eſt, vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo L B ad B I, nempe L N ad I A potentia (19. ex 1.) nempe L N ad O I eandem proportionem habet, quàm M E 20. lib. 1.



ad E K, nempe P M ad D K potentia, nempe M Q ad Q K, & per conuersionem rationis O L ad L I erit, vt Q M ad M K: estque I L ad L B, vt K M ad M E; ergo O L ad L B est, vt Q M ad M E, & L B ad L N
Defin. 2. est, vt E M ad M P (propter similitudinem duarum sectionum) ergo ex c
æqualitate O L ad L N erit, vt Q M ad M P; sunt que M, & L duo anguli recti; ergo N L O simile est P M Q; & per R, S semipartitiones ipsarum X Y, D P ducamus ipsas T V, X Y parallelas duobus axibus, & ex duobus punctis V, Y, educamus perpendiculares V Z, Y a super duos axes. Et quia N O ad O A est, vt P Q ad Q D comparando antecedentes ad semisse differentiarum terminorum vel ad semisummas eorũ fiet N d
O ad R O, nempe N L ad L T, quæ est æqualis ipsi V Z, nempe L B ad B Z longitudine (19. ex 1.) vt P Q ad Q S, nempe P M ad X M æ-
20. lib. 1. qualem ipsi Y a, nempe longitudine, vt M E ad E a (19. ex 1) igitur comparando differentias terminorum ad antecedentes, erit Z L ad L B,
Ibidem. vt a M ad M E, & L B ad L O est, vt M E ad M Q; ergo ex æqualitate L Z ad L O, nempe N b ad N O est, vt M a ad M Q, nempe P c ad P Q e
erat autem prius N R ad N O, vt S P ad P Q, & comparando semisũmas, vel semidifferentias terminorum ad eorundem differentias O R ad R b erit, vt Q S ad S c, & R b ad R V est, vt S c ad S Y; quia duo triangula V R b, Y S c sunt similia; ergo R O ad R V eandem proportionem habet, quàm Q S ad S Y; sed tangens in V perueniens ad L O f
æqualis est O R, cui parallela est; quia cadit inter duas lineas parallelas; & similiter tangens in Y parallela est S Q, & ei æqualis; ergo V R abscissa ad tangentem est, vt abscissa S Y ad eius tangentem, & angulus Q æqualis est angulo O; igitur duo segmenta N V A, P Y D sunt similia (16. ex 6.) & pariter duo segmenta A B C, D E F, atque duo segmenta N B, P E sunt similia inter se, & similiter posita. g

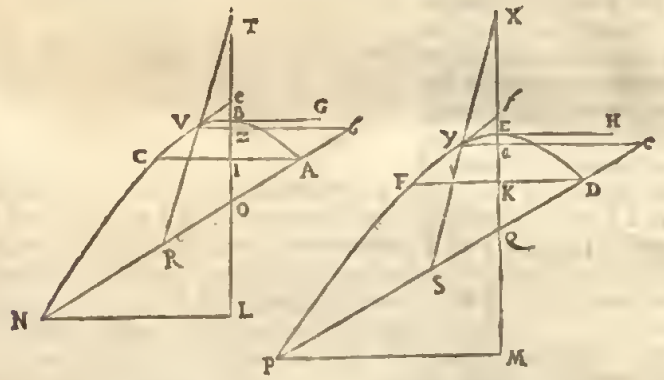
Deinde ponamus aliud segmentum P d. Dico non esse simile alicui h
prædictorum segmentorum, quia non abscinduntur à duabus ordinationibus vnius axis (18. ex 6.). Et hoc erat ostendendum.

PROP.



PROPOSITIO XXI.

SInt postea duæ illæ sectiones hyperbolicæ, & ellipticæ similes, & earum centra T, X (remanentibus lineis, & signis, vt prius) & ducantur duæ contingentes V *e*, & Y *f*.



a Quoniam B G ad B I supposita est, vt H E ad E K, & pariter G B ad B L, vt H E ad E M; ergo ex æqualitate, & per conuersionem rationis
b B L ad L I est vt E M ad M K; & propter similitudinem duarum sectionum N L ad A I nempe L O ad O I est, vt M P ad D K, nempe M Q ad Q K, & antecedentes ad summas vel differentias terminorum, scilicet Lem. 1. lib. 5.
c O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K, & ex æqualitate O L ad L B erit, vt Q M ad M E, sed B L ad L N est, vt E M ad M P, cum ex suppositione sectiones sint similes; ergo O L ad L N est, vt Q M ad M P; suntque L, M duo anguli recti: ergo anguli O, Q,

nempe *e*, *f* ſunt æquales: deinde ducantur V Z, Y *a* ad axes ordinatæ; ergo (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) T Z in Z *e* ad quadratum Z V eandem proportionem habebit, quàm X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur V *e* T ſimile eſt Y *f* X, & pariter O T R, Q X S; & propterea O *e* ad R V eandem proportionem habebit, quàm Q *f* ad Y S, & propter ſimilitudinem duarum ſectionum B I ad I A eſt, vt E K ad K D, & A I ad I O, vt D K ad K Q propter ſimilitudinem duorum triangulorum; ergo (ex æqualitate, & comparando antecedentes ad ſummas vel differentias terminorum) erit B I ad B O, vt E K ad E Q, ſed B T ad B I erat, vt X E ad E K (propter ſimilitudinem duarum ſectionum) ergo ex æqualitate, & rurſus comparando antecedẽtes ad ſummas vel differentias terminorum B T ad T O erit, vt X E ad X Q, cumque T Z in Z *e* ad quadratum V Z ſit vt X *a* in *a f* ad quadratum *a* Y (39. ex 1.) & quadratum V Z ad quadratum Z *e* eſt, vt quadratum *a* Y ad quadratũ *a f* erit T Z in Z *e*, ad quadratũ Z *e*, nempe T Z ad Z *e* vt X *a* in *a f* ad quadratum *a f* nempe G *a* ad *a f*, & comparãdo antecedentes ad differnntias terminorũ in hyperbola, & ad eorum ſummas in ellipſi, fiet Z T ad T *e*, nẽpe quadratum B T (quod eſt æquale ipſi Z T in T *e* (39 ex 1.) ad quadratnm T *e* eſt, vt X *a* ad X *f*, nempe *a* X in X *f*, quod eſt æquale quadrato E X (39. ex 1.) ad quadratum X *f*; ergo B T ad T *e* potentia eſt, vt E X ad X *f*; & propterea

d

Propoſ. 6. prœmiſſ.

Lem. 1. lib. 5.

e

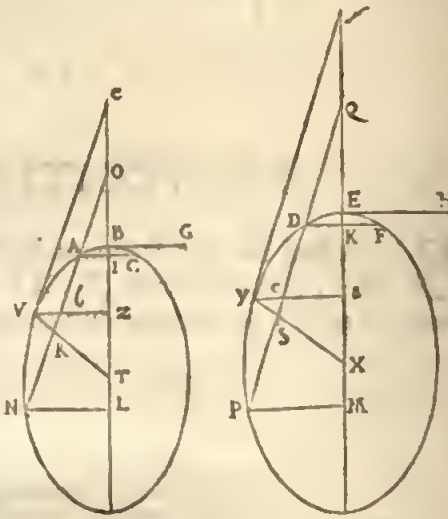
Ibidem.

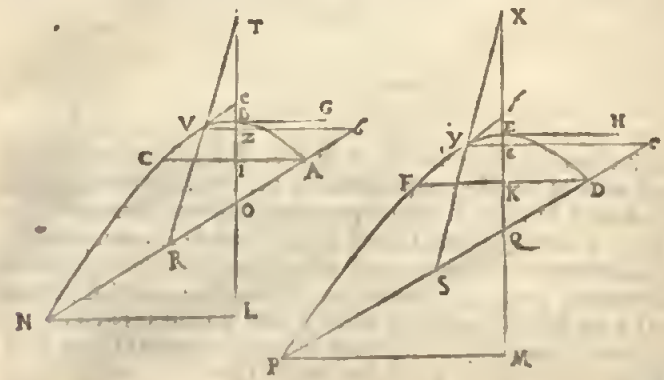
37. lib. 1.

f

37. lib. 1.

Ibidem.



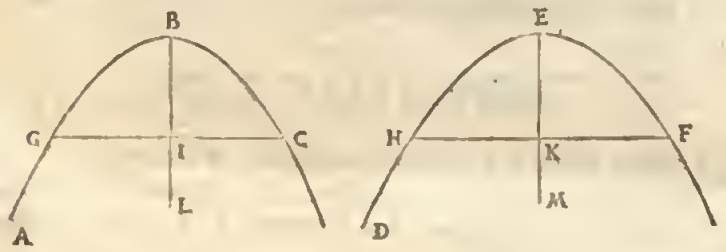


T B

T B ad T *e* erit, vt E X ad X *f*; & iam oſtendimus, quod B T ad T O eſt, vt E X ad X Q; igitur ex æqualitate, & comparando terminorum differentias ad conſequentes erit O *e* ad *e* T, vt Q *f* ad *f* X; ſed T *e* ad *e* V eandem proportionem habet quàm X *f* ad *f* Y, eo quod oſtenſa ſunt ſimilia triangula V T *e*, Y X *f*; quare O *e* ad *e* V eſt vt Q *f* ad *f* Y; & iam oſtendimus, quod O *e* ad R V eandem proportionem habet, quàm Q *f* ad S Y; ergo R V ad V *e* eſt, vt S Y ad Y *f*, & angulus *e* æqualis eſt angulo *f*; igitur duo ſegmenta N V A, P Y D ſimilia ſunt inter ſe (17. ex 6.) & ſimiliter poſita. Inſuper dico, non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento; quia non abſcinduntur ab vna ordinatione, aut duabus, & earum diſtantia in ellipſi à centro non eſt æqualis (18. ex 6.), & hoc erat oſtendendum. Lem. 1. lib. 3.

PROPOSITIO XXII.

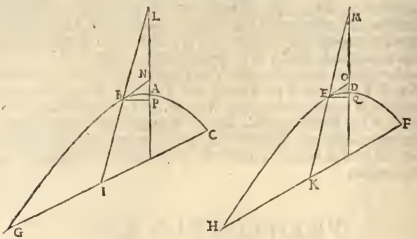
SEctionum non ſimilium A B C, D E F vnum ſegmentum vnius non eſt ſimile alicui ſegmento alterius.



Si enim hoc verum non eſt, ſit ſegmentum G C ſectionis A B C (ſi fieri poteſt) ſimile ipſi H F alterius ſectionis D E F, & iungamus G C, H F, eaſdēq; bifariam ſecemus in I, K; iungamuſque L I, M K; quæ ſint duæ diametri, & ſecent ſegmenta in B, E: ſi itaque fuerint duo axes, eū duo ſegmenta ſint ſimilia, vtique egrederentur in eorum ſingulis ordinationes ad duos axes, numero æquales, continentes cum axibus angulos rectos, & proportiones ordinationum ad ſua abſciſſa in qualibet earum eſſent ædem, ac abſciſſæ ad abſciſſas proportionales quoque eſſent, Et propterea duæ ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, ſed iam ſuppoſitæ fuerunt non ſimiles; quod eſt abſurdum. Si verò I L, M K non fuerint axes, educamus ex B, E ad duos axes L P, M Q duas perpendiculares B P, E Q, & duas tangentes B N, & E O: itaque (propter ſimilitudinē duorum ſegmentorum) ſimilia erunt B N L, E O M; & pariter L B P, M E Q; atque quadratum B P ad L B in P N, nempe in eadem proportione 44. lib. 2. Defin. 7. huius. Defin. 2. huius.

a

b



37. lib. 1. Ibidem. tione figuræ diametri A L (40. ex 1.) erit vt quadratum E Q ad M Q in O Q, nempe in eadem proportione figuræ diametri D M (40. ex 1.) quapropter duæ proportiones figurarum earundem sectionum sunt eædem inter se; & propterea duæ sectiones sunt similes (12. ex 6.) at suppositæ fuerunt non similes. Quod est absurdum.

PROPOSITIO XXIII.

13. huius. SI autem sectio A B C fuerit parabola, & sectio D E F hyperbola, aut ellipsis: manifestum est, sectiones non esse inter se similes. Et dico quod duo segmenta G C, H F non sunt similia.

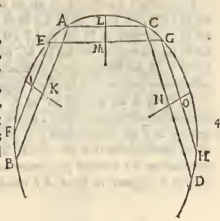
Si enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est impossibile, quemadmodum ostensum est in omnibus sectionibus ad propositionem 13. si vero vna earum fuerit hyperbole, altera verò ellipsis, idipsum ostensum est ad propositionem 14. Et hoc erat propositum. a

PROPOSITIO XXIV.

CVIuslibet coniſectionis A C D portio B A C D non erit arcus circuli.

Si enim hoc verum non est educamus in illa chordas A B, C D, A C, quarum nulla alteri sit parallela: & educamus E F parallelam A B, & E G parallelam A C, atque G H parallelam C D, & per singularum duarum æquidistantium semipartitiones iungamus K I, L M, N O, quæ quidem

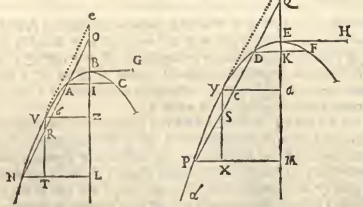
dem lineæ perpendiculares ſunt ad prædictas chordas, ſuntque etiam diametri ſectionis, ergo I K, L M, N O ſunt axes, nec ſibi in directum coincidunt; quia chordæ primo eductæ inter ſe parallelæ non erant: hoc autem eſt abſurdum, quia in qualibet ſectione reperiri non poſſunt plures, quàm duo axes (52. ex 2.); ergo fieri non poteſt, vt ſectionis conicæ portio ſit arcus circuli. Quod erat oſtendendum.



48. lib. 2.

Notæ in Propoſit. XX.

a QVodlibet duorum ſegmentorum, vt A B C, D E F in duobus ſegmentis ſimilibus, vt N A C, P D F abſciſſa ſint ab ordinatis duorum axium ſectionum, vt A C, D F, N L, P M, A M, A S, K M ad latus ſuarum verticum vt B, E; ſitque proportio earum abſciſſarum ad erecta duorum ſegmentorum eadem, nempe I B ad B G, vt K E ad E H, & L B ad B G, vt M E ad E H: vtique duo ſegmenta A B C, D E F, N B, P E ſimilia ſunt, & ſimilia poſitione: &c. *Textus hic*

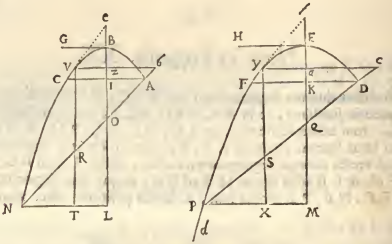


adeo corruptus eſt, vt ne Apollonius quidem, ſi reuiuiſceret, ſenſum ex verbis tam inconcinnis, & non coherentibus elicere poſſet. Itaque diuinando eam eſſe veram lectionem cenſeo; quàm in textu appoſui.

Educa-

Educamus itaque N A ad O ex B L, & P D ad Q ex M E, quia B G ad B I eſt, vt H E ad E K, & B G ad B L eſt vt H E ad E M; ergo L B ad B I, nempe L N ad A I (19. ex 1. (nempe L O ad O I eſt vt M E ad E K, nempe P M ad D K, nempe M Q ad Q K; & contra O L ad L I, vt V M ad M K, &c. *Addenda non nulla verba, quæ deſiciunt, & reliqua reſtituenda cenſui, vt in textu leguntur. Quoniam B G ad B I eſt vt H E ad E K, & B L ad B G eſt vt M E ad E H; ergo, ex æqualitate, L B ad B I eandem proportionem habet, quàm M E ad E K, ſed quadratum N L ad quadratum A I eſt in parabola, vt abſciſſa L B ad B I; pariterque quadratum P M ad quadratum D K eſt, vt M E ad E K: & propterea quadratum N L ad quadratum A I eandem proportionem habebit quàm quadratum P M ad quadratum D K; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D* b

20. lib. 1.



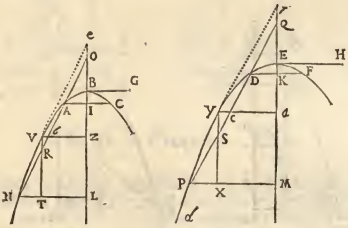
K; ſed vt N L ad A I ita eſt L O ad O I (propter parallelas A I, N L, & ſimilitudinem triangulorũ A I O, & O N L) pariterq; vt P M ad D K ita eſt M Q ad Q K (propter ſimilitudinem triangulorum Q M P, & Q K D) igitur L O ad O I eandem proportionem habebit, quàm M Q ad Q K; & comparando antecedentes ad differentias, vel ſummas terminorum O L ad L I eandem proportionem habebit, quàm Q M ad M K.

Et B L ad L N eſt vt E M ad M P (propter ſimilitudinem duorum ſegmentorum) ergo ex æqualitate O L ad L N, &c. *Sequitur quidem hoc non propter ſimilitudinem ſegmentorum, quandoquidem ſegmenta ſimilia non ſupponuntur ſed quia ſemper parabole ſunt ſimiles, & in eis poſitæ ſunt axium abſciſſæ L B, & M E proportionales lateribus rectis B G, & E H, propterea (vt in prop. 11. huius oſtenſum eſt) B L ad L N eandem proportionem habebit quàm E M ad M P; ſed prius L B ad B I erat vt M E ad E K, ergo comparãdo differentias terminorum ad antecedentes erit I L ad L B vt K M ad M E, eſtq; oſtenſa O L ad L I vt Q M ad M K, ergo ex æquali ordinata O L ad L B erit vt Q M ad M E.* C

11. huius.

Et

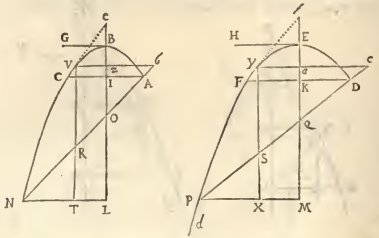
d Et quia N O ad O A eſt vt P Q ad Q D inuertamus proportionem, deinde bifariam ſecemus duas tertias partes, & inuertamus eas quoque, fiet N O ad O R, nempe N L ad L T in eadem ratione ipſi V Z, nempe L B ad B Z, vt D Q ad Q T, nempe P M ad P X æqualem ipſi Y *a*, nempe M E ad E *a*, &c. *Quoniam L O ad O I oſtenſa fuit vt M Q ad Q K, & propter parallelas I A, L N, nec non D K, M P eſt N O ad O A, vt L O ad O I; pariterq; P Q ad Q D eſt vt M Q ad Q K; igitur N O ad O A eandē proportionē habet, quàm P Q ad Q D, & comparando antecedentes ad ſemidifferentias, vel ſemiſummas terminorū erit N O ad R A, vt P Q ad S D: & pro-*



pterea N O ad O R ſummā, vel differentiā conſequentium eandem proportionem habebit, quàm P Q ad Q S; ſed propter parallelas R T, & O L eſt L N ad T L, vt N O ad O R: pariterque (propter parallelas S X, & Q M) eſt P M ad X M, vt P Q ad Q S; igitur N L ad L T eandem proportionem habet, quàm P M ad M X: ſuntque in parallelogrammis V L, & Y M latera oppoſita æqualia V Z ipſi T L, atque a Y ipſi X M; igitur N L ad V Z eandem proportionem habet, quàm P M ad Y a, & ita erunt earum quadrata; ſed vt quadratū 20 lib. 1. *N L ad quadratum V Z ita eſt abſciſſa L B ad abſciſſam B Z, pariterque vt quadratum P M ad quadratum Y a, ita eſt abſciſſa M E ad abſciſſam E a; ergo L B ad B Z eandem proportionem habet, quàm M E ad E a.*

e Et occurrere faciamus par pari remanet O R ad R *b*, vt Q S ad S c, &c. *Quoniam oſtenſa fuit O N ad O R, vt Q P ad Q S, per conuerſionem rationis O N ad N R erit vt Q P ad P S, pariterque oſtenſa fuit* b *N ad N O, vt c P ad P Q; ergo ex æquali* b *N ad N R eſt vt c P ad S P, & dividendo* b *R ad R N erit vt c S ad S P; ſed erat inuertendo R N ad N O, vt S P ad P Q; quare comparando antecedentes ad differentias terminorum erit N R ad R O vt P S ad S Q: idemq; rurſus ex æqualitate* b *R ad R O erit vt c S ad S Q: eſtq; V R ad R* b *vt T S ad S c (eo quod triangula V R* b, *& T S c ſunt ſimilia triangulis ſimilibus O N L, & Q M P propter æquidiſtantes) ergo ex æquali ordinata V R ad R O eandem proportionem habet, quàm T S ad S Q.*

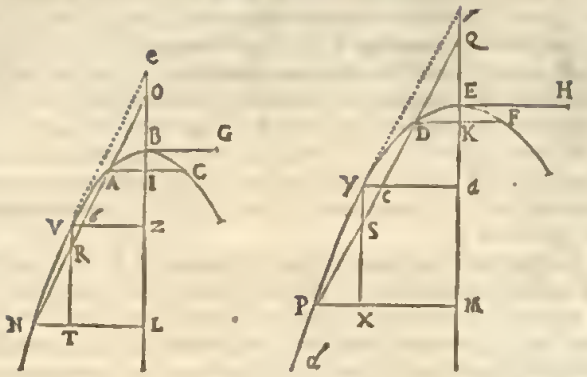
Sed tangens in V perueniens ad L O, &c. *Si enim ex punctis Y, V ducantur V e, & Y f tangentes parabolas, & producantur quousque secent axes in e, & f efficientur duo parallelogramma V e O R, & Y f 2 S, in quibus tangentes V e, & Y f efficientur æquales ipsis O R, & 2 S: & propterea inuertendo R V absciſſa ad contingentem V e æqualem ipſi R O eandem proportionem habebit, quàm abſciſſa S Y ad contingentem Y f æqualem ipſi S 2, atque efficiunt prædicta contingentes cum axibus angulos e, f æquales ipsis O, & 2 a-* Prop. 16. huius. *qualibus propter parallelas; igitur ſegmenta N V A, & P Y D ſimilia ſunt inter ſe.* f



Et pariter duo ſegmenta A B C, D E F, atque duo ſegmenta N B, P E ſunt ſimilia inter ſe, & ſimiliter poſita, &c. *Hoc manifeſtum eſt, ſi enim coniungantur rectæ lineæ N C, & P F, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, &c, vti fecimus in ſectione N A, oſtendetur ſimiliter (ex eadem 16. propoſitione) ſegmenta N C, P F ſimilia eſſe inter ſe. Non ſecus ſi coniungantur rectæ lineæ N B, & P E, & bifariam diuidantur, atque ducantur diametri, & reliqua perficiantur, vt prius, oſtendentur eodem modo, ſegmẽta N B, & P E ſimilia inter ſe.* g

Deinde ponamus ſegmentũ P d; quia non abſcindunt illa duæ ordinationes vnius axis (18. ex 6.), & hoc erat, &c. *Sed legendum puto vt in textu apparet. & horum verborũ ſenſus erit; fieri non poteſt, vt ſegmentũ P d ſit ſimile ipſi N A, vel N B, propterea quod in ſectione P F ſegmenta P d vni tantummodo portioni ſimile eſt (præter quàm in ellipſi). & ambo intercipi debent à duabus ordinatim applicatis ad axim E 2; & propterea ſegmenta P D, vel P E non erunt ſimilia ipſi P d, & quia N A oſtenſum eſt ſimile P D, pariterque N B oſtenſum eſt ſimile P E; igitur ſegmentum P d ſimile non eſt, neque N A, neque ſegmento N B; quod erat oſtendendum.* h

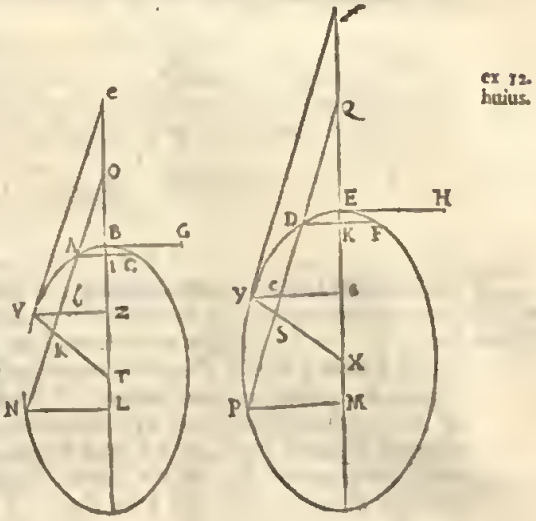
NOTE



Notæ in Propoſit. XXI.

a QVoniam G B ad B I, ſuppoſita eſt vt H E ad E K, &c. *Quia L B ad B G ex hypotheſi erat, vt M E ad E H, & inuertendo G B ad B I erat vt H E ad E K; ergo ex æqualitate L B ad B I erit vt M E ad E K; & per conuerſionem rationis B L ad L I erit vt E M ad M K.*

b Et propter ſimilitudinem duarum ſectionum N L ad A I, nempe L O ad O I eſt, vt P M ad F K, nempe M Q ad Q K, &c. *Quoniam duæ ſectiones N B, & P E ſimiles ſuppoſitæ ſunt, & axiũ abſciſſa L B, M E, nec non I B, K E ad latera recta B G, & H E proportionales ſunt; igitur N L ad A I eandem proportionem habebit, quàm P M ad D K: & quia triangula N L O, & A I O ſimilia ſunt propter parallelas N L, & I A, pariterque triangula P M Q & D K Q ſimilia ſunt; igitur L O ad O I erit vt N L ad I A; pariterque M Q ad Q K erit vt P M ad D K, ſeu vt N L ad A I: & propterea L O ad O I erit vt M Q ad Q K.*



ex 12. huius.

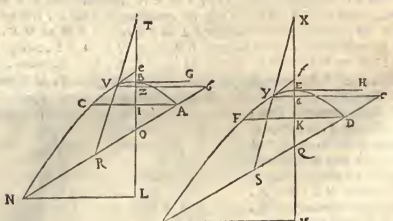
c Et ex æqualitate L O ad L B erit vt Q M ad M E, ſed L B ad L N eſt vt M E ad M P, cum ex ſuppoſitione ſectiones ſint ſimiles, &c.

Quoniam O L ad L I ostensa fuit, vt Ω M ad M K; atque prius ostensa fuit B L ad L I, vt E M ad M K; ergo inuertendo I L ad L B erit, vt K M ad M E; & propterea ex æqualitate O L ad L B erit vt Ω M ad M E; sed B L ad L N est, vt E M ad M P; ex 12. huius. *igitur ex æqualitate O L ad L N erit vt Ω M ad M P; suntque duo anguli L, & M recti; ergo triangula O L N, & Ω M P æquiangula erunt; & propterea anguli O, & Ω æquales inter se erunt; sed quia contingentes verticales V c, & T f parallelæ sunt ordinatim applicatis N A, P D ad diametros V R, & T S; igitur angulus V c B æqualis erit angulo N O L; pariterque angulus T f E æqualis erit angulo P Ω M; & propterea anguli c, & f æquales erunt inter se.*

Ergo propter similitudinem duarum sectionum T Z in Z e ad quadratum Z V eandem proportionem habebit quàm X a in a f ad quadratum a Y, & angulus e æqualis est angulo f; igitur V e T simile est Y f X, & pariter, &c. d

12. huius. *Quoniam in sectionibus similibus V B, & T E axes transuersi lateribus rectis proportionales sunt, & ductæ sunt ad axes ordinatim applicatæ*

37. lib. 1. *V Z, T a, & contingentes V c, T f, est que rectangulum T Z c ad quadratum Z V, vt latus transuersum ad rectum, pariterque rectangulum X a f ad quadratum a T, vt axis transuersus ad erectum; igitur rectangulū T Z c ad quadratum Z V eandem proportionem habet, quàm rectangulum X a f ad quadratum a T, & à verticibus V, T duorum triangulorum V c T, & T f X ductæ sunt ad bases rectæ lineæ V Z, T a efficientes angulos rectos, cum ordinatim*



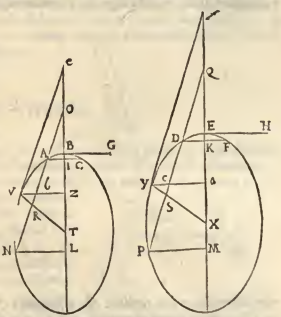
applicatæ sint ad axes; atque angulus V c Z ostensus est æqualis angulo T f a,

Propos. 6. præmiss. *igitur tertius angulus Z V c æqualis erit tertio angulo a T f; & ideo duo triangula V T c, & T X f similia erunt inter se: & propterea circa angulos æquales T, & X latus c T ad T V eandem proportionem habebit, quàm f X ad X T: cumque duæ contingentes verticales V c, T f parallelæ sint ordinatim applicatis N A, & P D ad diametros V R, T S, erit O c ad R V, vt c T ad T V; pariterque Ω f ad S Y erit, vt f X ad X T: erat autem c T ad T V, vt f X ad*

12. huius. *X T; igitur pariter O c ad R V eandem proportionem habebit, quàm Ω f ad S Y; sed B I ad I A est, vt E K ad K D.*

Sed

c Sed B T ad B I erat vt X E ad E K propter ſimilitudinem duarum ſectionum, &c. *Quoniam ex hypotheſi abſciſſa axis I B ad latus rectum B G erat vt abſciſſa K E ad latus rectum E H; & propter ſimilitudinem ſectionum latera erecta G B, & H E ad axes tranſuerſos, & ideo ad eorum ſemiſſes T B & E X eandem proportionem habebunt; ergo ex aquali I B ad B T erit vt K E ad E X, & inuertendo T B ad B I erit vt X E ad E K. Sed libet aliam expoſitionem afferre Apollonij principijs cõuenientiorẽ. Quia ex definitione 2. huius libri legitime interpretata, & ſicuti cõſtat ex 12. prop. huius. In ſectionibus ſimilibus non qualibet axium abſciſſæ ad conterminas potentiales habent eandem rationem: ſed ille tantummodo, quæ figuræ lateribus proportionales ſunt: itaq; in ſectionibus ſimilibus A B, D E vt qualibet axium, abſciſſæ B I, E K ad conterminas potentiales I A, K D ſint proportionales, neceſſe eſt, vt eadem I B, & E K lateribus figurarum B T, E X proportionales ſint.* 12. huius.

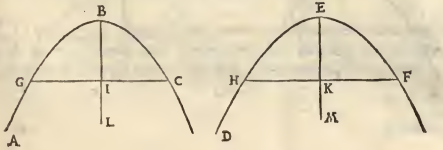


f Et quadratum V Z ad quadratum Z e eſt, vt quadratum *a* Y ad quadratum *a f*, &c. *Oſtenſa enim fuerunt duo triangula V Z c, & Y a f ſimilia inter ſe; & ideo latera circa angulos rectos Z, & a proportionalia erunt; & pariter eorum quadrata.*

g Inſuper dico non eſſe ſimilia alicui alteri ſegmento, &c. *Sicuti in præcedenti propoſitione factum eſt oſtendetur, quod ſegmentum N C non eſt ſimile alicui alio ſegmento in altera ſectione P E, quando non comprehenduntur ab ordinatim ad axes applicatis, & in ellipſibus aqualiter à centris diſtant.*

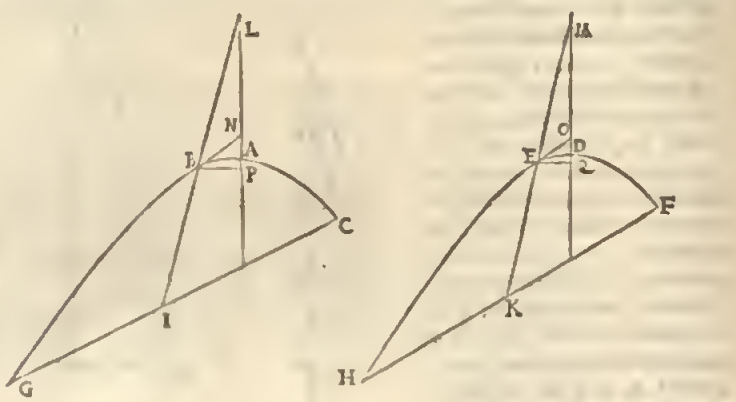
Notæ in Propoſit. XXII.

ET propterea duo ſectiones A B C, D E F ſimiles erunt, &c. *Quoniam ſegmenta G B C, & H E F poſita ſunt ſimilia, erunt diametrorum* Lem. 8. huius.



ex 11. 12. huius. *seu axium (in hoc casu) L B, & M E figura similes inter se; & ideò sectiones A B C, & D E F similes erunt.*

Itaque propter similitudinem duorum segmẽtorum simlia erunt B N L, b E O M, & pariter L B P, & M E Q atque quadratum B P ad L P in P N nempe, &c. *Huius secundæ partis demonstrationem, quàm non sinceram Paraphrastes Arabicus nobis transmisit omittere opere pretium erit, eandemq; bre-*



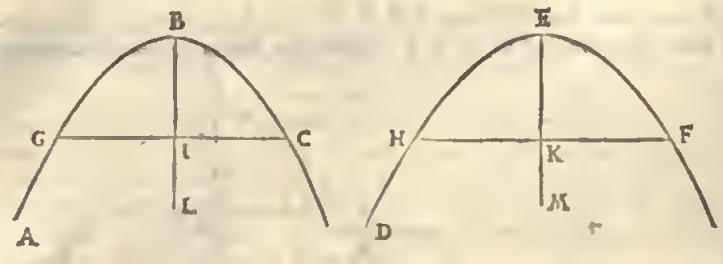
uius demonstrare hac ratione. Quia segmenta C B G, & F E H similia ponuntur; ergo erunt figuræ diametrorum B I, E K similes inter se in angulis I, K aqualibus, & sectiones ipsæ C B G, & F E H similes inter se erunt; quod est contra hypothesin.

Lem. 8. huius. Prop. 15. huius.

Notæ in Propositi. XXIII.

SI enim similia essent haberent conditiones similitudinis, quod est im- a possibile, &c. *Si enim concedantur segmenta G B C in parabola, & H E F in hyperbole, vel ellipsi, similia inter se; igitur in vnaquaque earũ duci possent ad diametros ordinatim applicata numero æquales, efficientes angulos aqua-*

Defin. 7. huius.



les

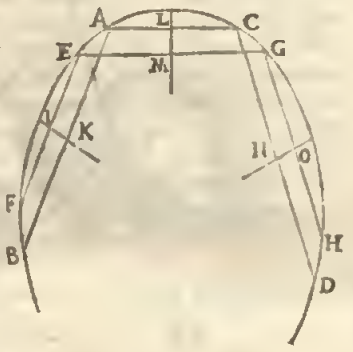
les cum diametris, qua abscissis sint proportionales, & abscissa quoque inter se. Vnde sequitur, quod portiones eiusdem diametri E K à centro M ad omnes ordinatim ad diametros applicatas sint aquales inter se, vt ostensum est in propositione 13. huius: quod est impossibile.

Quando verò sectio A C est hyperbole, ac sectio D F est ellipsis, similiter, vt in 14. propositione huius, ostendetur; quo abscissa in hyperbola, & ellipsi sint proportionales; & propterea omnes habebunt rationes maioris inaqualitatis, aut omnes habebunt, proportionet inaqualitatis minoris, quod tamen in praedicta 14. propositione impossibile esse ostenditur.

Notæ in Propositi. XXIV.

a SI enim hoc verum non est, &c. *Quod qualibet portio B A D sectionis conica A B G nullo pacto circumferentia circuli esse possit sic ostendetur.*

Quia in circulo recta linea diuidentes bifariam duas parallelas inter se sunt necessariò diametri circuli, qui perpendiculariter secant praedictas parallelas applicatas; igitur si curua linea B G D fuerit circuli peripheria recta linea K I, L M, & N O diametri circuli, erunt perpendiculares ad ordinatim applicatas aquidistantes inter se; sed quia etiam A B G supponitur sectio conica, erunt K I, L M, N O axes praedicta sectionis conicæ eo quod bifariam, & ad angulos rectos diuidunt ordinatim applicatas. Rursus quia praedicta ordinatim applicata non sunt omnes inter se parallelæ, eo quod ex constructione applicatæ A B, A C, C D non fuerunt ducta aquidistantes; igitur tres axes I K, L M, N O indirectum non coincidunt; quare in sectione conica B A G reperiri possent tres axes; quod est impossibile.



48. lib. 2.

SECTIO NONA

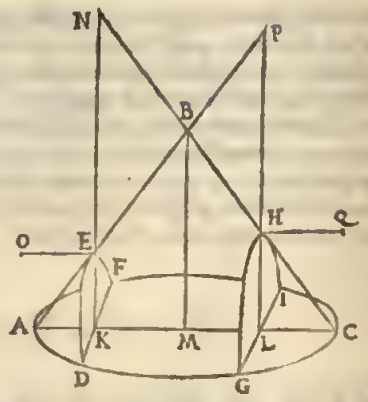
Continens Propositi. XXV.

b SI duo plana æquidistantia conum aliquem secuerint, atque in eo efficiant duas hyperbolas, aut ellipses; vtique sectiones similes inter se erunt, sed non erunt necessariò æquales.

Efficiant

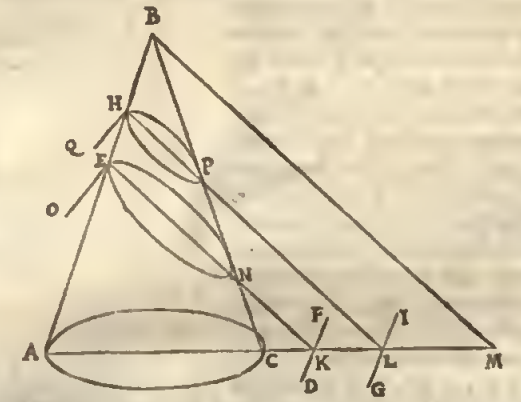
Efficiant duo plana parallela D E N F, G H P I in baſim coni A C duas rectas lineas D F, G I, & planum per axim coni ductum efficiat triangulum A B C perpendiculare ad duo illa plana parallela; quæ ab illo ſecentur in E K, H L. Erunt D F, I G perpendiculares ad A C, & educamus B M parallelam ipſis E K, H L; & vt quadratum B M ad A M in M C; ita ponatur N E ad E O, & ita P H fiat ad H Q, erunt N E, P H inclinata duarũ ſectionũ F E D, I H G, aut eorum tranſuerſæ; igitur O E, H Q erunt eorum erecta, & propterea figuræ duarum ſectionũ ſunt ſimiles; igitur duæ ſectiones ſimiles ſunt. Et ſi quidem fuerint N E, P H æquales; ipſæ quoque æquales erunt, alias non; Et hoc erat propoſitum.

b



12. 13. lib. 1.

12. huius.



2. & 10. huius.

Notæ in Propoſit. XXV.

a SI abſcindant conum aliquem duo plana parallela prouenient duæ ſectiones hyperbolicæ, vel quia duæ ſectiones ſunt ſimiles, &c. *Quæ, immutanda conſui vt in textu videre eſt.*

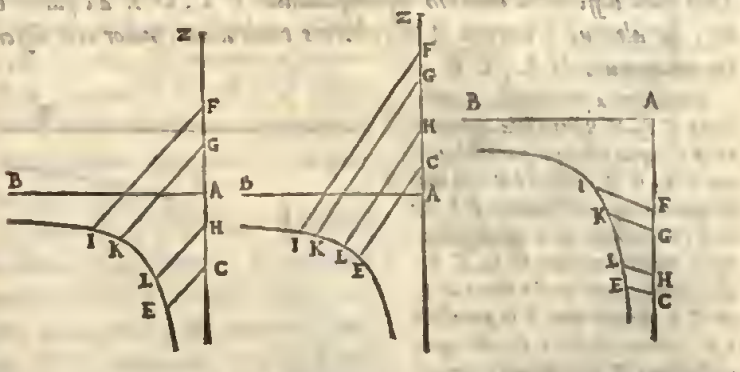
b Sint abſciſſiones duorum planorum æquidiſtantium cum baſi I G, F D, & ſecet conum planum tranſiens per eius axim, &c. *Addidi verba, quæ in textu deſiderantur, quæ expoſitionem perficiunt. Animaduertendum eſt, hanc propoſitionem conuertibilem non eſſe; licet enim plana parallela in eodem cono efficiant ſectiones ſimiles, verum non eſt, quod quotieſcunque in eodem cono duæ ſectionee*

sectiones sunt æquales, vel similes inter se, tunc quidem earum plana sunt æquidistantia: Sicuti enim in eodem cono scaleno designari possunt circuli æquales subcontrariè positi, sic etiam reliquæ conisectiones subcontrariè constituta effici possunt æquales, & similes inter se: hæc autem, sicuti etiam quamplurima videri possunt in libris neotericorum.

Sed non alienum erit à nostro instituto hic paucis considerare passiones, & descriptiones sectionum conicarum similium, vel æqualium, quæ æquidistantes, seu asymptotica vocantur. Et licet hæ ab alijs inuentæ, & traditæ sint, non nulla tamen noua in medium afferam: non enim rerum nouitas ex subiectis nouitate tantummodò arguitur, imo de subiecto antiquo possunt noua speculationes asserri, atque corrigi, & cõpleri ea, quæ apicem perfectionis non attingunt, & hæc quidem omnia noua dici poterunt, & possunt, & debent zelo veritatis euulgari, nec propterea prædecessorum nominibus, aut inuentionibus iniuria infertur.

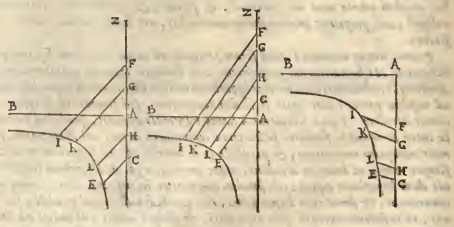
Primus itaque omnium (quod sciam) Pappus Alexandrinus libro septimo collectionum Mathematicarum propositione 208. lemmate sexto in quintum librum Apollonij, considerauit concentricas hyperbolas inter se similes, eundē axim habentes, ad easdem partes curuas inter se se non concurrere, sed semper ad se ipsas vicinius accedere. Postea Gregorius à Sancto Vincentio ostendit, quod duæ parabolæ inter se æquales, similiter positæ circa communem axim, vel diametrum, pariter nunquàm conueniunt, & parallelæ sunt inter se, & in infinitum productæ semper magis ad inuicem accedunt; atque propos. 139. de Hyperbola considerauit duas hyperbolas æquales, & similes, quæ pariter in infinitū extensæ nunquàm conueniunt, & simul cum Pappo putas, rite concludi posse, quod prædictæ sectiones, in infinitum extensa, sint asymptoti, & semper magis, ac magis ad inuicem appropinquentur ex eo, quod rectæ lineæ inter se æquidistantes inter duas sectiones intercepta, successiuè semper diminuantur. Propositiones quidem recondita, & scitu iucunda, sed an æquè certa, & indubitata censeri debeant, inquiremus, aliquibus tamen præmissis. Parab. pr. 344.

In qualibet hyperbola I E, cuius asymptoti C A B; duarum rectarum linearum F I, G K inter se æquidistantium, ab vna asymptote A C ad hyperbolen eductarum, sit F I propinquior centro, quàm G K, quando ambo cadunt infra centrum A ad partes C; vel F I magis à centro recedat, quando ambo cadunt DEFINITIO Addita.



vltra centrum in eadem asymptoti productione A Z: aut F I supra, & G K infra centrum A existat: In quolibet casu dicetur, F I vlterius tendere ad partes centri, vel asymptoti A B, quàm G K.

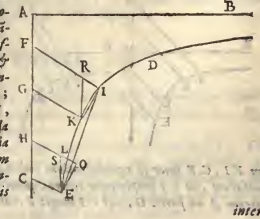
Non secus si ab eadem asymptoto A C educantur quatuor rectæ lineæ inter se æquidistantes F I, G K, H L, C E, quarum duæ priores F I, G K, centro propinquiores sint, quando omnes infra centrum A collocantur; vel magis à centro recedant, quando omnes in productione A Z existunt; aut certe duæ F I, G K supra centrum, & H L, C E infra centrum existant: Tunc similiter in quolibet casu dicentur rectæ lineæ F I, G K vlterius tendere ad partes centri, & asymptoti A B, quàm duæ aliæ H L, C E.



PROP. 2. Addit.

Si in vna asymptoto A C, hyperboles D E sumantur duo segmenta æqualia F G, H C, & à punctis diuisionum ducantur quatuor rectæ lineæ F I, G K, H L, C E parallelæ inter se, vsque ad hyperbolen: Dico quod differentia duarum æquidistantium F I, G K ad partes centri, & alterius asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit differentia reliquarum H L, C E.

Ducantur à punctis E, K rectæ lineæ E S, K R parallelæ asymptoto A C, quæ efficiant parallelogrãma C S, G R. Patet I R esse differentiam æquidistantium F I, & G K; pariterque L S esse differentiam æquidistantium H L, C E; & coniungantur rectæ lineæ E I, & K I, ducaturque E O parallela I K, secans H L in O. Et quia recta linea E I cadit intra curuam sectionem conicam E K I, & punctum K eiusdem conicæ sectionis



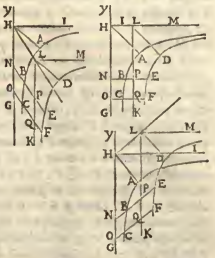
inter

inter E, & I existit; ergo recta linea I K posita intra conicũ segmentum E K I supra eius basim E I cadit; & ideo ei parallela E O cadit infra eandem segmenti conici basim E I, & propterea occurret ipsi H L intra coniectionem, & infra punctum L in sectione positum, vt in O; & ideo O S maior erit, quàm S L. Et quoniam S E, & R K sunt inter se parallelæ (quia eidem A C aequidistant) pariterque E O, & K I factæ sunt parallelæ, atque S O, & R I (ex hypothesi) aequidistantes erant; igitur duo triangula E S O, & K R I similia sunt inter se, & eorũ latera homologa E S, & K R aequalia sunt inter se (quia in parallelogrãmis C S, & G R latera E S, R K aqualia sunt oppositis C H, G F inter se aequalibus, ex hypothesi) igitur reliqua latera homologa S O, & R I aequalia sunt inter se; & propterea R I differentiæ aequidistantium F I, G K ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendentium, maior erit, quàm S L, quæ portio est ipsius S O, & est differentia aequidistantium H L, & C E alterius segmenti H C. Quod erat ostendendum.

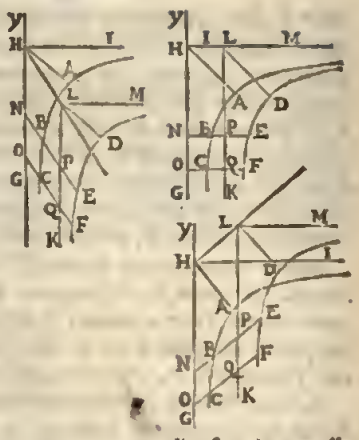
Ex constructione, & demonstratione huius propositionis colligitur, quod si à duobus punctis eiusdem asymptoti A C ad hyperbolen ducantur duæ rectæ lineæ inter se parallelæ; illa, quæ ad partes centri A, & asymptoti A B vlterius tendit, maior est reliqua. Nam recta linea K R, asymptoto A C parallela cadit extra sectionem, & ideo secat interceptam parallelam F I, quæ erit maior, quàm F R, seu G K; igitur F I ad partes centri A vlterius tendens maior est qualibet alia parallela G K ad partes oppositas tendente. Eadem ratione F I maior erit quàm H L, & H L maior, quàm C E. Vnde patet propositum. COROL LAR.

Si fuerint duæ hyperbolæ A B, & D E æquales, & similes ad easdem partes cauæ, quarum centra H, & L, & asymptoti G H I, & K L M, nec non axes A H, & D L sint parallelæ inter se, & rectæ lineæ B E, & C F ab hyperbolis interceptæ parallelæ fuerint rectæ H L centra coniungenti; erunt B E, & C F æquales ipsi H L, & inter se. PROP. 3. Addit.

Si autem parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f diuidenti angulum K L H contentum à recta linea L H centra coniungente, & interiore asymptoto L K, in qua B E, & C F positæ sunt: Dico B E vlterius tendentem ad partes reliquæ asymptoti L M maiorem esse, quàm C F.



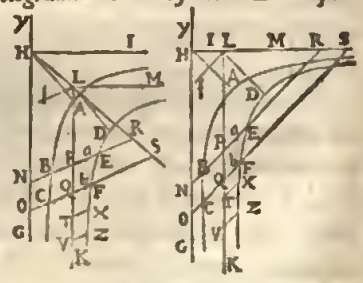
Si vero B E, & C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ H g diuidenti angulum L H G à recta linea L H centra coniungente, & eadem asymptoto H G contentum: Dico B E vlterius tendentẽ ad partes reliquæ asymptoti H I minorem esse, quàm C F.



Rectæ lineæ parallelæ B E, C F secent æquidistantes asymptotos H G, L K in punctis N, O, P, Q. Debent autem coniectiones in eodem plano collocari sicuti aliæ omnes, quæ in sequentibus propositionibus 4. 5. 6. 7. 8. & 9. usurpantur semper in uno plano positæ intelligi debent.

Et primo duæ rectæ B E, C F parallelæ sint rectæ lineæ H L centra coniungenti. Quoniam hyperbolæ A B, D E æquales sunt, & congruentes; atque æquidistantes asymptoti H N, L P æque inclinantur ad æquales semiaxes transuersos H A, & L D; & segmenta asymptotorum H N, L P æqualia sunt in parallelogrammo H P, nec non duo anguli H N B, & L P E æquales sunt inter se, propter parallelas asymptotos: igitur duæ figuræ A H N B A, & D L P E D æquales erunt, & congruentes: quapropter interpositæ rectæ lineæ N B & P E congruentes, & æquales erunt; & addita vel ablata communi B P, erit N P æqualis B E: est verò N P æqualis H L, eo quod H P parallelogrammum est; igitur intercepta B E æqualis est rectæ lineæ H L centra coniungenti. Eadem ratione qualibet alia intercepta C F parallela ipsi H L eidem æqualis ostendetur: quapropter duæ intercepta æquidistantes B E, & C F inter se æquales erunt.

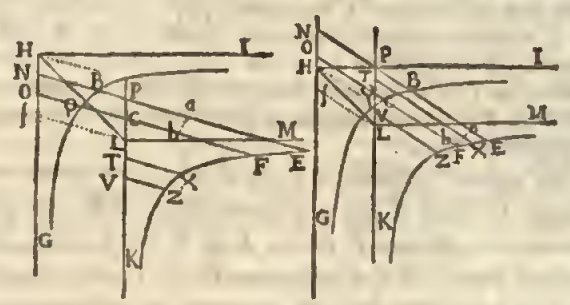
Secundo B E, C F parallelæ sint alicui rectæ lineæ L f dimidienti angulum K L H; ideoque P L f N, & Q L f O parallelogramma erunt: secetur L T æqualis H N, atque L V æqualis H O; ducanturque T X, V Z parallelæ ipsis N B, O C secantes reliquam hyperbolen in X, Z; eritque (vt in prima parte ostensum est) T X æqualis N B, atque V Z æqualis O C. Et siquidem B E, C F cadunt infra centra H, L ad partes G, K, cadent quoque infra L f eis parallelam per L ductam infra centrum H incidentem, & ideo N f, seu ei æqualis P L in parallelogrammo P f minor erit, quàm H N; estque L T æqualis H N; igitur L P minor erit, quàm L T; & propterea punctum P propinquius erit centro L, quàm T: Eadem ratione ostendetur, quod punctum Q propinquius sit centro L, quàm V, & P propinquius centro quàm Q; ergo quatuor æquidistantium P E, Q F, T X, V Z cadentium infra centrum ad partes K, duæ P E, T X vlterius ad partes centri, vel asymptoti L M tendunt, quàm duæ Q F, V Z. At si B E, C F secent rectã lineam centra coniungentem inter duo centra H, & L, manifestum est puncta P, & Q cadere supra centrum L, atque duo puncta N, & O cadere infra centrum H alterius hyperboles, eumque L T secta sit æqualis ipsi H N ad easdem partes; pariterque L V æqualis ipsi



Def. add

H O

H O cadent puncta T, & V infra centrum L; & P vlterius tendit quàm Q ad partes eiusdem centri L. igitur in tali casu quatuor aquidistantium duæ P E, T X vlterius tendent ad partes centri, & asymptoti L M, quàm duæ aliæ aquidistantes Q F, V Z. Quando verò B E, & C F cadunt vltra centra H, & L in productionibus aquidistantium asymptotorum G H, K L: quia N P cadit Def. addit.

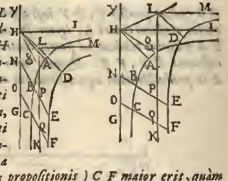


supra, & L f infra centrũ H, ergo in parallelogrammo P f recta N f, seu ei aequalis L P maior erit quàm N H: facta autem fuit L T aequalis H N; igitur L T minor est, quàm L P; Eadem ratione L V minor erit, quàm L Q, atque P vlterius tendit quàm Q ad partes centri L, & ab ijsdem punctis cadentibus supra centrum L in productione asymptoti K L ducuntur quatuor recta linea inter se aquidistantes vsque ad hyperbolen D Z; igitur duæ P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, vel asymptoti L M, quàm duæ Q F, V Z. Ibidem.

Secetur postea P a aequalis N B, atque Q b aequalis O C. Et quia T X aequalis ostensa fuit N B erit P a aequalis ipsi T X; estque P E maior quàm T X; propterea quod illa vlterius tendit ad partes cẽtri L, quàm T X; igitur P E maior erit, quàm P a, & earum differentia erit E a. Simili modo ostendetur Q b aequalis V Z, & minor quàm Q F, quarum differentia F b: cumque Q P aequalis sit ipsi N O, propterea quod sunt latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur T V, quæ ostensa fuit aequalis O N erit quoque aequalis Q P, & sũpta communiter Q T erit Q V aequalis T P, atque à terminis aequalium segmentorum eiusdem asymptoti L K ducuntur vsque ad hyperbolen E Z quatuor recta linea inter se aquidistantes, & earum bina P E, T X vlterius tendunt ad partes centri, & asymptoti L M, quàm bina Q F, V Z; igitur differentia priorum, scilicet E a maior erit posteriorum differentia F b; estque B a aequalis N P, propterea quod aequalibus N B, & P a ponitur communiter B P; pariterque O Q aequalis est C b; suntque N P, & O Q aequales inter se, nempe latera opposita eiusdem parallelogrammi; igitur B a, & C b aequales sunt inter se: ijs verò adduntur excessus inaquales E a, F b efficietur E B vlterius tendens ad partes asymptoti H I maior, quàm F C. Quod erat primum. Coroll. Propos. 2. addit. Propos. 2. addit.

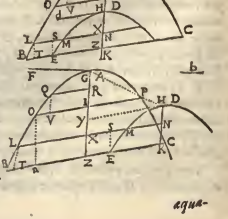
Tertio ijsdem positis N E, O F sint parallela alicui rectæ linea H g diuidẽti angulum L H G, & propterea extensa productionem asymptoti M L secabunt,

&



& parallelæ erunt alicui rectæ lineæ ex L diuidenti angulum H L M, eo quod parallelæ erãt rectæ H G diuidenti angulum L H G, & prius B E vlterius, quàm C F tendebat ad partes asymptoti H I; ergo è contra C F vlterius tendet ad partes asymptoti H G, & educũtur ab asymptoto L M producta, & parallelæ sunt rectæ lineæ ex L diuidenti angulũ H L M, contenum à rectæ linea centra coniungente, & asymptoto M L, in qua illæ cadunt; igitur (ex prima parte huius propositionis) C F maior erit, quàm B E; & è contra B E vlterius tendens ad partes asymptoti H I, minor erit, quã C F; vt propositum fuerat.

PROP. 4. Addit. *Sint duæ æquales parabolæ A B, D E ad easdem partes cauæ, quarum diametri G I, H K sint congruentes aut parallelæ inter se, nec nõ ad eas ordinatim applicatæ B Z K, L X N sint parallelæ alicui rectæ diuidenti angulum G H K à recta linea G H vertices coniungenti, & diametro H K interioris sectionis D H contentum, si diametri congruentes non fuerint. Dico quod, B E, L M portiones applicatarum à sectionibus ad easdem partes interceptæ, semper magis diminuentur, quo magis à verticibus recedunt; efficienturque minores quacumque recta linea proposita, si diametri sunt congruentes: si verò sunt parallelæ nunquam minores erunt portione ordinatæ inter diametros intercepta. At si parallelæ fuerint alicui rectæ lineæ diuidenti angulum H G I à recta G H, & diametro I G exterioris sectionis A G contentum, semper magis augentur, sed erunt semper minores ea quæ à diametris intercipitur. Vel si fuerint parallelæ diametris non congruentibus, semper magis augentur, quo magis à concursu recedunt.*



Sit F G latus rectum diametri G I in parabola G B, ordinatim applicatæ B E K, & L M N secent diametrum G I in X, Z, & diametrum H K in N, K, & secetur abscissa G I æqualis H K, & G R æqualis H N; ideoque R I æqualis erit N K, seu X Z (propterea quod in parallelogrammo N Z opposita latera æqualia sunt) ducanturque ordinatæ O I, Q R, quæ erunt æquales, & congruentes ipsis E K, M N propter æqualitatem sectionum, & abscissarũ similium diametrorum; ducanturque à punctis E, L, Q rectæ lineæ E S, L T, Q V parallelæ diametris occurrentes ipsis B E, & O I in S, T, V: manifestum est S M

ex 10. ex 21. huius.

aqua-

æqualem esse O V, ea quod in parallelogrammis Q I, & S K latera opposita sunt æqualia, & ipsa ordinata E K O I; nec non M N, Q R æquales ostensa sunt: Deinde producantur, B E, O I ad sectionem in C, P; Et quia differentia quadratorum B Z, L X, seu T Z, ideſt rectangulum B T C æquale est differentiæ rectangulorum Z G F, & X G F seu rectangulo sub abscissarum differentia X Z, & latere recto G F. Simili modo rectangulum O V P æquale erit rectangulo sub abscissarum differentia R I, & latere recto G F: suntque rectangula contenta sub X Z, G F, & sub R I, G F æqualia, propterea quod latera X Z, R I æqualia ostensa sunt, & latus rectum G F est commune; igitur rectangula B T C, & O V P æqualia sunt; ideoque vt T C ad V P, ita reciprocè erit O V ad B T. ex 11. lib. 1.

Et primò quia diametri G Z, H K coincidunt, & parabole H D comprehenditur ab A G: erit G Z maior quàm H K, seu quàm G I, & B Z maior quàm E K, & L X quàm M N. Si verò B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ lineæ H T dividenti angulum G H K; ergo T Z, seu ei æqualis H K, vel G I minor erit, quàm G Z. Eadem ratione G X maior erit, quàm G R; quare ordinatim applicata B Z maior erit, quàm O I, & Z C maior, quàm I P; pariterque L X, seu T Z maior erit, quàm Q R, seu V I; ideoque T C maior erit, quàm V P: erat autem O V ad B T reciprocè, vt T C ad V P; ergo O V, seu ei æqualis S M maior erit, quàm B T; ijs verò addantur æquales L S, T E, quæ in parallelogrammo S T sunt latera opposita, igitur L M, maior erit quàm B E.

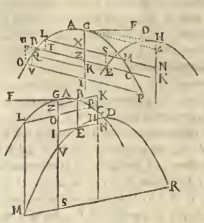
Deinde quando diametri G Z, H K sibi mutuo congruunt sit b *minor qualibet data recta linea, & à vertice H ducatur H* d *cuius quadratũ æquale sit rectangulo H G F, & fiat vt* b *ad H* d, *ita H* d *ad aliam rectam lineam æqualem C E; atq; vt H* d *ad semissem sũmæ C E, &* b *potentia, ita fiat longitudine H G ad G K, ducaturque B K C ordinatim applicata ad diametrum G I. Quoniam quadratum E K æquale est parallelogrammo H K, G F (propterea quod parabola sunt æquales, & diametri similes) & ijs adduntur inter se æqualia quadratum* d *H, & rectangulum H G F, erunt duo quadrata E K, & d H simul sumpta æqualia rectãgulo K G F, seu quadrato R Z; quare differentia quadratorũ B K, & E K, ideſt rectanguli B E C æqualis erit quadrato* d *H; & propterea* d *H media proportionalis est inter C E, B E, sed facta fuit media proportionalis inter C E, &* b; *Ergo B E æqualis est* b; *ideoque B E minor est qualibet rectæ lineæ datæ.* 11. lib. 1.

Quando verò diametri G Z, H K sunt æquidistantes, ijsdem positis ducatur O n *parallela diametris secans B E in* n. *Quia* n *Z est æqualis O I, & erat E K æqualis O I, ergo* n *Z, & E K æquales sunt, & addita, vel ablata communi Z E erit* n *E æqualis Z K; & propterea qualibet intercepta B E maior erit in secundo casu, & minor in tertio, quàm* n *E, seu Z K à diametris comprehensa.*

Tertio quando B E, L M parallelæ sunt alicui rectæ G a *dividenti angulum H G I, erit K* a, *seu ei æqualis G Z minor, quàm H K, seu quàm G I, atq; vt prius rectangula B T C, & O V P æqualia erunt, & eorum latera reciprocè proportionalia, essque S M æqualis minori O V, ergo S M minor erit quàm B T; & additis æqualibus L S, & T E, erit L M minor quàm B E.*

Tandem sint intercepta B E, L M parallelæ G V, H C portionibus interceptarum diametrorum non congruentium, & à terminis B, E, L, M, ducantur ad diametros ordinatim applicata, eas secantes in Z, K, I, N, O, S, & sectiones in P, & R; & cadat B E inter duas diametros. Quoniam punctum

B cadit

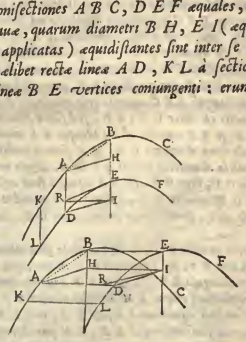


B cadit inter verticem G, & punctum C eiusdem parabolæ G C; igitur Z B K ordinatim applicata ad diametrum G I necessario secabit diametrum G I intra sectionem in Z, & productæ occurret K N extra eandem in K. Non secus ostendetur, quod E N I ordinatim applicatæ ad diametrum H N, punctum N cadit intra, & I extra eandem sectionem H E, & propterea recta C H minor erit, quàm K N, seu B E ei æqualis in parallelogrammo E K; pariterque Z I, seu ei æqualis B E minor erit, quàm G V. Cadat postea L M extra duas diametros ad easdem partes. Quoniam in parallelogrammo L S latera L O, M S æqualia sunt; estque S R maior quàm M S, seu quàm O L; ergo (vt in prima parte huius propositionis ostensum est) rectangulum M S R, seu rectangulum sub S V,

11. lib. 1. *& latere recto G F maius erit quadrato L O, seu rectangulo O G F, & propterea S V maior erit, quàm O G, & addita communi O V; erit O S, seu ei æqualis L M, in parallellogrammo L S, maior quàm G V. Quod erat ostendendum.*

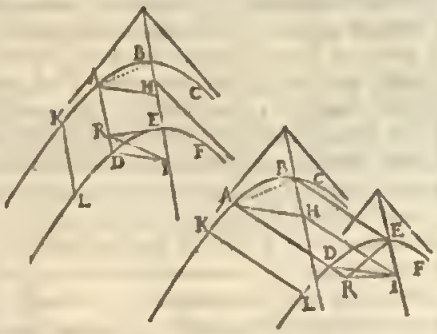
SCHOLIVM. *Idem omnino verificari in ellipsibus demonstrari facile posset, quod breuitati studens libens omitto.*

PROP. 5. Addit. *Si fuerint duæ quælibet coniectiones A B C, D E F æquales, & similes ad easdemque partes cauæ, quarum diametri B H, E I (æquè inclinatæ ad ordinatim ad eas applicatas) æquidistantes sint inter se, vel congruentes; & ducantur quælibet rectæ lineæ A D, K L à sectionibus interceptæ, parallelæ rectæ lineæ B E vertices coniungenti: erunt illæ æquales inter se.*



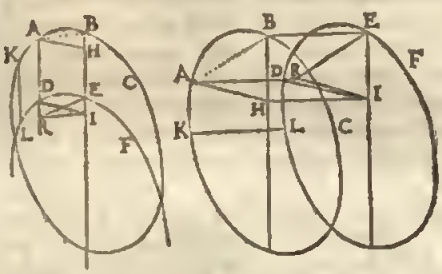
Si enim hoc verum non est, sit A D si fieri potest maior, aut minor, quàm B E, & secetur A R æqualis B E: patet punctum R cadere intra, aut extra sectionem D E (sed in eius plano cum sectiones in eodem plano existant) iunganturque rectæ lineæ A B, E R, quæ æquales erunt, & parallelæ inter se, cum sint coniungentes æqualium, & æquidistantium B E, & A R. Postea ducatur A H ordinatim applicata ad diametrum B H efficiens abscissam H B; secetursque abscissa E I in altera sectione æqualis B H; iunganturque H I, I D, & I R. Et quoniam B H, E I

E I sunt æquales, & parallelæ; ergo H I æqualis erit, & parallela ipsi B E (vel quia additur communis H E, vel propter parallelogrammum B I) sed prius A R æqualis erat, & parallela eidem B E; igitur A R, & H I æquales sunt inter se, & æquidistantes; ideoque coniungentes A H, R I erunt æquales, & parallelæ; suntque anguli A H B, & R I E æquales inter se, cum ab æqualibus lateribus in triangulis A B H, & R E I æquilateris inter se contineantur; ergo R I ordinatim quoque applicata est ad diametrum E I; atque in sectionibus æqualibus abscisa B H, E I diametrorum similium, scilicet æque inclinatarum ad suas ordinatas æquales sunt inter se; nec non ordinatæ A H, I R æquales sunt ostensa; igitur sicut punctum A in sectione A B cadit, ita punctum R in sectione E D existit; sed positus fuit intra, aut extra ipsam, quod est absurdū: Non igitur recta linea A D maior, aut minor esse potest, quàm B E; ideoque ei



ex 10. huius.

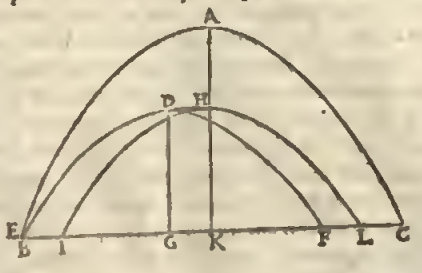
qualibet alia intercepta K L æqualis omnino erit. Simili ratiocinio ostendetur æquidistans ipsi B E eidem æqualis; quapropter intercepta A D, K L, & B E æquales erunt inter se: Quod erat ostendendum.



SCHOLIVM.

Si duæ parabolæ B A C, F D E æquales ad easdem partes cauæ, constitutæ fuerint circa axes A K, D G æquidistantes, & non congruentes se mutuo secabunt.

Ex vertice D axis G D ducatur D H perpendicularis ad axim A K, eum secans in H, & describatur alia parabola I H L æqualis prioribus B A, vel E D, cuius axis sit K H, & vertex H, & sicuti in propositione 4. additarum factum est, reperiatur B F C ordinatim ad axes applicata secans parabolas in E, B, I, & axes in G, K, ita vt intercepta B I æqualis sit D H, seu G K, quæ in parallelogrammo D K ei æqualis est. Quoniã parabola E D, & I H æqua-



ex prop. 1. huius. *les ſunt, & axium abſciſſa D G, H K æquales cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D K; ergo ordinatim ad axes applicata E G, & I K æquales ſunt, & ablata communi I G, erit E I æqualis G K, ſeu D H; erat autem intercepta B I æqualis eidem D H; igitur B I erit æqualis E I; & propterea punctum E*

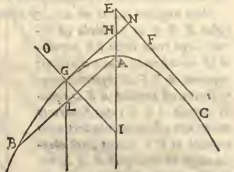
Maurol. 27. lib. 5. Conic. *parabolæ E D F cadet ſuper punctum B parabolæ B A C; ergo duæ parabolæ B A C, & E D F conueniunt in vno puncto, & in eo ſe mutuo tangere non poſſunt; igitur ſe mutuo ſecant. Quare patet propoſitum.*

His demonſtratis manifeſtè percipitur, quod ex ſucceſſiua diminutione rectarũ æquidiſtantium, inter coniſectiones interceptarum, deduci non poteſt, coniſectiones magis ad ſe ipſas propius accedere; propterea quod in ijſdem ſectionibus aſymptoticis duci poſſunt intercepta recta linea inter ſe æquidiſtantes, quæ ſint omnes æquales inter ſe, nimirum illæ, quæ parallelæ ſunt alicui communi diametro, vel rectæ lineæ vertices earum contingenti, vt in propoſitione 5. additarũ oſtenſum eſt. Similiter alia intercepta recta linea, inter ſe æquidiſtantes ſucceſſiuè augentur aliæ verò ſucceſſiuè diminuuntur verſus eaſdem partes, vt in propoſitione 3. & 4. addit. oſtenſum eſt. Et hoc nedũ verificatur in ſectionibus non congruentibus, & aſymptoticis, ſed etiã in duabus æqualibus, & inter ſe ſimilibus ſectionibus ſe mutuo ſecantibus, dummodo earum axes paralleli ſint, in ijs enim intercepta recta linea inter ſe æquidiſtantes, tendentes ad eaſdem partes, etiam illæ, quæ proprius ad punctum occurſus ſectionum conicarum accedunt, poſſunt diminui, pariterque inter ſe æquales eſſe, & quod mirum eſt poſſunt ſemper magis augeri. Si igitur æquidiſtantes intercepta ſunt menſura diſtantiarũ duarum ſectionum, eædem coniſectiones cenſeri debent modo parallelæ, & æqualibus interuallis inter ſe diſtantes, modo ad eaſdem partes ſtringi, & coanguſtari, & ſimul dilatari magis, ac magis, quod omnino videtur abſurdum. Non igitur ex eo quod omnes intercepta recta linea inter ſe æquidiſtantes ſunt æquales inter ſe; propterea ſectiones ipſa erunt parallelæ, & aſymptoticæ, & ſemper æquali interuallo ad inuicem ſeparatæ; neque ex eo quod prædictæ parallelæ magis augẽtur, vel diminuuntur interualla augeri, vel ſtringi cenſendum eſt.

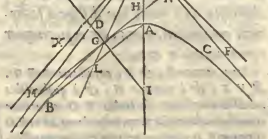
Et præcipuè præſtantiſſimus Gregorius à Sancto Vincentio neſcio an iure demonſtrationem propoſitionis 14. libri 2. ipſiuſmet Apollonij inſufficientem reputauerit, propterea quod Apollonius deduxit rectas lineas hyperbolen comprehendẽtes, quæ aſymptoti vocantur ſemper magis, ac magis ſectioni viciniores fieri ex eo quod rectæ lineæ inter ſe æquidiſtãtes, intercepta inter rectas aſymptotos vocatas, & hyperbolen contentam ſucceſſiuè ſemper magis, ac magis diminuantur; & è contra aſſeruit cum Cardano, & quodam Rabino Moſe diſtantiam hyperbolæ à rectis aſymptotis ſumi debere, non à quibuſcunque rectis lineis interceptis inter ſe parallelis, ſed tantummodo à rectis lineis perpendicularibus ad aſymptotos, quæ ſolummodo, inquiunt ipſi, diſtantias determinant; at reuera hæc animaduerſio non videtur neceſſaria: perinde enim eſt conſiderare rectas lineas ab hyperbole ad vnam rectam lineam continentium ductas, quæ efficiat cum illa angulos æquales, ac ſi perpendiculares eſſent ad eandem: at quando rectæ lineæ interceptæ ſunt inter ſe æquidiſtantes, tunc omnes efficiunt ſuper rectam lineam continentem hyperbolen angulos æquales ad eaſdem partes; & propterea (ex inæqualitate prædictarum æquidiſtantium) optimè concluditur cum Apollonio inæqualitas perpendicularium, ſeu diſtantiarum. Quando verò conſiderantur duæ lineæ curuæ veluti ſunt duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ, vel ellipſes, tunc quidem

dem nulla ratione rectæ lineæ inter se aquidistantes, inter curuas interceptæ determinare possunt prædictarum curuarum distantias; quandoquidem inæqualiter semper inclinantur ad quamlibet prædictarum curuarum, & rectæ lineæ interceptæ, quæ sunt perpendiculares ad vnam ipsarum, non erunt inter se aquidistantes. Et quia, vt dictum est, prædictæ perpendiculares sunt distantiarum legitimæ mensuræ, nunquàm concludi potest certo, quod prædictæ sectiones sint aquidistantes. vel sibi ipsis succedunt viciniores fiant, nisi considerentur rectæ lineæ interceptæ ad vnam sectionum perpendiculares: quod quidem hucusque quod sciam factum non est, neque forsan huiusmodi speculatio inuentu facilis erit, aut iniucunda.

In parabola, vel hyperbola A B C ad eius axim E A I ducere rectum breuissimum aequidistantem alicui rectæ lineæ E F, quæ oportet, vt efficiat cum axi ad partes sectionis angulum A E F acutum, sed in hyperbola sit minor semisse vnius recti, & angulus F E X ab vna asymptoto, & recta linea E F contentus sit acutus. PROP. 6. Addit.



Fiat angulus A E D æqualis angulo A E F, & ex vertice A ducatur recta linea A B efficiens angulum I A B, qui simul cum angulo A E F vnum rectum angulũ compleat; sed in hyperbola, quia vterq; angulus X E A, & A E F deficit à semirecto erũt ambo minores summa præcedentium, scilicet vno angulo recto: ergo ablato cõmuni angulo A E F, erit angulus I A B maior angulo A E X. Postea, quia tam A E F, quàm A E D minor est semisse vnius anguli recti, & A E F cum angulo I A B vnum rectum angulum complent; ergo angulus I A B maior erit angulo D E A: & propterea recta linea A B producta necessario secabit vtramque rectam lineam E D, & E X asymptotum extra sectionem cadentem ad partes D, X; ideoque A B hyperbolen secabit in aliquo alio puncto B. In parabola verò, quia rectæ linea A B axim secat in vertice A non ad angulos rectos (cum anguli I A B, & A E F rectum compleant) ergo A B sectioni occurrit in duobus punctis. Secetur iam A B bifariam in L, & per L ducatur diameter sectionis L G sectioni occurrens in G, & per G ducatur contingens G H, seu parallela A B secans axim in H, & per G ducatur I G O perpendicularis ad G H. Dico I G problema efficere. Quoniam pro-

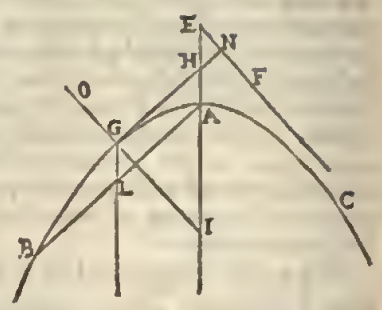


17. 27. lib. 1.

35. 36. lib. 1. 5. lib. 2.

pter parallelas G H, B A, eſt angulus G H A, ſeu E H N æqualis angulo B A I; ſed anguli B A I, & A E F vnicum rectum complent; ergo duo anguli N H E, & N E H ſimul ſumpti vni recto æquales ſunt, & propterea in triangulo E N H reliquus angulus N rectus erit: erat quoque angulus

31. lib. 5. *I G H rectus; igitur I G (qui eſt ramus breuiſſimus cum ſit perpendicularis ad tangentem G H) eſt æquidiſtans recta linea E F; quod erat propoſitum.*

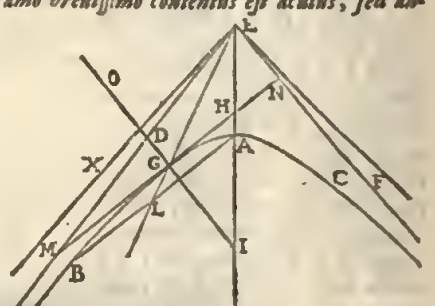


SCHOLIVM. *Facile deducitur, quod ſi angulus A E F fuerit rectus in parabola, & non fuerit ſemirecto minor in hyperbole facta eadem conſtructione quilibet ramus breuiſſimus I G æquidiſtans erit rectæ lineæ diuidenti angulũ A E F.*

Nam angulus A I G ab axi, & ramo breuiſſimo contentus eſt acutus, ſed an-

13.14.15. lib. 5. *gulus F E A in parabola eſt rectus; ergo recta linea I G parallela eſt alicui rectæ lineæ diuidenti angulum A E F, in hyperbola verò factus eſt angulus A E D æqualis angulo A E F, qui ſemirecto minor non eſt; propterea erit totus angulus D E F rectus, aut obtuſus; ergo in triangulo E M N externus angulus F N M maior interno, & oppoſito angulo E recto,*

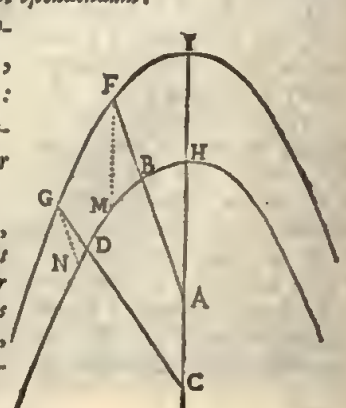
31. lib. 5. *vel obtuſo, erit quoque obtuſus, & angulus I G N rectus eſt; igitur I G, F N ſe vicißim ſecabunt vltra punctum E, & ideo I G parallela erit rectæ lineæ diuidenti angulum A E F. Quod erat oſtendendum.*



PROP. 7. Addit. *Sint duæ parabolæ, vel duæ hyperbolæ æquales, & ſimiliter poſitæ H B D, & I F G circa communem axim A H I: intercepta axis portio erit diſtantia ſectionum omnium maxima, & ei propinquior remotiore maior erit.*

Sint centra E, & K, aſymptoti P E O, Q K R, & à vertice H, & à quibuslibet

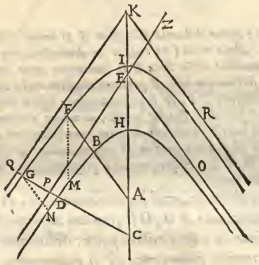
8.9.10.30. lib. 3. *punctis interiores ſectionis B D eleuentur lineæ breuiſſimæ, ſeu perpendiculares ad rectas curuam B D contingentes in eiſdem punctis, quæ ſint H A, B A, & D C, quæ ſecent reliquam ſectionem in punctis I, F, & G.*



Manifeſ-

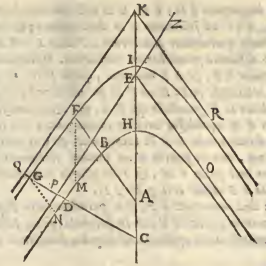
Manifestum est interceptas I H, F B, G D esse minimas linearum rectarum, quæ à punctis I, F, G ad sectionem B D duci possunt; & ideo eadem intercepta erunt distantia quorunlibet punctorum sectionis I F G à sectione B D: & propterea erunt distantiæ prædictarum curuarum. Ostendendum modo est H I maiorem esse, quàm B F, & B F maiorem, quàm D G, & sic semper. Ducatur à puncto F intercepta recta linea F M parallela axi I H, atque à puncto G ducatur recta linea G N parallela ipsi F B, quæ occurrant sectioni B D in M, N. Et quoniam F M æquidistat vertices coniungenti I H, erit intercepta F M æqualis I H, sed cum ramus B A sit breuissimus, & eius portio F B erit quoque breuissima omnium, quæ ex puncto F ad eandem sectionem B H duci possunt; quare B F minor erit quàm F M, & F M ostensa fuit æqualis I H; igitur distantia intercepta F B minor erit quàm I H. 38. lib. 5. 5. addit. huius. 38. lib. 5.

Secundo quia duæ intercepta B F, N G parallelæ inter se productæ occurrunt axi intra sectiones ad partes A C, & in parabola, quàm secabunt in binis punctis, erunt saltem ordinatim applicatæ ad aliquam diametrum: in hyperbolis verò 27. lib. 1.



parallelæ erunt rectæ lineæ diuidenti angulum P E K à recta linea E K centra coniungente, & E P interiore asymptoto contentum; propterea tam in parabolis, quàm in hyperbolis intercepta B F, quæ vlterius tendit ad partes reliquæ asymptoti E O maior erit intercepta N G; sed quis G D est linea breuissima omnium, quæ ad sectionem H D duci possunt, cum sit portio breuissimæ D C, quæ perpendicularis est ad rectam contingentem in D, igitur G D minor erit, quàm G N; estque G N ostensa minor, quàm F B; ergo G D minor erit, quàm F B. 3. & 4. addit. 38. lib. 5.

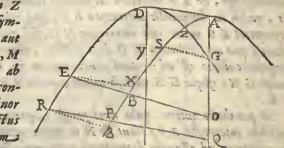
In parabolis autem, quia duci potest aliqua recta linea, vt N G parallela cuilibet intercepta B F; itaut sit N G minor quacunque recta linea data (quando nimirum ad aliquam diametrum ordinatim sunt applicatæ, scilicet, quando vna ipsarum, puta B F occurrat axi intra sectiones; quod quidem necessario euenict, quando B A est ramus breuissimus) estque ramus breuissimus D G minor Prop. 4. addit. 27. lib. 1.



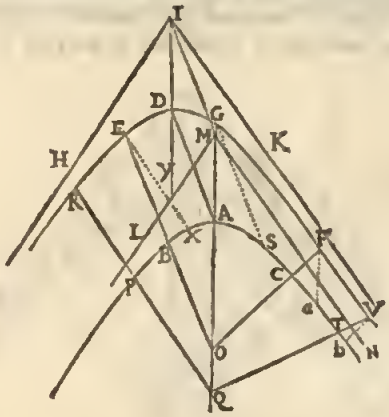
nor eadem G N ; igitur distantia sectionum G D minor erit quacunque rectâ linea proposita. Quia verò (vt constat ex demonstratione casus 2. propos. 3. addit. huius) qualibet recta linea G D intercepta inter hyperbolas conueniens cum axi intra sectiones maior est portione eiusdem rectæ lineæ C D G inter æquidistantes asymptotos E P, & K Q intercepta ; igitur interuallum inter duas hyperbolas , licet successiuè semper magis , ac magis diminuatur , nunquàm tamen minor effici poterit interuallo duarum æquidistantium hyperbolas continentium E P , & K Q ; Quod quidem est perpendiculare ad vtramque rectam continentem E P , & K Q ; estque prædicta perpendicularis minima omnium interceptarum inter eas.

PROP. 8. Addit. *Duarum parabolarum , vel hyperbolarum A B , D E æqualium , & similium , quarum axes A O , D T , nec non asymptoti H I K , L M N sint parallelæ inter se , & similiter positæ : Sectionum distantia maxima parallela erit vertices coniungenti , & ei propinquiores ex vtraq; parte maiores sunt remotioribus vsq; ad concursum : si verò distantiam maximam non habent semper augentur quo magis à concursu recedunt.*

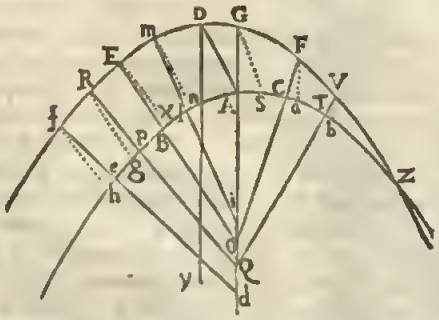
Cadat concursus sectionum Z inter axes A G , & D T , & asymptoti I K , M N coincidant , aut sibi sint viciniores , quàm I H , M L. Et primo angulus T D A ab axe T D , & D A vertices coniungente contentus semirecto minor non sit in hyperbola , sitque rectus in parabola , & vltra concursum Z , ad partes axis D T , & asymptotorum magis distitorum H I , L M : sumantur in comprehensa sectione A B qualibet puncta , B , P , à quibus ad axim



ad axim ducantur rami breuiſſimi O B, Q P prater axim A O, & ſecent externam curuam in G, E, R, & occurſui Z, vel communi aſymptoto I M N, 8. 9. & 10. lib. 5.

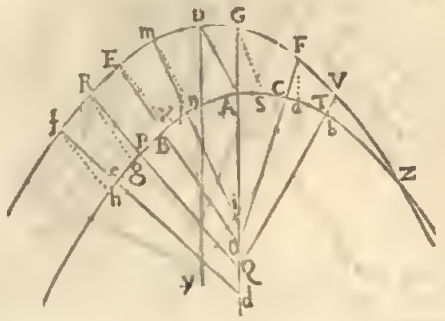


aut vicinioribus aſymptotis I K, M N ſit A G propinquior, quàm E B, & E B propinquior, quàm R P: Oſtendendum eſt curuarum diſtantiam A G minorem eſſe, quàm B E, & B E, quàm P R. Ducantur intercepta G S parallela E B, & E X parallela R P. Et quia in parabola angulus T D A rectus ſupponitur, & in hyperbola non eſt minor ſemirecto, ergo quilibet ramus breuiſſimus E B, vel R P æquidiſtans erit recta linea diuidenti angulum A D T in parabola, & angulum M I H in hyperbola; ſed duarum parallelarum E B, G S, vel R P, E X eſt G S vertici propinquior, vel vlterius tendit ad partes aſymptoti I K, quàm E B; ergo G S minor eſt, quàm E B; eſtque G A minor, quàm G S, quia illa eſt portio, vel productio lineæ breuiſſimæ O A; igitur G A adhuc minor erit SCHOLIVM. Prop. 6. addit. Prop. 34. addit. 7. & 38. lib. 5.



quàm E B. Eadem ratione E B minor oſtendetur, quàm R P. Poſtea ſi occurſus Z cadit extra duos axes, inter axim A G, & occurſum aut ad partes aſymptotorum

Prætorum coincidentium, vel propinquiorum, ad oppositas partes extra axim G A, sumantur duo puncta C, T, & ab eis ducantur ad axim rami breuissimi O C, Q T secantes externam sectionem in F, V, & ab occursu, vel communi asymptoto, vel ab asymptotis vicinioribus I K, M N magis recedat A G, quàm C F, & C F, quàm T V; Dico G A maiorem esse, quam C F, & C F maiorem, quàm T V. Ducantur intercepta F a parallela G A, & V b parallela C F.

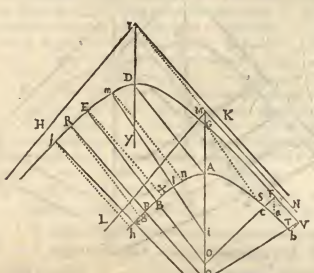


Postr. pars pr. 4 add. huius. Pars 3. prop. 3. addit. huius. 38. lib. 5. *Et quia in parabola F a propinquior est occursui sectionum, & parallela est diametro G A; at in hyperbola F a parallela est axi G A, vel D T diuidenti angulum M I H, & F a vlterius tendit ad partes asymptoti I K, quàm G A; ergo F a minor est, quàm G A: estque C F productio rami breuissimi minor quàm F a; ergo A G maior erit, quàm C F. Eodem ratiocinio ostendetur C F maior, quàm T V,*

Propos. 6. addit. huius. 8. 9. & 10. lib. 5. Propos. 5. addit. huius. 38. lib. 5. 38. lib. 5. *Secunda angulus T D A sit acutus in parabolis, at in hyperbolis minor semirecto, & M I H ab asymptoto I H, & recta linea centra coniungente contentus sit acutus: Manifestum est duci posse ramum breuissimum, vt O B ad sectionem interiorem A B, qui parallelus sit rectæ lineæ D A vertices coniungenti, vel I M centra coniungenti; & ex vtraque parte ipsius rami O B prater axim A G ducantur quilibet breuissimi rami Q P, d e, i l, O C, qui secent externam peripheriam in R, f, m, F. Ostendendum modò est in eisdem coniectionibus E B esse distantiam omnium maximam, & R P propinquiorem maximæ maiorem esse remotiore f e; pariterque m l maiorem esse quàm G A. Ducantur intercepta R g, m n parallela E B, & f h parallela R P, nec non G S parallele m l, & F a parallela G a. Quoniam intercepta R g, m n parallela sunt eidem E B, & recta linea D A vertices coniungens, vel I M centra coniungens parallela facta fuit eidem E B; ergo E B, R g, m n erunt omnes inter se æquales; estque R P minor, quam R g; pariterque m l minor, quàm m n, quia illa sunt productiones breuissimorum ramorum Q P, & i l; igitur quælibet distantia R P, vel l m ex vtraque parte ipsius E B sumpta minor est, quàm E B; ideoque E B erit omnium maxima. Deinde quia O B parallela est A D, vel M I, & rami breuissimi O B, Q P se secant vltra axim A O; ergo recta linea R P Q producta secabit quoque reliquam parallelarum D A, vel*

I M

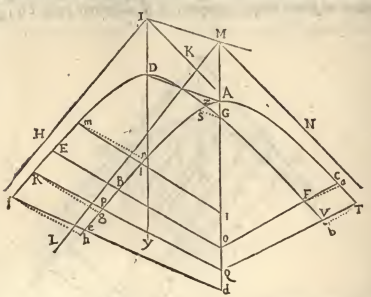
IM ad partes O A M; ideoque intercepta R P, f h parallelæ erunt alicui rectæ lineæ diuidenti angulum D A O ab axe interioris parabolæ, & vertices coniungente contentum, vel angulum I M L ab asymptoto interioris hyperbolæ, & centra coniungente contentum; igitur R P propinquior verticibus, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N maior erit quàm f h; eſtque f h 3.4. addit.



maior f c quæ eſt productio rami breuiſſimi; ergo diſtãtia R P propinquior maximæ E B maior erit, quàm f c. E contra quia breuiſſimus ramus i l m cadit inter duas parallelas E B, & D A, & ſecat ramũ breuiſſimum E B ad partes O i; ergo l m occurrit A D, vel M I ad partes D, vel I; ideoque intercepta m l, & ei parallela G S erunt æquidiſtantes alicui rectæ lineæ diuidenti angulum I D A, in parabolis, vel H I M in hyperbolis: & propterea G S propinquior vertici parabolæ, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti M N minor erit, quàm m l; eſtque G A productio rami breuiſſimi minor quàm G S; ergo m l maior erit, quàm G A; & ſic vlterius G A maior erit G F, quando occurſus Z ſectionum cadit vltra interceptam F C ad partes T V; vt in prima parte oſtenſum eſt. 38. lib. 5. 28. lib. 5. 3.4. addit. 38. lib. 5.

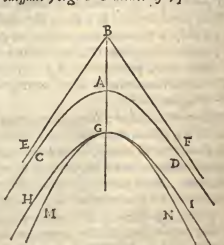
Iiſdem manentibus: dico poſtea, quod vltra diſtantiam maximam E B ad partes R P, diſtantiæ, licet ſemper diminuantur non efficiuntur minores interuallo diametrorum æquidiſtantium D T, A O in parabolis, vel interuallo asymptotorum collateralium I H, M L in hyperbolis, vt facile deducitur ex 3. & 4. additarum. At ad partes asymptotorum congruentium hyperbolæ ad ſe ipſas propius accedunt, interuallo minori quolibet dato: Nam in locum ab hyperbole B A C, & asymptoto M N contentum extenditur altera hyperbole E D F; ſed diſtantia hyperbolæ E A C ab asymptoto M N efficitur minor qualibet data; igitur diſtantia hyperbolæ D G F comprehenſæ ab hyperbole intercipiente minor erit qualibet data diſtantia.

Tandem ijsdem positis ducantur ex altera parte concursus Z rami breuissimi O C, Q T, qui efficiant distantias F C, T V. Dico F C propinquiorem concursui Z minorem esse, quàm T V. Quoniam angulus T D A, vel T I M sup-



ponitur acutus; suntque I D T, M A O inter se, parallelæ; ergo angulus D A O, vel I M O, & multo magis I M N erit obtusus; sed quilibet ramus breuissimus
13. 14. lib. 5. *Q V T parallelus F a efficit cum axi A O angulu acutũ; igitur ramus breuissimus Q T, & ei parallelus F a sunt æquidistantes alicui rectæ lineæ diuidenti angu-*
Propos. 3. & 4. add. *lum D A O, vel I M N; idcoque F a propinquior concursui, vel vlterius tendens ad partes reliquæ asymptoti I H minor est, quàm T V; estque F C minor*
12. lib. 5. *quàm F a (quia illa est portio rami breuissimi) ergo F C minor est, quàm T V. Quod erat propositum.*

PROP. 9. Addit. *In duabus hyperbolis C A D, H G I similibus, concentricis, & similiter positis circa communem axim B A G, ideſt consistant circa cõmunes asymptotos E B F: Dico sectionum C A D, H G I interualla sẽper minui, quo magis ab axis vertice recedunt; atque effici posse minora interuallo quolibet dato.*



12. huius. & ex 53. æqualis, similis, & similiter posita lib. 1. *Describatur hyperbole M G N*

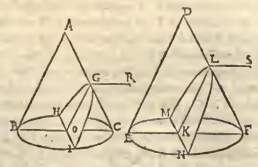
ipsi

ipsi C A D circa communem axim A G. Et quoniam hyperbolæ H G I semiaxis transuersus B G maior est transuerso semiaxe B A, hyperboles C A D, pariterque latus rectum illius maius erit huius latere recto (cum latera figurarum sint proportionalia in hyperbolis similibus:) igitur hyperbole H G I maior est hyperbola M G N (quod ab alijs ostensum est), & consistunt circa communē axim A G, & vertex G est communis; igitur hyperbole H G I comprehendit hyperbolen M G N; & ideo hyperbole H G I cadit inter duas hyperbolas G M, & A C: & propterea hyperbole G H multo magis successiuè vicinior efficitur hyperbolæ A C, quàm hyperbole G M; sed duæ hyperbolæ æquales, & similiter positæ A C, & G M semper magis, ac magis ad inuicem approximantur, igitur multo magis hyperbole concentricæ A C, & G H semper magis, ac magis ad se se ipsas appropinquantur, & inter se non conuenient vt Pappus demonstrauit. Tandem, quoniã lineæ breuissimæ, quæ perpendicularis est ad tangentem hyperbolem G H portio ab asymptoto E B, & sectione H G comprehensa effici potest minor quacunque recta linea proposita; cadit verò hyperbole A C inter sectionem G H, & continentem B E; igitur multo magis distantia inter hyperbolas G H, & A C minor erit quacunque recta linea proposita. Quod erat ostendendum.

12. huius. Propos. 7. addit. lib. 7. prop. 208. 29. 30. lib. 5. Propos. 4. lib. 2.

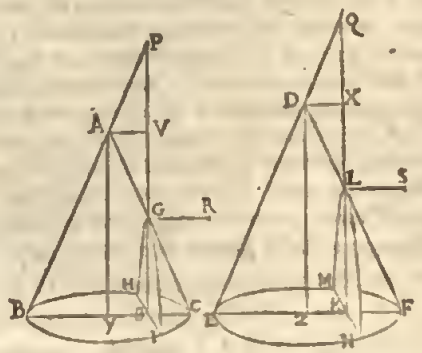
Si in duobus conis ducta fuerint duo triangula per axes A B C, D E F similia, & similiter posita, atq; sectionum I G H, & N L M diametri G O, L K æque ad bases inclinatæ intercipiant cũ triangulorum lateribus A B, D E eisdem G O, L K parallelis, portiones O B, K E æquales; vel cum axibus conorum A Y, D Z diametris æquidistantibus intercipiant portiones O Y, K Z æquales, & efficiant angulos A Y C, D Z F æquales: erunt conicæ sectiones inter se æquales, & in qualibet earum duplum intercepta poterit figuram sectionis.

PROP. 10. Add.



Primò in parabolis, quia triangula A B C, D E F sunt similia, erit B C ad C A vt E F ad F D, & G O, L K sunt parallelæ homologis A B, D E; ergo O C ad C G, & B O ad G A eandem proportionem habebunt, quàm B C ad C A, seu eandem, quàm habet E F ad F D; estque E K ad L D vt E F ad F D; ergo B O ad G A est vt E K ad L D; sumptæque B O, E K æquales;

igitur G A aqualis est L D : & quia in triangulis similibus rectangulum B A
11. lib. 1. *C ad quadratum B C, seu A G ad latus rectum G R eandem proportionem habet; quàm rectangulum E D F ad quadratum E F, seu quàm D L habet ad latus rectum L S ; igitur A G ad G R erit vt D L ad L S ; suntq; A G , D L ostensa aquales ergo G R, & L S latera recta aqualia sunt, & diametri sectionum efficiunt angulos G O H , L K M aquales ; ergo parabolæ H G I, & M L N*
Prop 10. huius. *aquales sunt inter se .*



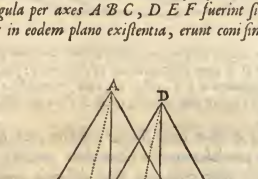
In hyperbolis verò , quoniam P G parallela est axi A Y , & A V parallela est basi B C, & latera P B, & A C sunt communia; igitur P V ad V A est vt A Y ad Y B , & G V ad V A est vt Y A ad Y C : habet verò eadem A Y ad aqualem Y B , Y C eandem rationem ergò P V , & G V ad eandem V A habent eandem proportionem , & ideo P V aqualis est V G , atq; punctum V erit centrum sectionis , & quadratum A Y aquale erit quadrato V O (propter parallelogrammum V Y), & quadratum V O aquale est rectangulo P O G cum quadrato V G ; pariterque quadratum C Y aquale est rectangulo C O B cum quadrato O Y, & habet quadratum A Y ad quadratum C Y eandem proportionem,
21. lib. 1. *quàm latus transuersum P G ad latus rectum G R , seu eandem , quàm habet rectangulum P O G ad rectangulum C O B , ergo diuidendo quadratum V G ad quadratũ O Y eandem proportionem habebit , quàm quadratum A Y ad quadratũ Y C , seu vt P G ad G R , seu vt quadratum P G ad rectangulum P G R , & ideo quadratum duplæ V G , seu P G eandem proportionem habebit ad rectangulum P G R , atq; ad quadratum duplæ ipsius Y O ; quare quadratum duplæ ipsius O Y aquale erit figuræ sectionis seu rectangulo P G R . Eodem modo ostendetur X centrum hyperbolæ M L N, & quadratum L Q ad quadratum duplæ K Z esse vt quadratum D Z ad quadratum Z F , seu vt Q L ad L S , & ideo quadratum duplæ ipsius K Z aquale erit figuræ sectionis , seu rectangulo Q L S . Tandem , quia propter similitudinem triangulorum per axes , sunt anguli C , F aquales , & anguli Y , Z pariter aquales (cum ex hypothesi diametri G O, L K parallela axibus A Y , D Z efficiant angulos G O C , L K F aquales); ergo A Y ad Y C erit vt D Z ad Z F , & earum quadrata etiam proportionalia erunt ; sed P G ad G R est vt quadratum A Y ad quadratum Y C , atque Q L*

ad

ad L S est vt quadratum D Z ad quadratum Z F ; igitur P G ad G R eandem proportionem habet , quàm 2 L ad L S , & propterea figuræ sectionem ex 13. huius.
erunt similes ; ijs autẽ figuris aqualia ostensa sunt quadrata duplicium O T , & K Z , quæ suppositæ fuerunt æquales ; igitur figuræ P G R , & 2 L S similes , & æquales sunt inter se , atque diametri æquæ inclinatæ sunt ad ordinatim ad eas applicatas H I , M N ; igitur sectiones H G I , M L N æquales sunt inter se , Prop. 10. huius.
similes , & congruentes , quarum figuræ æquales sunt quadratis duplicium interceptarum O T , & K Z , quod erat propositum .

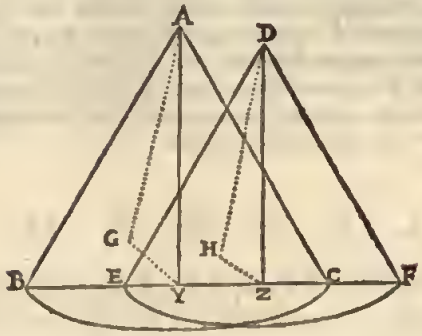
L E M M A IX.

SI in duobus conis A B C , D E F , bases sint in eodem plano , & duo triangula per axes A B C , D E F fuerint similia , & similiter posita , & in eodem plano existentia , erunt coni similes inter se .



Ducantur à verticibus A , & D duæ rectæ A G , & D H perpendiculares ad bases conorũ , & à terminis axium A T , & D Z coniungantur rectæ lineæ T G , & Z H . Quoniã planum , in quo existunt duo triangula A B C , D E F secat planum , in quo bases conorum iacent in una recta linea , quæ basis est vtriusque trianguli per axes conorum ducti ; ideoque B C , & E F in directum constitutæ erunt , & circa angulos æquales B , & E latera A B ad B C , atque D E ad E F sunt proportionalia (propter triangulorum A B C , & D E F similitudinem) erunt quoque ad consequẽtium semisses proportionales , scilicet A B ad B Y erit , vt D E ad E Z circa angulos æquales , & propterea triangula A B Y , & D E Z similia erunt : & ideò duo anguli B Y A , & E Z D , externus interno , æquales erunt inter se ; igitur Y A , & Z D in eodem plano existentes , parallelæ erunt inter se ; sunt quoque A G , D H inter se parallelæ (cum sint perpendiculares ad idem planum basium) ergo duo anguli Y A G , & Z D H æquales sunt inter se ; atque anguli G , & H æquales sunt , nempe rectí ; igitur in triangulis A Y G , & D Z H , duo postremi anguli A Y G , & D Z H æquales sunt

inter

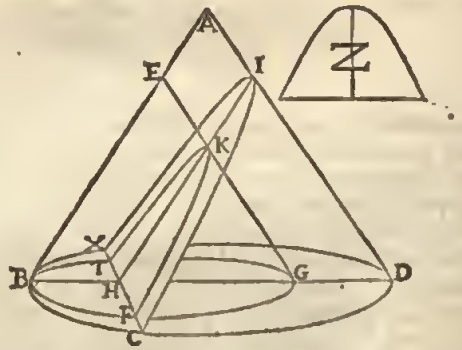


inter se : hi autem anguli inclinationes sunt axium conorum ad suas bases ; igitur axes A Y , & D Z aque sunt inclinati ad suas bases : suntque proportionales ad basium semidiametros Y B , & Z E (cum triangula A B Y , D E Z similia ostensa sint) ; igitur coni A B C , & D E F similes sunt inter se. Quod erat ostendendum.

Defin. 8. huius.

PROP. 11. Addit.

Data parabola Z duos conos similes exhibere , vt idem planum efficiat in eis duas parabolas æquales eidem datæ parabolæ , quæ asymptoticæ sint , & sibi ipsis viciniores fiant distantia minore quacunque data.



In quolibet plano fiat angulus I H C æqualis angulo inclinationis diametri , & basis parabolæ Z , & per H C extenso alio quolibet plano ducatur in eo B H G perpendicularis ad X H C ; & fiat quodlibet triangulum H G K , & vt quadratum H G ad rectangulum H K G , ita fiat latus rectum parabolæ Z ad productionem

ductionem K E, & ab E ducatur A E B parallela I H, quæ ſecet G H in B: poſtea producatur H K, vt cumq; in I, & per I ducatur A I D parallela E G, quæ ſecet B G in D; & in plano B X D C, diametris B G, B D, fiant duo circuli, qui ſint baſes duorum conorum, quorum vertices A, & E, & in eorum ſuperficiebus planum per X I C ductum, efficiat ſectiones C I X, & F K T. Dico eas eſſe parabolas quæſitas. Quoniam recta E G facta eſt parallela ipſi A D; igitur duo triangula A B D, & E B G per axes conorum ducta ſimilia, & ſimiliter poſita in eodem ſunt plano; & duo circuli baſium in eodem ſunt plano; ergo coni A B D, & E B G ſimiles erunt: poſtea quia triangula A B D, & E B G ſimilia ſunt, & I K H communis diameter ſectionum ad coincidentes baſes C X, F T æque inclinata, & recta linea A E B à verticibus conorum ducta parallela ſunt inter ſe, atque intercipiunt in angulis æqualibus A B H, & E B H communem portionem B H baſium triangulorum ſimilium per axes; ergo parabola C I X, & F K T æquales ſunt inter ſe. Secundò, quia propter parallelas E B, K H ſunt triangula E B G, H K G ſimilia; ergo quadratum B G ad rectangulum B E G ſcilicet latus rectum parabolæ F K T ad K E eſt, vt quadratum H G ad rectangulum H K G; ſed latus rectum parabolæ Z ad K E fuit vt quadratum H G ad rectangulum H K G; igitur duo latera recta, parabolæ Z, atq; parabolæ F K T ad eandem K E habent eandem proportionem, & propterea æqualia ſunt, & diametri, ad baſes æque inclinatæ ſunt ex conſtructione; igitur parabolæ F K T, & ei æqualis C I X erit æqualis eidem parabolæ Z. Tertiò quia ſectionum plano, & communi diametro I K H æquidiſtat cummune lateris A E B, in quo duo coni ſe ſe contingunt; ergo latus A E B nunquàm occurret plano C I X: ſed duæ ſuperficies conicæ tantummodò ſe ſe tangunt in latere A E B, & reliquis omnibus in locis ſeparatæ ſunt; igitur duæ parabolæ C I X, F K T in illo plano poſitæ per contactum A E B non tranſeunte, & extenſa in duabus conicis ſuperficiebus nunquàm conuenientibus, erunt aſymptoticæ. Quartò quia duæ parabolæ C I X, F K T æquales ſunt, & ſimiliter poſita circa communem diametrum I K H; ergo earum diſtantiæ ſemper magis, ac magis diminuuntur quouſque ſint minores qualibet rectâ lineâ datâ. Quod erat faciendum.

Lem. 9. huius.

Prop. 12. addit.

11. lib. 1.

Prop. 10. huius.

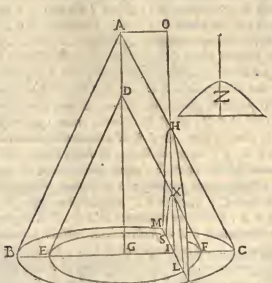
Propoſ. 7. addit.

Data hyperbola Z duos conos ſimiles exhibere, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas æquales, & ſimiles datæ, quæ aſymptoticæ ſint, & ſibi ipſis ſemper vicinjores fiant; non tamen interuallo minore rectâ lineâ data.

PRO. 13. Addit.

In quolibet plano fiat angulus H I M æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis datæ hyperboles Z, & per M I extenſo quolibet alio plano ducatur in eo B I C perpendicularis ad M I K; & ſumpto quolibet puncto O in rectâ linea I H productâ, ducatur à puncto O in plano per O I B extenſo rectâ linea O A parallela ipſi B I, & ſecetur O A æqualis ſemiſſi potentis figuram ſectionis Z, cuius rectum latus ad tranſuerſum eandem proportionem habeat quàm quadratum A O ad quadratum O H; atque à puncto A ducatur rectâ linea A D G parallela ipſi H I, & coniungatur A H, quæ ſecet rectam lineam G I in punctis G, & C, & ſecetur rectâ linea G B æqualis G C iungaturq; A B, & à quolibet puncto D in rectâ A G ſumpto ducãtur in eodem plano A B C duæ rectæ lineæ D E, & D F parallelæ lateribus A B, & A C; eruntque triangula

A B C,



A B C , & D E F similia , & similiter posita : postea in plano per B C , M K ducto , diametris B C , & E F , fiant duo circuli B K C , E L F , qui sint bases duorum conorum , quorum vertices sint A , & D , & in eorum superficiebus planum per H I , M K ductum efficiat sectiones K H M , & L X S: Dico eas esse quæsitas . Quoniam duo triangula A B C , D E F similia , & similiter posita in eodem sunt plano, pariterque duo circuli basium in vno plano existunt;

Lem. 9. huius. *ergo duo coni A B C , & D E F similes erunt ; postea quia triangula A B C , & D E F similia sunt , & communis sectionum diameter H X I aque inclinatur ad coincidentes bases M K , S L , & axi communi A D G æquidistat , & in angulis æqualibus intercipiunt G I communem portionem basium triangulorum*

Prop. 10. add. *similium per axes ; igitur hyperbole K H M , & L X S æquales sunt , & similes inter se , & earum figuris æqualia sunt quadrata ex dupla intercepte G I descripta . Secundò quia (propter parallelas A O , & B C) triangula H O A , & A G C similia sunt ; igitur quadratum A G ad quadratum G C , seu ad rectangulum B G C eandem proportionem habebit , quàm quadratum H O ad quadratum O A , seu quàm latus transuersum ad rectum figuræ Z ; sed vt quadra-*

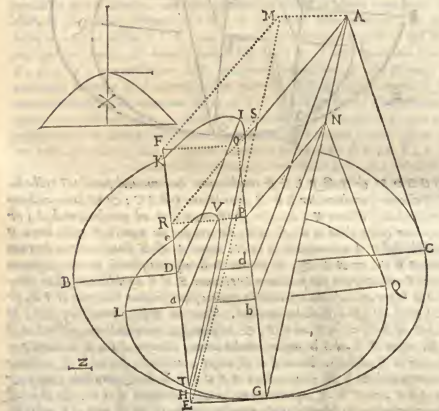
12. lib. 1. *tum A G ad rectangulum B G C , ita est latus transuersum ad rectum hyperboles K H M ; igitur duæ hyperbole Z , & K H M , habent figurarum latera proportionalia; suntq; prædictæ figuræ æquales cum sint æquales quadratis ex duplis ipsarum A O , & intercepte G I : quæ sunt æquales in parallelogrammo G*

10. 12. huius. *O , & habent angulos à diametris , & basibus contenti , æquales inter se : erunt hyperbolæ K H M , & Z æquales , & similes inter se : & propterea sectio L X S, quæ similis , & æqualis ostensa est ipsi K H M , erit quoque æqualis , & similis eidem sectioni Z . Tertiò , quia in duobus conis similibus , & similiter positis circa communem axim A D G , superficies nunquàm conueniunt , propterea quod latera A B , & D E , à quibus generantur in tota reuolutione inter se*

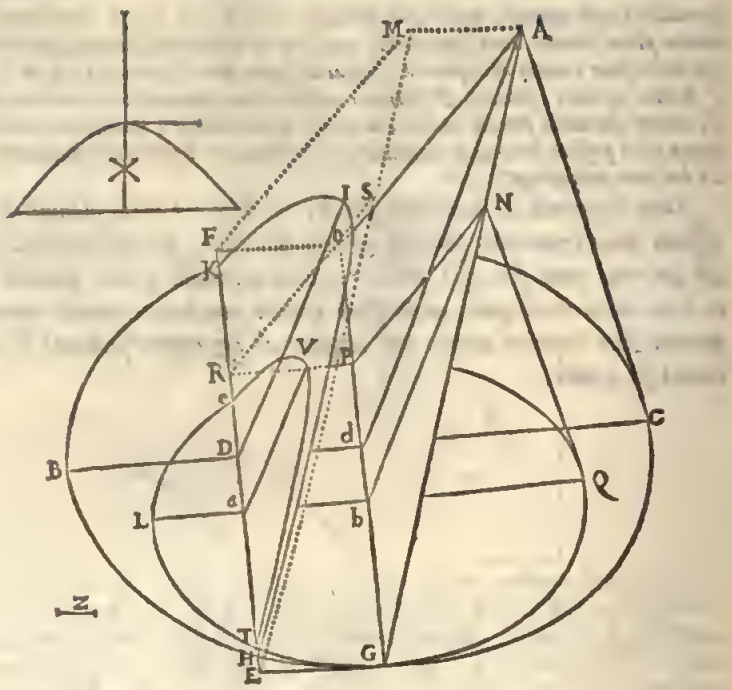
parallela

parallela conseruantur ; igitur duæ sectiones K H M , & L X S , existentes in eodem plano secante duas superficies, quæ licet in infinitum producantur vbique separatæ sunt , erunt asymptoticæ. Quarto, quia duæ hyperbolæ H K M , & L X S sunt æquales , similes, & similiter positæ circa communem diametrum H X I, earum distantiæ semper magis , ac magis diminuuntur ; nunquam tamen minores effici possunt internallo duarum aquidistantium , hyperbolas contmentium. Et hoc erat propositum. Prop. 7. addit.

Data hyperbola X duos conos similes exhibere vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas similes , & æquales datæ , quæ asymptoticæ sint, & ex vna parte sibi ipsis viciniores fiant internallo minori quolibet dato : ex altera verò parte ad se ipsas propius accedant internallo tamen maiore dato : oportet autem vt angulus ab asymptotis sectionis X contentus sit acutus. PROP. 13. Addit.



In quolibet I no fiat angulus A d O æqualis angulo inclinationis diametri, & basis hyperb l X ; & per O d extenso quolibet alio plano, ducatur in eo recta linea B d C perpendicularis ad O d G , & sumpto quolibet alio puncto b in recta linea G O in plano per B G C O ducto , centris d, & b describantur duo



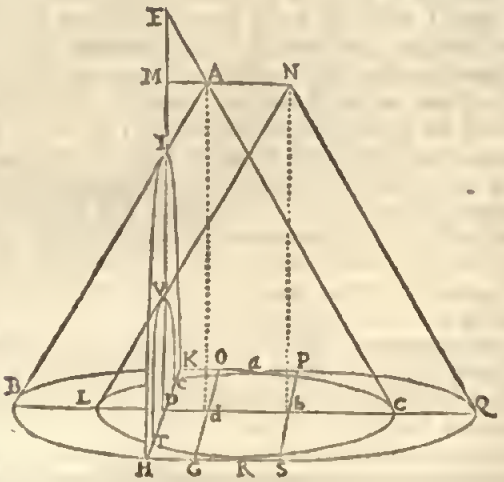
circuli G C O B, & G Q P L se se contingentes in communi puncto G rectæ lineæ G O ducaturque diameter L b Q æquidistans ipsi B C : & vt latus rectum ad transuersum sectionis X, ita fiat quadratum G d ad quadratum d A ; & coniungantur rectæ lineæ A G, & A O, ducaturque ex puncto P rectæ lineæ P N parallela ipsi O A occurrens G A in N, atque A, & N fiant vertices duorum conorum A B C, & N L Q, & secetur D d æqualis semissi potentis figuram sectionis X ; ducaturque per punctum D planum E M F æquidistans plano communi A G O per axes ducto, efficiens in conicis superficiebus sectiones H I K, & T V c ; Dico eas esse hyperbolas quæsitas. Quoniam propter parallelas A O, N P est A G ad G O, vt N G ad G P, & ad semisses consequentium, scilicet A G ad G d, atque N G ad G b proportionales erunt, ideoque A d, N b erunt parallelæ, & A d ad d G, seu ad d C est vt N b ad b G, seu ad b Q ; estque d C etiam parallela b Q ; ergo plana A B C, & N L Q parallela sunt, & anguli A d C, & N b Q æquales sunt, atque triangula A d C, & N b Q similia erunt inter se ; ideoque circa angulos æquales C, & Q erit A C ad C d, vt N Q ad Q b, & ad consequentium duplas, scilicet A C ad C B, atq; N Q ad Q L proportionales erunt ; & propterea triangula A B C, & N L Q similia erunt, & similiter posita, & inter se parallela ; ergo efficient in duobus planis A O G, & M E F inter se æquidistantibus sectionũ diametros I D, & V a parallelas conorũ axibus A d, & N b, & inter se ; quare constituent cum sectionũ basibus

coinci-

coincidentibus angulos æquales I D H, & V a T & cum ipſis D d, & a b etiã parallelis inter ſe continebunt angulos æquales I D d, & V a b, eruntque intercepta D d, a b æquales (cum ſint latera oppoſita parallelogrammi D b); Prop. 10. addit. huius. *igitur hyperbole H I K, & T V c æquales ſunt inter ſe, & ſimiles atq; earum figuris æqualia ſunt quadrata ex duplis interceptarum D d, & a b. Et quia triangula A G O, N G P ſunt ſimilia in eodem plano, ſuntque pariter duo circuli baſium in vno plano extenſi; igitur coni A B C, & N L Q ſimiles ſunt* Lem. 9. huius. *inter ſe. Secundò quia vt quadratum A d ad rectangulum G d O, ſeu ad rectangulum B d C ita eſt latus tranſuerſum ad rectum ſectionis H I K, & (ex conſtructione) in eadem proportione erat latus tranſuerſum ad rectum hyperboles X, atque anguli I D K, & A d O æquales ſunt inter ſe (propterea quod D I, d A parallela ſunt, pariterque D K, d O parallela ſunt inter ſe, cum communes ſectiones ſint plani baſis, & duorum planorum æquidiſtantium K I H, & O A G); & erat angulus inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ X æqualis angulo A d O; igitur diametri ſectionum X, & H I K ad ſuas baſes æque inclinantur, & habebant latera earundem figurarum proportionalia; ſuntq; prædicta figura æquales, cum ſint æquales quadrato ex dupla intercepta D d vt dictum eſt: igitur ſectiones H I K, & X ſimiles ſunt inter ſe, & æquales;* 10. 12. huius. *ideoque reliqua ſectio T V d, qua æqualis, & congruens oſtenſa eſt ipſi H I K, erit quoque ſimilis, & æqualis eidem hyperbolæ X. Tertiò quoniam plana H I K, & G A O æquidiſtantia ſunt, nunquam conuenient; & ideo planum H I K nunquam latere A N G alterius plani occurret; ſed ſuperficies conica ſe ſe tantummodo tangunt in communi latere A N G, & alibi perpetuo ſeparata incedunt; igitur duæ ſectiones H I K, & T V c in plano E I K exiſtentes, quæ infinitè producuntur in ſuperficiebus conicis, nunquam ſe ſe mutuo ſecant; igitur ſectiones ipſæ aſymptoticæ ſunt. Quartò ducantur rectæ lineæ G E, O F, P R tangentes circulos in extremitatibus communis diametri G P O, quæ parallelæ erunt inter ſe (cum perpendiculares ſint ad communem diametrum G P O): poſtea producantur plana E G A, F O A, R P N tangentia conos in lateribus G A, O A, & P N, & extendantur quouſque ſecent planum conicæ ſectionis H I K in rectis lineis E S M, F M, R S. Et quoniam duo plana æquidiſtantia G A O, et E M F efficiunt in eodem plano E G A, vtrumque conum contingente, duas rectas lineas G A, E M æquidiſtantes inter ſe: pari ratione in plano tangente F O A erunt rectæ lineæ F M, et O A parallelæ inter ſe: ſimili modo in plano R P N erunt P N, et R S inter ſe æquidiſtantes, eumque A O, et N P parallelæ ſint, erunt quoque F M, et R S inter ſe æquidiſtantes; ſuntque E M, et M F aſymptoti continentes hyperbolen E I K pariterq; rectæ lineæ E S, S R ſunt* Maurol. lib. 3. de lin. horar. ca. 6. 7. *aſymptoti hyperboles T V c: quare duæ hyperbolæ H I K, et T V c, ſimiles eidem X, et æquales, & ſimiliter poſitæ, quarum duæ aſymptoti F M, R S æquidiſtantes ſunt; reliquæ verò E M, & E S coincidunt (cum exiſtant in eodem plano tangente E A), & angulus ab eis contentus E M F, vel E S R eſt acutus (cum æqualis ſit acuto angulo ab aſymptotis ſectionis X contento, propter ſimilitudinẽ ſectionũ, vt ab alijs oſtenſum eſt): poterit ergo duci ramus breuiſſimus* Propoſ. 6. addit. huius. *in ſectione T V c ad partes V c quæ æquidiſtãs ſit rectæ lineæ V I vertices ſectionũ coniungenti: eritque illius breuiſſimæ portio inter ſectiones comprehenſa diſtantia* Propoſ. 8. addit. huius. *omnĩ maxima; & propterea inter nullas ſectionũ ad vtraſq; partes maximæ diſtãtia ſucceſſiuè diminuuntur, & ad partes æquidiſtantiũ aſymptoterũ F M, R S diminuuntur*

nuuntur quidem ; sed non efficiuntur minora interuallo quo parallelæ asymptoti distant inter se ; ex altera verò parte peruenire poteſt ad interuallum minus quolibet dato. Et hoc erat faciendum.

PROP. 14. Add. *Data hyperbola eadem X præcedentis propoſitionis deſcribere duos ſimiles conos, vt idem planum in eis efficiat duas hyperbolas ſimiles datæ ſectioni, quæ asymptoticæ ſint, & ex vtraque parte ſibi ipſis viciniores fiant interuallo minori quolibet dato.*



In quolibet plano fiat angulus A d G æqualis angulo inclinationis diametri, & baſis hyperbolæ datæ X, & per G d extenſo quolibet alio plano, ducatur in eo rectæ lineæ B d C perpendicularis ad G d O, & ſumpto quolibet alio puncto b in rectæ lineæ B C in plano per B G O extenſo, centris d, & b, deſcribãtur duo circuli inter ſe æquales G C O B, & S Q P L ſe ſe ſecantes in duobus punctis R, a: atq; vt latus rectum ad tranſuerſum ſectionis datæ X, ita fiat quadratũ G d ad quadratũ d A, & ducatur rectæ lineæ A N, M parallela ipſi B C, quæ ſecet b N æquidiſtantẽ d A in N, & coniungantur rectæ lineæ A B, A C, N L, N Q, & fiant A, & N vertices duorũ conorũ A B C, N L Q, & in eorũ ſuperficiebus planum M c T æquidiſtans planis A G O, & N S P efficiat ſectiones H I K, & T V c, quarum diametri D V I genitæ à triangulis A B C, & N L Q per axes in eodem plano exiſtentibus ſunt æquidiſtantes axibus conorum A d, N b, propter planorum æquidiſtantiam: Dico, eas eſſe hyperbolas quæſitas. Quoniam (propter æquidiſtantiam oppoſitarum linearum) eſt ſpatium A b parallelogrammum; igitur conorum axes A d, N b æquales ſunt inter ſe, & æquè inclinantur ad communem rectam lineam B C Q (propter æquidiſtantiam earundem A d, N b); ſuntque æqualium circulorum radij d B, d C, b L, b Q æquales inter ſe; igitur triangula A B C, N L Q ſimilia ſunt inter ſe, & ſimiliter

ter posita in eodem plano; suntquè etiam duo circuli basium in uno plano extensis igitur coni A B C, & N L Q similes sunt inter se; & quoniam, vt latus transuersum ad rectum sectionis datæ X, ita est quadratum A d ad quadratum radij G d, & ita est latus transuersum ad rectum sectionis H I K; pariterque vt quadratum N b ad quadratum radij L b ita est latus transuersum ad rectũ hyperbolæ T V c; Et quadrata axium ad quadrata radiorum baseos eandem proportionem habet idco latus transuersum ad rectum sectionis H I K eandem proportionem habebit, quàm latus transuersum ad rectum alterius sectionis T V c, seu eandem, quàm habet latus transuersum ad rectum datæ sectionis X; atque diametri I V D, & diameter sectionis X æquè inclinantur ad bases, vt dictum est; igitur duæ sectiones H I K, & T V c, nedum datæ hyperbolæ X; sed etiam inter se similes sunt. Secundò quoniam duæ peripheriæ circulorum basium circa communem diametrum B C Q se se mutuo secant in duobus punctis R, & a, quæ necessario cadunt inter duas circulorum diametros G O, S P perpendiculares ad communem diametrum B C Q; igitur superficies conorum vicissim se secant semper inter duo triangula, per conorum axes A G O, & N S P, in reliquis autem locis separatæ sunt; planum verò efficiens sectiones H I K, T V c cadit nõ inter axes A d, & N b; igitur duæ sectiones H I K, & T V c existentes in duabus conicis superficiebus, non se secantibus, nunquàm conuenient, & asymptoticæ erunt. Tertiò quoniam rectæ linea N A M per vertices conorum ductæ parallela est communi basi B Q triangulorum per axes, & secat diametrum communem D V I in M: ergo (sicuti ostensum est in prop. 10. addit. huius) erit punctum M centrum sectionis H I K, atq; centrum alterius sectionis T V c; ergo duæ sectiones H I K, & T V c similes sunt inter se, concentricæ, & similiter positæ circa communem diametrum D V I; igitur sectionum interualla semper magis, ac magis in infinitum minuuntur, & reperiri possunt minora quolibet interuallo dato. Et hoc erat ostendendum.

Lem. 9. huius.

Prop. 13. huius.

Propos. 9. addit. huius.

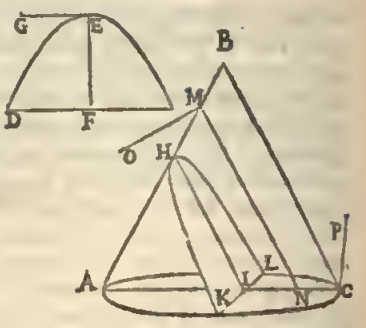
SECTIO DECIMA

Continens Propositiones XXVI. XXVII. & XXVIII.

PROPOSITIO XXVI.

IN cono recto, cuius triangulum per axim sit A B C reperire sectionem datæ parabolæ D E æqualem, cuius axis E F, & erectum E G.

Vt qua-



Vt quadratum A C ad C B in B A, ita ponatur E G ad B H: & educamus H I parallelam B C, & extendatur per H I planum eleuatum ſuper triangulum A B C ad angulos rectos efficiens in eono ſectionem K H L. Dico eam æqualem eſſe ſectioni D E. Quia quadratum A C ad C B in B A eſt, vt E G ad B H; ergo potentes eductæ ad axim H I in ſectione K H L poſſunt applicata contenta ab abſciſſis illarum potentium, & ab E G; quare E G erit erectum ſectionis K H, & idem etiam eſt erectum ſectionis D E; ergo duo erecta duarum ſectionum ſunt æqualia, & propterea ſectiones æquales ſunt (1. ex 6.)

Et dico, quod in eono A B C reperiri non poteſt ſectio alia parabolica, cuius vertex ſit ſuper A B, quæ eidem D E ſit æqualis. Si enim hoc eſt poſſibile, ſit axis illius ſectionis M N, qui quidem cadet in triangulo A B C; quia conus eſt rectus, & erectum illius ſit M O; atq; M O ad M B erit, vt G E ad B H; eſtque B H maior, quàm B M; ergo M O minor eſt, quàm G E; quare ſectio, cuius axis eſt M N non eſt æqualis ſectioni D E; & tamen ſuppoſita fuit æqualis illi, quod eſt abſurdum. Quare patet propoſitum.

ex conu. Prop. 1. huius.

PROPOSITIO XXVII.

SIt deinde hyperbole A B, cuius axis C D, inclinatus B D, & erectus B E; atque quadratum axis F G dati coni recti F H I ad quadratum G H ſemidiametri baſis eius, non habeat maiorem proportionem, quàm habet figura, ſcilicet quàm habet D B ad B E.

Sit prius proportio eadem, & producamus I F ad K; & ducamus K L ſubtendentem angulum H F K, quæ parallela ſit ipſi F G, & æqualis exiſtat ipſi D B; & per K L planum extendatur eleuatum ad angulos rectos ſuper planum trianguli H F I, quod efficiet in ſuperficie conica ſectionem hyperbolicam, cuius axis erit L M, & inclinatus K L. Et quia F G parallela eſt K L, erit quadratum F G ad G I in G H, vt K L inclinatus ad illius erectum, ſiue vt D B ad B E; facta autem fuit K L æqualis D B; ergo erectus inclinati K L æqualis eſt B E; & propterea ſectio, cuius axis eſt L M æqualis eſt ſectioni A B. Nec reperiri poterit in eono H F I alia ſectio hyperbolica, cuius vertex ſit ſuper H F, quæ æqualis ſit A B; quia, ſi reperiri poſſet eſſet illius axis in plano trianguli H F I, & eius inclinatus, ſubtendens angulum H F K æqualis eſſet D B, nec tamen eſſet K L, nequè ipſi æquidiſtans (eo quod, ſi æquidiſtaret

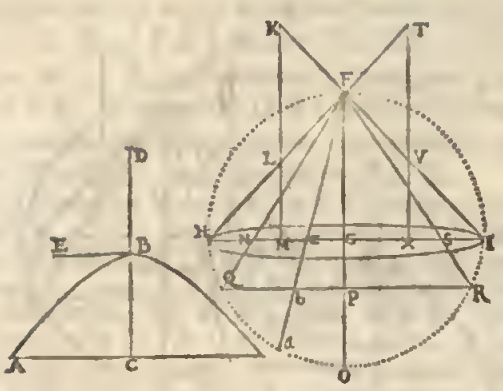
12. lib. 1.

2. huius.

a

b

ipſi

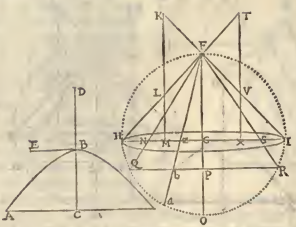


ipſi K L, non eſſet eidem æqualis.) His poſitis ſi educatur ex F linea ipſi parallela cadet inter F G, F H, aut inter F I, F G; ſitque F N; igitur quadratum F N ad I N in N H eſt, vt D B ad B E: quod eſt abſurdum; quia quadratum F N maius eſt, quàm quadratum F G, & N H in N I minus eſt, quàm quadratum G H. 12. lib. 1.

Poſtea habeat quadratum F G ad quadratum G H minorem proportionem quàm habet D B ad B E; & circumſcribamus circa triangulum H F I circulum; & produeamus F G quouſque occurrat circuli circumferentię in O; ergo quadratum F G ad quadratum G H, nempe ad F G in G O habet minorem proportionem, quàm D B ad B E: & ponamus F G ad G P, vt D B ad B E; & per P ducamus P Q parallellam H I; & coniungamus F R, F Q; quæ occurrant H I in S, N: quare D B ad B E eſt, vt F G ad G P, quæ eſt, vt F N ad N Q; nempe vt quadratum F N ad F N in N Q æquale ipſi I N in N H, atque vt quadratum F S ad F S in S R, nempe vt quadratum F S ad I S in S H; & educamus T V, K L, quæ ſubtendant duos angulos H F K, I F T, & ſint parallelæ ipſis F N, & F S, & æquales ipſi D B; igitur duo plana per K L, T V extenſa ſuper triangulum H F I ad angulos rectos eleuata, producunt in eono H F I ſectiones hyperbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipſarum L K, T V, & ſinguli earum ad ſuos erectos eandem proportionem habent, quàm D B ad B E, & propterea figuræ ſectionum ſimiles ſunt, & æquales, ideoque ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B. c d 2. huius.

Nec reperitur ſectio præter iam dictas, cuius vertex ſit ſuper aliquam duarum linearum H F, F I, & ſit æqualis ſectioni A B. Quia ſi reperiri poſſet, caderet eius axis in planum trianguli H F I, illiuſque axi educatur parallela F Z *a*, quæ non cadet ſuper F R, neque ſuper F Q, eritq; quadratum F Z ad I Z in Z H, quod eſt æquale ipſi F Z in Z *a*, nempe F Z ad Z *a* eandem proportionem haberet, quàm D B ad B E; ſed D B ad B E eſt, vt F G ad G P, nempe F Z ad Z *b*; ergo ptoportio F Z e

ad

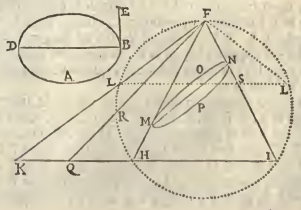


ad Z *b*, & ad Z *a* est eadem; & propterea Z *b* æqualis est Z *a*, quod est absurdum.

Ponamus iam quadratum F G ad G H in G I maiorem proportionem habere, quàm D B ad B E. Dico in cono H F I exhiberi non posse sectionem æqualem hyperbolæ A B. Si enim exhiberi posset illius axi aliqua parallela reperiretur vt F N : & quadratum F N ad I N in N H maiorem proportionem habens, quàm quadratum F G ad quadratum G H, erit vt D B ad B E; quæ minor est proportione quadrati F G ad quadratum G H: quod est absurdum. Non ergo reperitur in cono H F I sectio æqualis hyperbolæ A B. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXVIII.

SIt iam sectio elliptica A B, cuius axis transuersus B D, & erectus illius B E, & circa coni triangulum H F I descri- a



bamus

bamus circulum, & ex F ducamus lineam ad H I, occurrentem ipsi extra circulum in K, & occurrat circulo in L, itaut sit F K ad K L, vt D B ad B E (& hoc est facile, vti demonstrauimus in 59. ex 1.), & educamus in triangulo chordam M N parallelam F K, & æqualem D B; Aio quod planum transiens per M N erectum super triangulum coni producit in cono H F I sectionem ellipticam, æqualem sectioni A B.

b
c

Quia D B transuersus ad eius erectum B E eandem proportionem habebat, quàm F K ad K L, nempe quàm quadratum F K habet ad F K in K L, quod est æquale ipsi I K in K H; estque vt M N parallela ipsi F K ad illius erectum; quare D B ad B E eandem proportionem habet, quàm M N ad illius erectum; & M N æqualis est D B; igitur figuræ duarum sectionum A B D, M O N P sunt æquales, & similes, & ideo duæ illæ sectiones sunt æquales. Dico insuper, quod non reperitur in cono H F I vlla alia sectio elliptica, habens verticem super F I, cuius axis non æquidistet alicui duarum F L K, quæ æqualis sit eidem B A D. Quia si possibile esset, ostenderetur axis eius cadere in planum trianguli H F I, quia sectio est elliptica, & æqualis sectioni A B, vtiq; eius axis occurret F I, F H, & æqualis est D B; cumque vertex illius sit super F I, non cadet axis eius super M N, nec ipsi erit parallelus; & ideo, educta F Q parallela axi eius non cadet F Q super F K, & secabit arcum F H in R; eritque proportio axis illius sectionis ad eius erectum, nempe quadratum F Q ad I Q in Q H, quod est æquale ipsi Q F in Q R, nempe vt F Q ad Q R, ita erit D B ad B E, quæ eandem proportionem habet quam F K ad K L, & diuidendo permutandoq; F R maior subtensa ad minorem F L eandem proportionem habebit, quàm R Q minor intercepta ad maiorem K L; quod est absurdum: non ergo reperitur in cono H F I sectio elliptica, verticem habens in F I, quæ sit æqualis sectioni A B, præter superius expositam. Et hoc erat propositum.

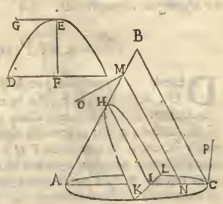
d
e
f

13. lib. 1.
2. huius.
13. lib. 1.

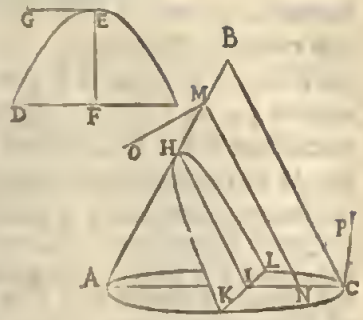
Notæ in Propoſit. XXVI.

a

ERgo potentes egredientes ex sectione L H K ad axim H I poterunt applicatum, quod continet abscissum illius potentis cum G E; ergo G E est erectus sectionis L H; & est etiã erectus sectionis D E; igitur duo applicata duarum sectionũ sunt æqualia, & ideo sectio D E congruit sectioni K H L, & propterea æquales sunt; &c. *Ex eo quod quadratum A C basis trianguli per axim coni recti ad rectangulum C B A, sub eius lateribus*



contentum, habet eandē rationem, quam G E ad H B, ſufficienter deducitur, quod
11. lib. 1. *G E ſit latus rectum tàm parabolæ L H*
Propoſ. 1. huius. *K, quàm D E; & ideo erit parabole L H æqualis D E. Non igitur neceſſe eſt, vt rectangula ſub abſciſſis, & lateribus rectis æqualibus oſtendātur æqualia inter ſe, & inde eliciatur æqualitas, & congruentia ſectionum. Quapropter caſu illa verba in Codice Arabico irrepſiſſe puto.*



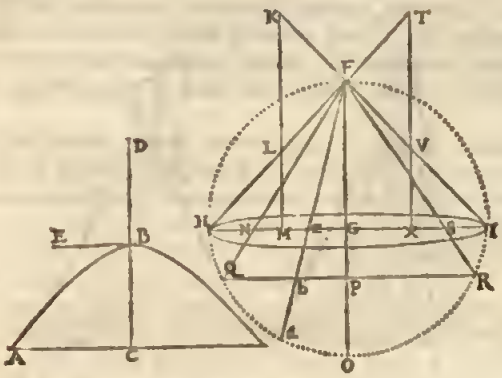
Et dico, quod non reperiatur in ſectione A B C alia ſectio parabolica; quia ſi reperiretur, &c. *Verba, quæ in hoc textu addidi ex ſerie demonſtrationis facile colliguntur: Sed animaduertendum eſt, quod ue dum in cono recto, ſed in quolibet cono ſcaleno quomodolibet per axim ſecetur triangulo A B C, deſignari poteſt in eius ſuperficie parabole æqualis data D E.* b

Ducatur C P contingens circulum baſis in C, & in parabola D E ducatur
51. lib. 2. *diameter E F, & contingens verticalis, quæ concurrat angulum F E G æqualem angulo B C P; ſitque G E latus rectum diametri F E; atque vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ita fiat G E ad H B, & per H extendatur planum L H K æquidiſtans plano per E C P ducto. Dico ſectionem L H K eſſe parabolen quæſitam. Quia plana æquidiſtantia L H K, & B C P efficiunt in circulo baſis rectas P C, L K inter ſe parallelas, & in plano A B C efficiunt rectas H I, B C inter ſe parallelas; ergo anguli B C P, & H I L æquales ſunt, ſed in parabola D E diameter E F efficit cum ordinatis ad eam applicatis angulos*
Corn. 46. lib. 1. *æquales F E G, ſcilicet ei, qui cum tangente verticali conſtituit, ſeu angulo B C P; ergo duarum ſectionum L H K, & D E, diametri H I, & E F æque ſunt inclinata ad ſuas baſes, cumque latus rectum parabolæ L H K ad H B ſit, vt quadratum C A ad rectangulum C B A, ſeu vt G E ad H B; igitur duo latera recta ſimilium diametrorum I H, & F E ad H B eandem proportionem habent; & ideo æqualia ſunt inter ſe; quare ſectiones ipſæ æquales, & congruen-*
10. huius. *tes erunt. Quod erat oſtendendum.*

Multoties in eodem cono duæ parabolæ æquales ſubcontrariæ duci poſſunt, vt Mydorgius demonſtrauit.

Notæ in Propoſit. XXVII.

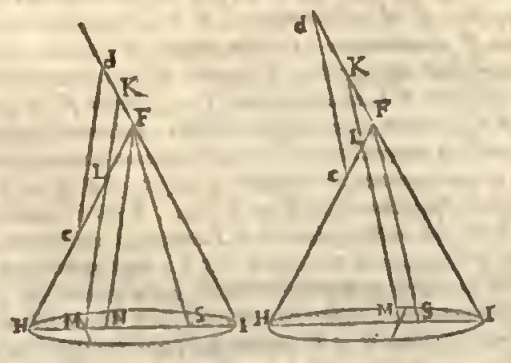
DEinde ſit hyperbole, vt A B, & axis illius C D, & inclinatus B D, & erectus B E, ita vt non ſit proportio quadrati axis coni ad quadratum dimidij diametri illius baſis, vt quadratum F G ad quadratum G H, maior, quàm proportio figuræ ſectionis: &c. *Senſus huius propoſitionis hic erit. In cono recto F H I, cuius triangulum per axim H F I reperire ſectionem æqualem hyperbole datæ A B, cuius tranſuerſus axis D B, & latus rectum B E. Oportet autem, vt quadratum F G axis dati coni ad quadratum radij G H circuli baſis non habeant maiorem proportionem, quàm habent* a

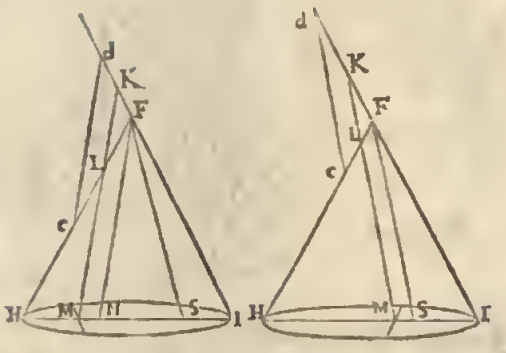


bent figura latera, scilicet, quàm habet D B ad B E. At quomodo duci debeat subtensa K L qua aequalis sit ipsi D B, & parallela alteri F G, ostendetur inferius.

b Et non reperitur in cono H F I alia sectio hyperbolica super F H, & æqualis A B, &c. *Addidi verba quæ ad huius textus integritatem facere videbantur.*

c Et educamus T V, K L, quæ subtendant duos angulos L F K, I F T, & sint parallelæ ipsis F N, F S, & æquales D B, &c. *Quomodo autem hoc fieri possit modo ostendemus. Sumatur in recta linea H F quodlibet punctum* c *inter F, & H; atque à puncto* c *ducatur recta linea* c d *parallela ipsi F N, vel F S, quæ secet productionem alterius lateris I F in* d, *& quàm proportionem habet* c d *ad D B, eandem habeat C F ad F L, & per punctum L ducatur recta L K parallela ipsi* c d. *Manifestum est* c d *ad L K eandem proportionem habere, quàm* c F *ad F L, seu quàm* c d *ad B D; & ideo K L æqualis erit B D, & subtendit angulum L F K, estque parallela ipsi* c d, *seu ipsi F N, vel F S. Et hoc erat faciendum.*





Igitur duo plana tranſeuntia per K L, T V eleuata ſuper triangulum H F I ad angulos rectos producunt in cono H F I duas ſectiones hyporbolicas, quarum axes L M, V X, & inclinati ipſarum L K, V T, & ſinguli eorum ad ſuos erectos ſunt, vt D B ad B E; ergo figuræ trium ſectionum ſunt ſimiles, & æquales; & propterea duæ ſectiones, quarum axes ſunt L M, V X ſunt æquales ſectioni A B, &c. *Ex textu mendoſo expungi debent ſuperuacuneu uliqua verbu, ſicut in contextu habetur. Non enim verum eſt, quod duæ tuntummodo hyperbole æquales eidem A B duci poſſunt in eono recto H F I, vertices habentes in lateribus H F, & F I, ſed quatuor inter ſe aquales eſſe poſſunt; num ſuper latus F H duci poſſunt dua hyperbole, quarum axes tranſuerſi K L aquules ſint ipſi B D, & aquidiſtantes ſint rectis lineis F N, & F S. Quod ſic oſtendetur. Quonium rectu linea Q R ducta eſt parullela ipſi H I eruni duo arcus circuli intercepti H Q, I R aquules inter ſe; & ideo duo unguli ad peripherium H F Q, & I F R aquales erunt inter ſe; poſita untem fuit K L aqualis, & parallela ipſi F N; igitur duo anguli alterni K L F, & H F N uquales ſunt inter ſe: pari ratione; quia reliqun K L ductu eſt parallela ipſi F S, erit ungulus externus S F I aqualis interno, & oppoſito, & ad euſdem partes L K F; & ideo duo triangula L F K habent angulum F, communem, & duos ungolos in ſingulis triangulis K, & L uquales; igitur ſunt aquiungulu, & ſimilia, &, vt anteu dictum eſt, fieri poſſunt dua recta lineu K L aquales eidem D B, & inter ſe: ſi igitur per duas rectas lineus K L ducuntur plana perpendicularin ad planum trianguli per axim H F I, efficientur in cono recto dua hyperbole, quarum bini axes tranſuerſi K L ſunt uquales: & quia, propter parallelas H I, Q R, eſt F N ad N Q ſeu quadrutum F N ad rectangulum F N Q vt F S ad S R ſeu vt quadratum F S ad rectangum F S R; ſed rectangulum H N I aquale eſt rectungulo F N Q, & rectungulum H S I aquale eſt rectangulo F S R: ergo quudratum F N ud rectungulum H N I eandem proportionem habet, quàm quadratum F S ud rectãgulum H S I; eſtque latus tranſuerſum K L ad ſuum latus rectum, vt quadratum F N ad rectangulum H N I, pariterque latus tranſuerſum K L alterius ſectionis ad ſuum latus rectum eſt vt quadrutum F S ud rectangulum H S I: igitur*

d

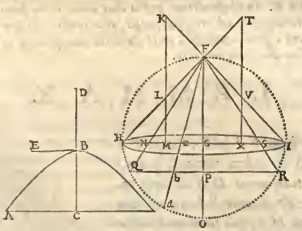
11. lib. 1.

Ibidem.

igitur duo æqualia latera transuersa K L ad sua latera recta eandem proportionem habent, & ideo huiusmodi latera recta æqualia sunt inter se; ideoque duæ hyperbole genitæ, habentes vertices in eodem latere F H, æquales sunt inter se, quas vocat Mydorgius subcontrarias. Simili modo duæ aliæ hyperbole inter se, & prioribus æquales in eodem cono duci possunt, vertices habentes in latere F I. 10. huius.

e Nec reperitur tertia, cuius vertex sit super aliqua duarum linearum H F, F I, & sit æqualis sectioni A B, quia, &c. *Immutaui particulam, quæ propositionem reddebat falsam, id quod colligitur ex constructione, & progressu demonstrationis: Quælibet enim alia sectio, præter quatuor assignatas, habebit axem æquidistantem alicui rectæ vt F Z, quæ cadit inter F N, & F S; & hac ostendetur inæqualis prædictis sectionibus, & ipsi A B.*

f Deinde ponamus quadratum F G ad G H maius, quàm D B ad B E. Dico, non reperiri in cono H F I sectionem æqualem sectioni A B: nam, si reperiretur, esset vel æqualis parallela suo axi, & erit quadratum N F ad I N in N H, &c. *Legendum esse vt in textu dixi constat ex progressu totius propositionis. Iam facili negotio demonstratio perfici potest, nam axis F G minor est quàm F N, quæ subtendit angulum rectum G, quadratum vero G H semissius totius H I maius est rectangulo I N H, sub inæqualibus segmentis contentum; propterea quadratum F N ad rectangulum I N H maiorem proportionem habebit, quàm quadratum G F ad quadratum G H: estque D B ad B E, vt quadratum F N ad rectangulum I N H; propterea quod F N parallela est axi illius sectionis, quæ posita fuit æqualis A B; igitur D B ad B E maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratum G H; quod est contra hypothesin: habebat enim quadratum F G ad quadratum G H maiorem proportionem, quàm D B ad B E. Non ergo reperitur in cono; &c.* 12. lib. 1.

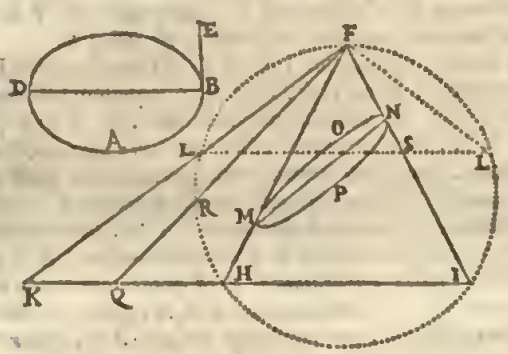


Sicuti in præcedenti propositione factum est, nedum in cono recto, sed etiam in quolibet cono scaleno, quomodolibet per axim sectio à triangulo H F I determinari posset, quando, & quomodo in eo designari posset sectio æqualis datæ hyperbole A B. Quod ab alijs factum est.

Notæ

Notæ in Propoſit. XXVIII.

DEinde ſit ſectio elliptica, vt A B, & axis eius tranſuerſus B D, & erectus illius B E; & ſit triãgulum coni H F I, & circumducamus circa illum circulum, & educamus ex F lineam F L K occurrentem ipſi extra circulum in K; & occurrat circulo in L ita vt ſit F K ad K L, vt D B ad B E; & eſt facile (vti demonſtrauimus in 59. ex 1.), &c. a

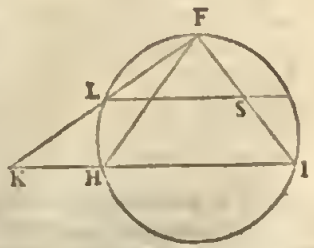


Senſus propoſitionis hic erit. In cono recto, cuius triangulum per axim H F I repertre ſectionem aqualem data ellipſi A B, cuius axis tranſuerſus D B, & latus rectum B E. In conſtructione poſtea duci debet recta linea F L K extra circulum, & triangulum ad vtraſque partes, alias conſtructio non eſſet perfecta.

Lemma verò, quod repoſuiſſe, dicit Arabicus interpres in 1. libro, ab hoc ſequenti forſam diuerſum non erit.

LEMMA X.

SEcetur latus F I in S, vt ſit F I ad I S in eadem ratione, quàm habet axis tranſuerſus D B ad latus rectum B E: & ducatur S L æquidiſtans trianguli baſi H I, quæ ſecet circulum ex vtraque parte in L, & coniungantur rectæ lineæ F L, producanturque quouſque ſecent baſim H I in punctis K.



Quoniam in triangulo F I K ducitur recta linea S L æquidiſtans baſi I K, erit F I ad

erit

I S, vt F K ad K L: sed erat D B ad B E, vt F I ad I S; igitur F K ad K L eandem proportionem habebit: quàm D B ad D E.

b Et educamus in triangulo chordam M N parallelam K F, & æqualem D B, &c. *Non vna, sed duplex recta linea M N duci potest parallela cuilibet duarum F K, quæ interius subtendat angulum verticis F trianguli H F I per axim ducti. Et potest etiam effici M N æqualis ipsi D B, vt in expositione præcedentis propositionis ostensum est.*

c Itaque planum, transiens per M N, producit in cono H F I sectionem ellipticam æqualem sectioni A B; quia, &c. *Addidi verba, quæ in textu desiderantur, vt sensus perfectus sit.*

d Ergo duæ illæ sectiones sunt æquales, &c. *Concipi debet sectio N O M P, duplex, quia nimirum duæ sectiones sub contrariæ, æquales sunt, vt facile cum Mydorgio ostendi potest.*

e Et dico, quod non reperiatur in cono H F I sectio elliptica, habens verticem super F I; quia si possibile esset, &c. *Textus valde corruptus exposito modo restitui debere constat ex progressu demonstrationis.*

f Et diuidendo F R maior ad minorem R Q est vt F L minor ad maiorem K L, &c. *Supplenda fuerunt particulæ aliquæ ad tollendam equiuocationem.*

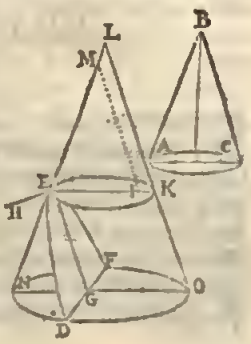
SECTIO VNDECIMA

Continens Propositiones XXIX. XXX. & XXXI.

PROPOSITIO XXIX.

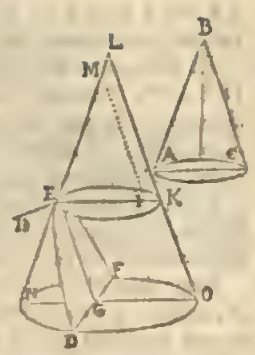
DAto cono recto A B C, conum exhibere ei similem, qui datam sectionem D E F contineat, cuius axis E G, & erectus E H; sitque prius sectio parabole.

Super E G educatur planum ad sectionem D E F ad angulos rectos eleuatum, in quo ducatur E I K, quæ contineat cum E G angulum
a æqualem ipsi angulo C: & ponamus E H ad E K, vt A C ad C B, & faciamus super E K triangulum E L K simile triangulo A B C, vt angulus verticalis L æqualis sit angulo B. Faciamus etiam conum, cuius vertex sit L, eiusque basis circulus, cuius diameter sit E K, qui sit eleuatus super triangulum E L K ad angulos rectos: erit igitur angulus E K L æqualis ipsi C,



sed

ſed angulus K E G factus fuit etiam eidē æqualis; igitur L K, quod eſt latus trianguli per axim coni tranſeuntis, parallelum erit ipſi E G: & propterea planum, in quo eſt ſectio D E F producit in cono ſectionem parabolicam; & quia A C ad C B eſt, vt H E ad E K, & vt E K ad K L; igitur H E ad E L (quæ eſt æqualis ipſi K L) eandem proportionem habet, quam quadratum E K ad quadratum K L, nempe ad
11. lib. 1. K L in L E: quapropter H E eſt erectus ſectionis prouenientis in cono, ſed eſt etiam erectus ſectionis D E F; igitur D E F exiſtit in ſuperficie coni, cuius vertex eſt L, qui ſimilis eſt cono A B C: eo quod triangulum A B C ſimile eſt triangulo E L K. Dico etiam, quod ſectio D E F contineri non poteſt ab aliquo alio cono, ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex eadē parte ſectionis præter conum iam exhibitum. Nam (ſi poſſibile eſt) ſit conus habens verticem M, & triangulum eius erectum ſit ſuper planum ſectionis D E F, & communis ſectio illius, & coni ſectionis erit axis eius; eſtque E G illius axis; ergo hæc eſt abſciſſio communis eorundem planorum; ſed eſt E G abſciſſio communis plani ſectionis, & plani trianguli K E L, ſuper quod eſt etiam erectum; igitur duo triangula E L K, E M
Def. 8. I ſunt in eodem plano, & angulus L æqualis eſt M (propter ſimilitudinē duorum conorum); ergo E M eſt indirectum ipſi E L, & educta E K ad
Def. 9. I ſectio D E F continebitur in cono, cuius vertex eſt M: ſi autem ponamus proportionem lineæ alicuius ad E M, eandem quàm habet quadra-
11. lib. 1. tum E I ad I M in M E, linea illa eſſet erectus ſectionis D E F; ſed H E erat erectus ſectionis D E F; igitur H E eſt illa linea, hæc autem ad E L eandem proportionem habebat, quàm quadratum E K ad K L in L E; ergo quadratum E K ad K L in L E eandem proportionem habet, quàm quadratū E I ad I M in M E; igitur H E ad E M, & ad E L eandem proportionem habet: quod eſt abſurdum. Non ergo in aliquo alio cono ſectio contineri poteſt, vt diximus. Et hoc erat propoſitum.

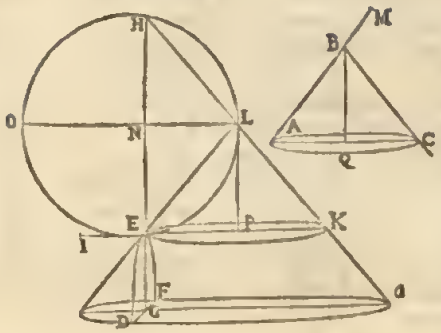


b c d e f

PROPOSITIO XXX.

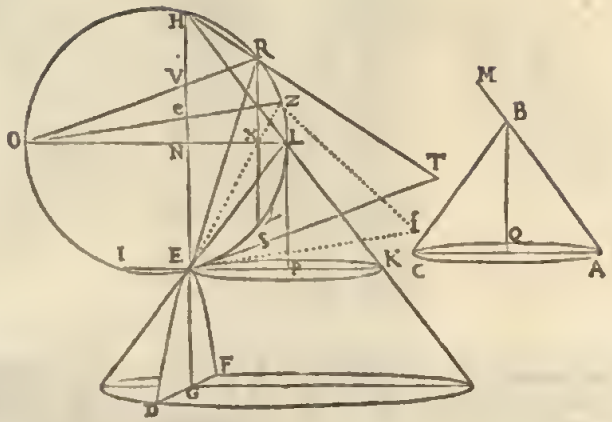
SI ſectio hyperbolica D E F, cuius axis E G inclinatus E H, & erectus E I (oportet autem, vt quadratum axis B Q cōi recti ad quadratū ſemidiametri baſis illius A Q non maiorē proportionē habeat, quàm habent figuræ latera). Et habeat prius eandem proportionē, quàm H E ad E I, & producamus A B ad M, & ſuper H E in plano erecto ad ſectionē D E F deſcribamus ſegmentū circuli E L H, quod capiat angulum æqualem angulo M B C, & bifariam ſecemus arcum E O H in O, & educamus perpendicularem O N ſuper H E; & producamus illam, quouſque occurrat

a



rat eireumferentiæ in L, & iungamus E L, & L H, quæ occurrat in K perpendiculari ex puncto E ſuper lineam E H. Et quia E K parallela eſt L O erit angulus K æqualis H L O, qui eſt ſemiſſis anguli H L E, & hic eſt æqualis duobus angulis K, K E L; igitur ſunt æquales; quare K L E eſt æquierus, & angulus K L E æqualis eſt A B C; quia angulus H L E
c æqualis eſt M B C; quapropter K L E ſimile eſt A B C, quia æqualia crura etiam habet. Si autem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum illius trianguli erectum ad planum D E F; vtique planum ſectionis producit in cono hyperbolen, cuius axis E G, inclinatus E H; eo quod ſi educamus L P, B Q perpendiculares in duobus triangulis, habebit quadratum B Q ad C Q in Q A (quod eſt vt H E ad E I) eandem proportionem, quàm quadratum L P ad P K in P E: quare potentes æductæ in illa ſectione ad axim E G, poterunt comparata, applicata ad E I erectum; ſed potentes, eductæ in ſectione D E F, 12. lib. 1.
poſſunt quoque illa applicata; ergo ſectio D E F æqualis eſt ſectioni, prouenienti in cono, cuius vertex eſt L, & exiſtit in eodem plano, habetque eundem axim: quare conus, cuius vertex L continet ſectionem Defin. 9.
D E F, & eſt ſimilis cono A B C.

Dico rurſus, quod nullus alius conus ſimilis cono A B C, cuius vertex ſit in ea parte, in qua eſt L, præter iam dictum, continebit hanc
d eandem ſectionem. Si enim hoc verum non eſt, contineat illam alius conus ſimilis cono A B C, cuius vertex R in plano L E G; atque latera illius ſint E R, R T. Quia angulus E R T æqualis eſt E L K, & eorum conſequentes æquales inter ſe in eodem eireuli ſegmento E L H exiſtent, eo quod T R produſta occurrit axi tranſuerſo E H in H, & iungamus R O, & ex E educamus E T, quæ ſit parallela coniunctæ rectæ lineæ O R; vnde angulus O R H æqualis eſt O R E) propter æqualitatem arcuum ſuorum, & ſunt æquales duobus angulis R T E, R E T, ergo E R T eſt æquicrus, & angulus T R E æqualis eſt A B C: edueatur iam R S parallela H E, tunc quadratum R S ad T S in S E eandem proportionem habebit, quàm E H inclinatus ſectionis D E F ad E I erectum illius; eo quod ſectionem D E F continet conus, cuius vertex eſt R; ſed H E ad



E I eandem proportionẽ habet, quàm quadratum B Q ad C Q in Q A; eſtq; C Q æqualis Q A, atq; T S æqualis S E, & T S ad S E eandẽ proportionẽ habet, quã T R ad R H, ſeu quàm E V ad V H; igitur E V æqualis eſt V H; quod eſt abſurdum; propterea quo L O diameter, quæ ad illã perpendicularis eſt, bifariam ſecat eam in N. Oſtenſum igitur eſt, non reperiri conum alium continentem ſectionem D E F, præter ſuperius expoſitum. Tandem ſupponamus, quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I. Patet quadratum L P, nẽpe N E, ſeu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, ſcilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad N X, vt H E ad E I, & per X ducamus R X Y parallelam H E, & iungamus E R, O R, & H R producatur ad T quouſque ſecet E T parallelam ipſi O R. Oſtendetur (quemadmodum ſupra dictum eſt) quod E T R, B A C ſunt iſoſcelia, & ſimilia. Et quia E H ad E I eſt vt O N ad N X; nempe vt O V ad V R, nempe vt O V in V R, quod eſt æquale ipſi E V in V H ad quadratum V R; hæc autem proportio componitur ex E V, nempe S R ad V R, nempe ad E S, & ex proportione V H ad V R, nempe S R ad S T, ex quibus componitur proportio quadrati R S ad S T in S E; igitur quadratum R S ad E S in S T eandẽ proportionem habet, quàm H E ad E I; & propterea planum ſectionis D E F in cono, cuius vertex eſt R, & illius trianguli latera R E, R T, producit ſectionem hyperbolicam, cuius inclinatus eſt E H, & erectus E I; quare conus cuius vertex eſt R, continet ſectionẽ D E F, nec non continet illam alius conus, huic cono ſimilis, cuius vertex eſt Y; & hi duo coni ſunt ſimiles cono A B C, nec continet illam tertius alius conus, qui ſimilis ſit cono A B C, nam (ſi hoc fieri poſſibile eſt) contineat illam alius conus, cuius vertex Z, & puuctum verticis illius incidet in arcum E L H, & iungamus O Z, quæ ſecet H E in e:

c f g h

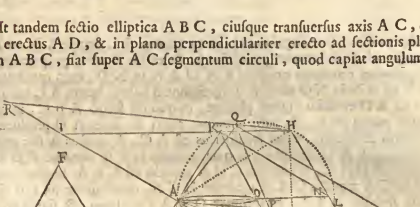
Inde

Inde demonſtrabitur, quod H E ad E I habebit neceſſario eandem proportionem, quàm O *e* ad *e* Z; quod eſt abſurdum, quia haberet eandem proportionem, quàm O N ad N X. Quapropter non continet illam tertius alius conus ſimilis cono A B C.

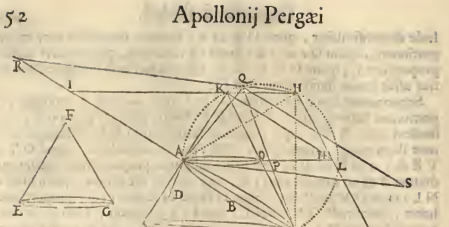
Supponamus iam, quadratum B Q ad quadratum Q A maiorem proportionem habere, quàm H E ad E I. Dico, exhiberi non poſſe conum
i ſimilem cono A B C, qui contineat ſectionem D E F. Alioquin contineat illam conus, cuius vertex eſt R, & demonſtrabitur, quod O V ad V R ſit, vt H E ad E I, quæ habet minorem proportionem, quàm quadratum B Q ad quadratum Q A, quæ oſtenſa eſt eadem, quàm O N ad N L; ergo O V ad V R; nempe O N ad N X minorem, proportionem habet, quàm eadē O N ad N L, quod eſt abſurdum. Non igitur continebit ſectionem D E F conus ſimilis cono A B C. Vt propoſitū fuerat.

PROPOSITIO XXXI.

a Sit tandem ſectio elliptica A B C, ciuſque tranſuerſus axis A C, & erectus A D, & in plano perpendiculariter erecto ad ſectionis planum A B C, ſiat ſuper A C ſegmentum circuli, quod capiat angulum



æqualem angulo F, cumque bifariam diuidamus in H, & iungamus A H, C H, & ex H educamus H I, quæ ſecet circulum in K, & occurrat ſubtenſæ extra circulum in I; ſitque H I ad I K, vt A C ad A D: & educamus H L M eaſdem conditiones habens; & iungamus C K, A K, Lem. 10. huius.
b ducaturque K N parallela A C, & A N parallela H I, quæ ſecet K C in O. Quia H I in I K (quod eſt æquale ipſi C I in A I ad quadratum I K) eſt vt A C ad A D; & proportio C I in A I ad quadratum I K componitur ex ratione C I ad I K, nempe K N ad N O (propter ſimili-



tudinem duorum triangulorum), & ex ratione A I, nempe K N ad I K, nempe ad A N (propter parallelas), & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati K N ad A N in N O; ergo quadratum K N ad A N in N O eandem proportionem habet, quàm A C transuersus ad A D erectum; igitur planum, in quo est sectio A B C, in cono cuius vertex est K, & basis circulus, cuius diameter A O producit sectionem ellipticam, cuius transuersus est A C, & erectus A D: quare sectionem B A C continet; & quia angulus H K C, nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A, remanet angulus H C A æqualis O A K; critque H C A, quod simile est F E G, simile quoque O K A; quapropter O K A isosceleum, & simile est ipsi F E G; igitur conus, cuius vertex est K, similis est dato cono F E G; & quidem continet sectionem A B C, vti diximus. Similiter quoque ostendemus, quod eandem sectionem continebit alius conus, cuius vertex est L, si educantur A L, L C. Et alius conus, præter hos duos, iuxta hanc hypothesin non continebit illam: Alioquin contineat illam alius conus, cuius vertex sit Q, & triangulum A Q P: & ostendetur, quemadmodum supra dictum est, quod communis sectio plani, per axim illius coni ducti, erecti ad planum sectionis A B C, & plani sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, & sit Q; ducamus per H Q rectam H R, & iungamus C Q, A Q, & educamus A S parallelam H Q R, & Q S parallelam A C, erit Q A P triangulum illius coni, & est isosceleum, erit quadratum Q S ad A S in S P, vt C R in R A; quod est æquale ipsi H R in R Q, ad quadratum R Q, nempe H R ad R Q; ergo H R ad R Q est, vt A C ad A D, quæ est, vt H I ad I K; ergo diuidendo permutandoq; H K maior ad H Q minorem, eandem proportionem habebit, quàm K I minor ad R Q maiorem: & hoc est absurdum. Non ergo reperiri potest tertius conus, continens sectionem B A C. Et hoc erat ostendendum.

13. & 14. lib. 1.
Defin. 9. huius.
Defin. 8. huius.
c
d
e

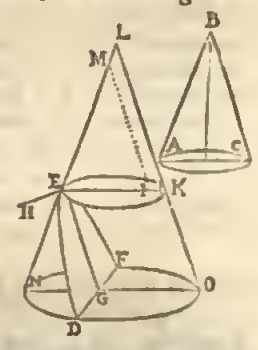
Notę

Notæ in Propoſit. XXIX.

a ET faciamus ſuper E K triangulum ſimile triangulo A B C, &c. *Nimirum, fiat angulus K E L, æqualis angulo A, & angulus L fiat æqualis angulo B.*

b Ergo L K, quæ eſt latus trianguli tranſeuntis per axim E G parallelũ eſt E G, &c. *Legi debet, vt in textu videre eſt. Hoc conſtat ex conſtructione; nam duo anguli alterni G E K, , & L K E æquales ſunt eidem angulo C.*

c Et propterea planum, in quo eſt ſectio D E F producit in eono ſectionem parabolicam, &c. *Quoniam planum circuli, cuius diameter E K perpendiculare eſt ad planum trianguli L E K: igitur ſi ducatur planum N F O æquidiſtans circulo E K ſecans planum D E F in rectâ linea D G F, erit quoque circulus, & perpendicularis ad planum triãguli per axim L E K: ſed ex conſtructione planum D E F perpendiculare quoque erat ad idem triangulum per axim E L K; igitur D F communis ſectio eorundem planorum perpendicularis quoque erit ad idem planum L N O, & efficiet angulos rectos cum diametro circuli N O, & cum E G, quæ in eodẽ plano exiſtunt, & cũ illo conueniunt in puncto G; ſuntq; E G, & L O parallelæ: igitur* 11. lib. 1. *planum ſectionis D E F producit neceſſariò in cono L N O producto parabolam.*



d Igitur H E ad E L, quæ eſt æqualis ipſi L K eamdem proportionem habet, quàm quadratum E K ad quadratum K L, &c. *Quoniam conus L E K ſimilis eſt cono recto A B C erit quoque rectus: & propterea duo latera trianguli per axim E L, & L K æqualia erunt inter ſe, & ideo E K ad K L, atque ad E L eandem proportionem habebit, &c.*

e Et dico, quod ſectio D E F non reperitur in alio cono ſimili cono A B C, cuius vertex ſit ex parte plani ſectionis præter hunc conum, &c. *Ideſt. Nullus alius conus rectus continebit eandem parabolam D E F, qui ſit ſimilis cono A B C, & vertex E parabole magis, aut minus recedat à vertice coni, quàm E L.*

f Ergo E M eſt indirectum ipſi E L, &c. *Quia D G baſis ſectionis conica perpendicularis eſſe debet ad G O, & ad G E, & ideo ad triangulum per axim a triuſque coni recti L E K, & M E I; & conueniunt plana eorundem triangulorum in E G axi conicæ ſectionis geniti ab eis; ergo dicta triangula in eodem plano exiſtunt per rectas E G, & G O ducto; & in vtroquè cono triangulorum per axes latera L K, & M I parallela ſunt eidem axi E G paraboles: ergo L K, M I parallelæ ſunt inter ſe, & anguli L, & M æquales ſunt propter ſimilitudinem triangulorum per axes in conis ſimilibus; igitur L E, & M E ſunt quoq; parallelæ, & conueniunt in E vertice paraboles; ergo in directum ſunt conſtitutæ.*

Nota

Notæ in Propoſit. XXX.

ITa vt non ſit proportio quadrati axis coni, B Q ad quadratum ſemidiametri baſis illius vt C Q minor proportione figuræ ſectionis, &c. a
Rurſus datus ſit conus rectus A B C, cuius axis B Q ſemidiameter circuli ba-

ſis ſit C Q, exhiberi aebet alius conus ſimilis dato, qui datam hyperbolen D E F contineat; oportet autem, vt quadratum axis coni B Q ad quadratum ſemidiametri illius Q A non habeat maiorem proportionem, quàm habet axis tranſuerſus H E ad latus rectum E I.

Et producamus L H ad E Occurret in K perpendiculari rectæ ad punctum E lineæ H, &c. *Ideſt ſi ducatur recta linea E K in plano circuli H L E perpendicularis ad H E, ſeu parallela ipſi L N coniuncta recta linea H L ſecabit reliquam æquidiſtantium E K in K.* b

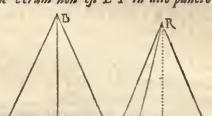
Quapropter K L E ſimile eſt A B C, quia æquicrus etiam eſt: ſi autem ponamus K L E triangulum coni, cuius vertex L, & planum trianguli illius erectum ad planum D E F; vtique planum, quod eſt in ſectione producit in cono ſectionẽ hyperbolicã, cuius axis E G, & inclinatus E H, &c. *Quoniam in duobus triangulis A B C, & E L K ſunt anguli verticales B, & L æquales inter ſe, cũ externi M B C, & H L E æquales facti ſint; & angulus H L N æqualis ſit interno, & oppoſito K, & angulus N L E æqualis eſt alterno angulo L E K propter parallelas N L, E K, & quilibet corũ eſt medietas externi anguli H L E; ergo angulus K æqualis erit angulo L E K, & triangulũ L E K erit iſoſcelium, ſed triangulum A B C per axim coni recti ductum eſt quoque iſoſcelium; igitur duo anguli ſupra baſim A, & C æquales ſunt inter ſe; erant autem prius verticales anguli B, & L æquales; igitur triangula A B C, & E L K æquiangula, & ſimilia ſunt. Ducatur poſtea recta linea L P perpendicularis ad baſim E K, quæ eam ſecabit bifariam in P, & ducatur planum per E K perpendiculare ad planum E L K, & in eo diametro E K fiat circulus, qui ſit baſis coni, cuius vertex L, & ducatur planum F D a æquidiſtans plano circuli E K; efficietur* c

alius

alius circulus F D a perpendicularis ad planum trianguli per axim L E K; erat autem ex conſtructione planum hyperboles D E F perpendiculare ad idem planum per axim E L K; igitur duorum planorum communis ſectio, quæ ſit F G D perpendicularis quoque erit ad planum trianguli L E K: & ideo efficiet angulos F G E, & F G a rectos, & G E H productâ ſubtendit angulum externum trianguli conici E L K; quapropter planum D E F efficiet in cono E L K hyperbolen, cuius axis tranſuerſus erit H E.

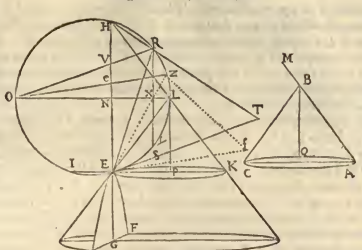
d Alias contineat illam alius conus ſimilis cono A B C, ſitque vertex eius R in plano L E G, & duo latera trianguli illius ſint E R, T R; ergo angulus E R T æqualis eſt E L K, & eſt in circumferentia arcus E L H; ergo T R ſi producatur, occurret H: &c. *Senſus huius textus corrupti talis eſt: Si enim fieri poteſt, vt aliquis alius conus, vt E R T, qui ſimilis ſit cono A B C, vel E L K, contineat eandem hyperbolam D E F, & conorum vertices R, & L ad eaſdem partes tendant, erunt duo plana triangulorum per axes conorum ductа perpendicularia ad planum ſectionis D E F; alias E G non eſſet axis hyperbole D E F; Et quia coni ſupponuntur ſimiles erunt quoque triangula per axes E L K, & E R T ſimilia inter ſe; & ideo anguli verticales E* ex Def. 8. *L K, & E R T æquales inter ſe erunt, atque ſubſequentes anguli E L H, & E R H æquales quoque inter ſe erunt, & ſubtendunt commune latus tranſuerſum H E; igitur duo anguli E L H, & E R H in eodem circuli ſegmento conſiſtunt. Textus igitur corrigi debebat vt dictum eſt.*

e Atque T S æqualis eſt ipſi E, & T S ad S E eſt, vt T R ad R H, quæ eſt vt E V ad V N; ergo E V æqualis eſt V H, &c. *In duobus triangulis iſoſcelijs inter ſe ſimilibus A B C, & E R T ab æqualibus angulis verticalibus A B C, & E R T ducuntur rectæ lineæ B Q, R S ſecantes baſes in Q, & S: eſtque quadratum R S ad rectangulum E S T, vt quadratum B Q ad rectangulum A Q C, & ſecatur A C bifariam in Q; oſtendendum eſt E T in duas partes æquales in S quoque ſecari. Si enim hoc verum non eſt E T in alio puncto*



bifariam duidetur vt in b *iungaturque R* b. *Quoniam à verticibus triangulorum A B C, & R E T iſoſcelium ducuntur rectæ lineæ B Q, R* b *dinidentes baſes bifariam in Q,* b, *ergo anguli ad Q, &* b *ſunt recti, & erant anguli A, & E æquales (propter ſimilitudinem eorundem triangulorum) igitur triangula A B Q, & E R* b *ſimilia ſunt, ideoq; B Q ad Q A erit vt R* b *ad* b *E, & quadratũ B Q ad quadratum Q A erit vt quadratũ R* b *ad quadratũ* b *E; erat autem quadratum R S ad rectangulum E S T vt quadratum B Q ad quadratum Q A; ergo quadratum R* b *ad quadratum* b *E eandem proportionem habet, quàm quadratum R S ad rectangulum E S T; eſtque quadratum R* b *minus quadrato R S (cum perpendicularis R* b *minor ſit quàm R S) quarè quadratum ex* b *E ſemiſſe totius E T minus erit rectangulo E S T ſub ſegmentis inæqualibus eiusdem E T contento; quod eſt abſurdum: quarè neceſſario E T bifariam ſecatur in S. Poſtea propter parallela R S, & H E, vt T S ad S E ita erit T R ad R H; & propter parallelas R V, & E T erit E V ad V H, vt T R ad R H, ſeu T S ad S E: oſtenſa autem fuit T S æqualis S E; igitur &*

V aqua-



V æqualis est V H, quod est absurdum.

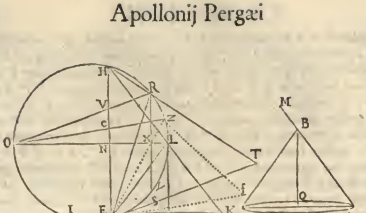
Patet quadratum L P nempe N E, seu O N in N L ad quadratum E P, nempe ad quadratum N L, scilicet O N ad N L habere minorem proportionem, quàm H E ad E I: ponamus iam O N ad Z X, vt H E ad E I; & per X ducamus X R, & iungamus E R, &c. *Supposita constructione prioris casus, quandò conus rectus E L K factus est similis cono A B C quadratum L P ad quadratum E P habebat eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad quadratum Q A: modo in hac altera suppositione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere minorem proportionem, quàm E H ad E I; igitur O N ad N L minorem proportionem habebit, quàm H E ad E I; & fiat O N ad N X vt H E ad E I, erit N X minor quàm N L, & ideo punctum X intra circulum cadet, & per X ducta R X T parallela H E; vtique secabit circulum in duobus punctis, vt in R, & T. Quod verò recta R X T duci debeat parallela ipsi H E, non quomodocunque, patet ex contextu sequenti, nam debent O X, O R secari in N, & V proportionaliter, quarè textus debuit omnino corrigi.* f

Ostendetur, quemadmodum dictum est, quod E T R, & A B C sunt isosceles, & similia, &c. *Quoniam arcus circuli E O, & O H æquales sunt inter se ex constructione, erunt anguli E R O, & O R H æquales inter se, & propter parallelas O R, & E T est angulus O R E æqualis alterno T E R; atque externus H R O æqualis est interno, & opposito R T E; igitur duo anguli R E T, & R T E æquales sunt inter se; & propterea triangulum E R T erit isosceles.* g *Rursus quia duo anguli E L H, E R H in eodem circuli segmento constituti æquales sunt inter se, & erat ex constructione angulus M B C æqualis angulo H L E; igitur anguli H R E, & M B C æquales sunt inter se, & ideo consequentes anguli verticales E R T, & A B C æquales erunt inter se, est quoque triangulum A B C per axim coni recti isosceles igitur duo triangula E R T, & A B C similia sunt inter se. Et quia vt dictum est O N ad N X eandem proportionem habet, quàm H E ad E I, atque propter parallelas V N, & R X est O V ad V R vt O N ad N X, & sumpta communi altitudine V R erit rectan-*

rectangulum O V R ad quadratum V R, vt H E ad E I : est verò rectangulum H V E æquale rectangulo O V R (propterea quod duæ rectæ lineæ O R, H E se se secant intra circulum in V) igitur rectangulum H V E ad quadratum V R eandē proportionē habet quàm H E ad E I; cumq; proportio rectanguli H V E ad quadratum V R ex compositis sit ex duabus rationibus, ipsius E V ad V R, seu R S ad S E, (propter parallelogrammum V E S R), & ex proportione H V ad V R, quæ eadem est proportioni ipsius R S ad S T (propterea quod triangula H V R, & R S T similia constituuntur ab æquidistantibus H V, R S, & V R, S T) quapropter duæ proportiones R S ad S E, & R S ad S T componentes proportionem quadrati R S ad rectangulum E S T eadem sunt rationibus, ex quibus componitur proportio rectanguli H V E ad quadratum V R; & ideo quadratum R S ad rectangulum E S T eandem proportionem habebit, quàm rectangulum H V E ad quadratum V R, seu eandem quàm habet H E ad E I; igitur si fiat conus, cuius vertex R, & basis circulus diametro E T, cuius planum perpendiculare sit ad planum trianguli E R T, erit triangulum E R T ipsius sectilium per axim prædicti coni extensum, atq; ad ipsum sectionis D E F planum est quoque perpendiculare, & eius axis G E subtendit angulum E R H, qui deinceps est angulo verticis; igitur planum D E F in cono E R T generat hyperbolen, cuius axis inclinatus est E H, & erectus E I: & propterea conus E R T comprehendit hyperbolen D E F. Rursus si recta R X producatur quousque fiet peripheriam circuli L E ex altera parte in puncto T; atque denuo coniungantur rectæ lineæ E T, & H T, quæ extendatur quousque conueniat cum rectæ lineæ ex puncto E parallelæ ipsi O T in puncto aliquo, quod concipiatur esse d; fieri poterit alius conus (cuius vertex T, basis circulus diametro E d erectus ad planum trianguli) similis cono E R T, sine A B C: Ostenditur (sicuti modo dictum est, quod idem planum H D F efficiet in cono T d E eandem hyperbolen D E F.

h Inde demonstrabitur quod E H ad E I necesse est, vt habeat eandem proportionem, quàm O e ad e Z : & hoc est absurdum, &c. *quia conus Z E f continet hyperbolen D E F necessariò eius axis transuersus E H subtendet angulum H Z E, qui deinceps est angulo verticis trianguli per axim; & propter similitudinē conorū rectorum, sunt triangula per axes A B C, E R T, & E Z f similia inter se, & anguli verticales B, Z, & R æquales erunt inter se; ideo consequentes anguli M B C, & H R E, nec non H Z E æquales erunt inter se, & subtenduntur ab eadem rectæ lineæ H E; ergo in eodem circuli segmento consistunt: & propterea punctum Z in circuli peripheria H Z E cadit. Postea (vt in propositione 53. primi libri, & in hac eadem propositione demonstrauit Apollonius) constat quod H E ad E I habet eandem proportionem, quàm O e ad e Z; & prius O V ad V R erat vt H E ad E I; ergo O V ad V R eādem proportionem habet quàm O e ad e Z; sed quia punctum Z non cadit in R, neque in T alias conus E Z f non esset alius à præcedentibus E R T, & E T d; ergo O e ad e Z non habet eandem proportionem, quàm O V ad V R, quod est absurdum.*

i Et demonstrabitur quod O V ad V R sit vt H E ad E I, &c. *Repetatur denuo constructio primi casus huius propositionis, vt fiat conus rectus L E K similis cono A B C, tunc quidem quadratum L P ad quadratum E P habebit eandem proportionem, quàm O N ad N L, seu quàm quadratum B Q ad*

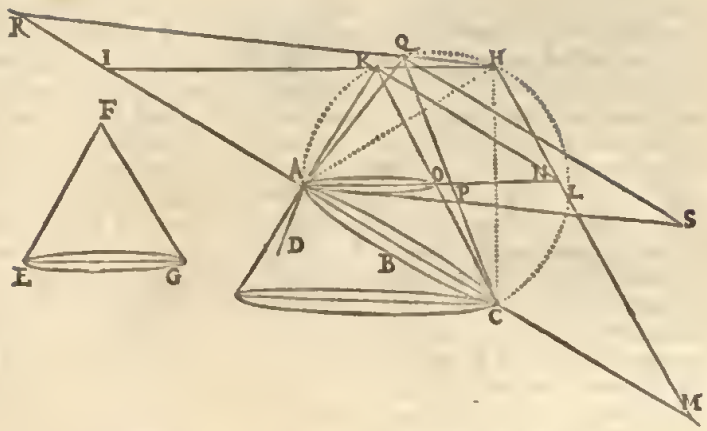


quadratum Q A ; ſed in hac poſtrema ſuppoſitione conceditur quadratum B Q ad quadratum Q A habere maiorem proportionem , quàm H E ad E I ; igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit , quàm H E ad E I ; ſed quia conus E R T ponitur continere ſectionem D E F : habebit O V ad V R eandem proportionem , quàm H E ad E I (vt ex 53. primi deducitur , & in hac propoſitione denuò factum eſt): igitur O N ad N L maiorem proportionem habebit quàm O V ad V R ; oſtenſa autem fuit O N ad N X , vt O V ad V R ; ergo O N ad N L maiorem proportionem habebit , quàm O N ad N X : quod eſt abſurdum , nam N X minor eſt , quàm N L .

Notæ in Propoſit. XXXI.

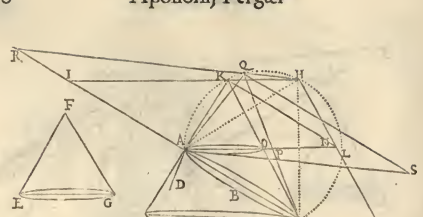
DEinde ſit ſectio elliptica A B C, & tranſuerſa illius A C, & erectus A D , & circunducamus ſuper A C in plano erecto ad ſectionis planum A B C ſegmentum circuli , quod capiat angulum æqualem angulo F : &c. *Rurſus conus exhiberi debet ſimilis cono dato E F G , qui datam ellipſim A B C contineat , ſitque axis tranſuerſus ellipſis C A , eiuſque latus rectum A D .* a

Quia H I in I K, quod eſt æquale ipſi C I in I A, ad quadratum I A eſt , vt A C ad A D , & C I in A I ad quadratum I K nempe K N ad N O propter ſimilitudinem duorum triangulorum , & ex A I , nempe N K ad I K nempe A N vt parallelas conſtituamus lineas , & ex his duabus proportionibus componitur proportio quadrati N K ad A N in N O, &c. *Senſus huius textus valdè corrupti hic eſt . Quia ex conſtructione H I ad I K erat vt C A ad A D , & ſumpta communi altitudine I K , erit rectangulum* b



lum H I K ad quadratum I K, vt H I ad I K seu vt C A ad A D; eliqueꝫ rectangulum C I A æquale rectangulo H I K; igitur rectangulum C I A ad quadratum I K eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; componitur verò proportio rectanguli C I A ad quadratum I K ex duabus proportionibus laterum C I ad I K, & A I ad I K: & propter parallelas N O, I K, atque K N, & C I, & latus commune C O K duo triangula C I K, & K O N similia sunt; igitur K N ad N O est, vt C I ad I K; & quia in parallelogrammo I N latera opposita sunt æqualia K N ad N A eandem proportionem habebit quàm A I ad I K; quapropter duæ rationes K N ad N O, & K N ad N A componunt proportionem quadrati K N ad rectangulum A N O, quæ eadem est proportioni rectanguli C I A ad quadratum I K; & propterea quadratum K N ad rectangulum A N O eandem proportionem habebit, quàm A G ad A D. Si igitur fiat conus, cuius vertex K basis circulus diametro A O descriptus, cuius planum perpendiculare sit ad planum A K C; atque per rectam A C æquidistantem ipsi K N planum ducatur perpendiculare ad idem planum A K C generabitur ellipsis, cuius axis transuersus erit A C, & latus rectum A D. Textus igitur corrigi debere ex dictis manifestum est.

C Et quia angulus H K C nempe A O K æqualis est H A C, & angulus C H A æqualis est C K A remanet angulus H C A æqualis O A K erit H C A simile F E G simile quoque O K A; ergo, &c. *Quoniam ex constructione segmentum A H C capax est anguli æqualis angulo F erit angulus A H C æqualis angulo F; & quia peripheria A H C secta est bifariam in H; ergo subtensa latera A H, & H C æqualia sunt: & propterea triangulum A H C isosceles, & simile erit triangulo E F G; propterea quod anguli verticales æquales sunt inter se; sunt verò duo anguli A H C, & A K C in eodem circuli segmento; ergo æquales sunt inter se; pariterque duo anguli C A H, & C K H in eodem circuli segmento constituti, æquales sunt inter se, & propter paralle-*



las A O, K H sunt anguli alterni A O K, & H K O æquales inter se; igitur angulus A O K æqualis erit angulo C A H; & propterea in duobus triangulis K A O, & H C A tertius angulus A C H æqualis erit tertio angulo K A O, & propterea triangulum K A O isosceliũm, & simile erit triangulo H A C, siue F G E; igitur conus, cuius vertex K basis circulus A O perpendicularis ad planum trianguli A K O erit conus rectus, & similis cono E F G dato.

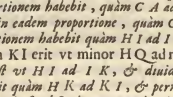
Alioquin contineat illum conus alius, cuius vertex sit Q, & trianguld
lum Q A P, & ostendetur quemadmodum dictum est, quod planum transiens per axim illius coni erectum ad planum sectionis A B C sectio communis cum plano sectionis est A C, & quod punctum verticis illius coni sit in circumferentia segmenti A H C, &c. *Quin supponitur, quod conus Q A P similis cono E F G contineat ellipsim A B C, cuius axis transuersus C A, & latus rectum A D; igitur triangulum per axim coni ductum Q A P, nedum simile erit triangulo E F G, sed etiam perpendiculare erit ad planum ellipsis A B C, & propterea consistet in plano circularis segmenti A H C pariter erecti ad planum A B C, per idem axim A C extensum, & est angulus A Q C æqualis angulo verticali F propter similitudinem duorum triangulorum, & ex constructione primæ partis huius propositionis, est segmentum A H C capax anguli æqualis angulo F; secaturque bifariam in H; igitur angulus A Q C æqualis ipsi F in peripheria segmenti A H C existit. Ducatur postea Q S parallela lateri transuerso ellipsis A C, quæ secet basim trianguli per axim Q A P productam in S, & à puncto H bipartite diuisionis segmenti A H C coniungatur recta linea H Q producaturq; quousq; occurrat rectæ lineæ C A in R. Quoniã duo anguli A H C, & A Q C in eodẽ circuli segmento constituti æquales sunt inter se; pariterq; duo anguli C A H, & C Q H in eodẽ circuli segmento existentes sunt æquales, & est angulus A P Q æqualis angulo P A Q in triangulo isoscelio Q A P; & angulus P A Q æqualis angulo C A H in triangulis similibus; igitur angulus A P Q æqualis est alterno angulo P Q H; & propterea*

recta

recta linea H R parallela est ipsi A S; & erat prius Q S parallela ipsi C R, & recta linea C P Q est communis; igitur triangula C R Q, & Q S P similia sunt, & spatium R S parallelogrammum est; eritque vt prius dictum est proportio quadrati Q S ad rectangulum A S P eadem proportioni rectanguli C R A ad quadratum R Q: est verò quadratum Q S ad rectangulum A S P, vt ellipsis axis transuersus C A ad eius latus rectum A D, propterea quod conus A Q P supponitur continere ellipsim A B C; igitur rectangulum C R A ad quadratum R Q eandem proportionem habet, quàm C A ad A D; est verò rectangulum H R Q aquale rectangulo C R A; igitur rectangulum H R Q ad quadratum R Q seu H R ad R Q eandem proportionem habebit, quàm C A ad A D; sed in priori casu facta est H I ad I K in eadem proportione, quàm C A ad A D; igitur H R ad R Q eandem proportionem habebit quàm H I ad I K.

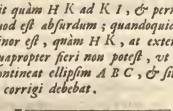
e Ergo diuidendo H K maior ad minorem K I erit vt minor H Q ad maiorem Q R, &c. *Ideest quia H R ad R Q est vt H I ad I K, & diuidendo H Q ad Q R eandem proportionem habebit quàm H K ad K I, & permutando H Q ad H K erit vt Q R ad K I: quod est absurdum; quandoquidem in circulo subtensa H Q à centro remotior minor est, quàm H K, at exterius comprehensa Q R maior est, quàm K I. Quapropter fieri non potest, vt aliquis alius conus A Q P præter iam dictos contineat ellipsim A B C, & sit similis dato cono E F G. Textus ergo confusus corrigi debebat.*

Ad propositionem 77. libri quinti egi de contactibus circulorum, & sectionum conicarum, eorumque admirabilia symptomata à nemine adhuc quod sciam excogitata patefeci, non tamen prædicta disceptatio omnino perfecta, & absoluta fuit: itaque iuxta loci exigentiam hic afferam coronidis loco eiusdem doctrinæ complementum.

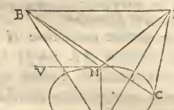


PROP. 15. Addit.

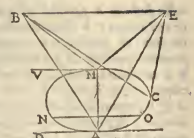
Per rectam lineam coniungentem vertices duorum conorum eandem basim habentium ducere duo plana vtrumque conum tangentia: oportet autem rectam lineam vertices coniungentem extra peripheriam circuli communis basis cadere.

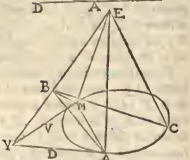


Circulus A M C sit communis basis duorum conorum, quorum vertices B, & E, & coniuncta recta linea B E extra peripheriam circuli A M C cadat: duci debent duo plana tangentia vtrosque conos per eandem rectam lineam B E extensa. Et primo recta linea E B plano circuli A M C aquidistet, & ducto quolibet plano per E B circulum secante in recta linea N O erit ipsa N O parallela E B; tunc ducatur diameter A M perpendicularis ad N O, & per A, & M ducantur A D, M V tangentes circulum, siue perpendiculares ad idem



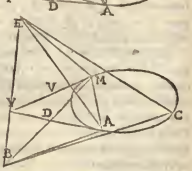
idem diametrum M A; erunt igitur tangentes A D, & M V parallelæ eidem N O, erat autem E B parallela ipſi N O; igitur duæ circulum tangentes A B, & M V parallelæ ſunt idem E E; & propterea A D, & E B in eodem ſunt plano, vtrumque conum tangentem cum per vertices E, & B ducatur, & per A D baſis circulum tangentem. Eadem ratione M V, & E B in eodem plano vtrumque conum tangente exiſtent. Si verò rectæ E B plano circuli non æquidiſtat producta alicubi planum eiuſdem circuli ſecabit extra circulum ipſum, vt in Y, & tunc quidem à puncto Y extra circulum poſito ducantur duæ contingentes Y A, & Y M. Manifeſtum eſt, rectas lineas A Y, B E in eodem plano iacere: tranſit verò prædictum planum per vertices B, & E duorum conorum, atque per Y A tangentem circulum baſis communis; igitur planum A E B vtrumque conum contingit. Eodem modo planum E B M ex altera parte vtrumq; conum tanget. Et hoc erat faciendum.



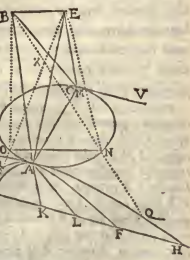


PROP. 16. Addit

In qualibet coniſectione H A I cuius diameter A L non ſit axis, per eius verticem A aliam coniſectionem in eodem plano deſcribere, quæ priorem abſcindat, atque eadem rectâ linea vtramq; ſectionem tangat in puncto mutuæ earum abſciſionis.

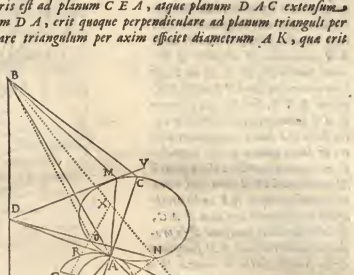


Sicut in conſtructione prop. 11. & 12. addit. factum eſt, deſcribatur conus B A C comprehendens ſectionem H A I, cuius vertex B baſis circulus A M C per ſectionis verticem A ductus, & triangulum per axim B A C efficiat diametrum A L: & in duobus circulis æquidiſtantibus A C M, & in eo, qui per ſectionis baſim H I ducitur idē planum ſectionis conicæ deſignet duas parallelas A D, H I, & planum trianguli per axim efficiat circulorū diametros C A, & eum, qui per L ducitur æquidiſtantes inter ſe: ergo ſicuti baſis H I perpendicularis eſt ad circuli diametrum per L ductam, ſeu ad baſim trianguli per axim, ita D A



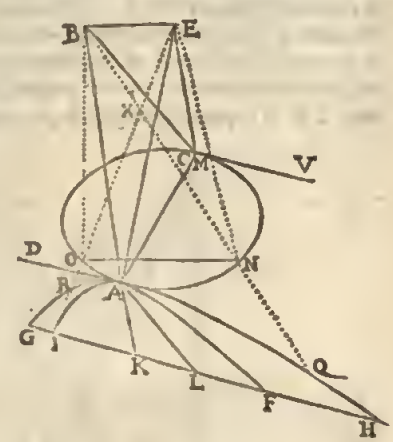
perpen-

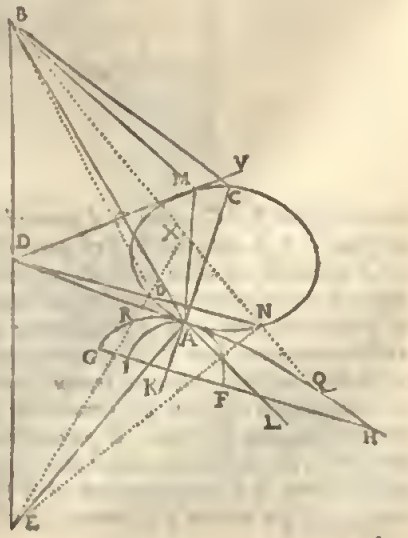
perpendicularis eſt ad circuli diametrum C A, & propterea A D, planorum H A I, & A C M communis ſectio, tanget circulum A C, & ideo ſuperficiem ipſam conicam, & ſectionem in ea exiſtentem continget; & diameter A L non erit perpendicularis ad tangentem, ſeu ordinatim applicatam A D per verticem A, alias A L eſſet axis, quod non ponitur. Deinde in plano D A E ex A ducatur recta linea A E perpendicularis ad A D ſupra, vel infra circulum, & vertice quolibet puncto E ſumpto in recta linea A E, & baſi circulo A C M fiat alter conus E A C, in cuius ſuperficie planũ D A H I deſignet ſectionẽ F A G, & in ea triangulum per axim E A C efficiat diametrum A K: Et quia eadem recta linea D A perpendicularis eſt ad A C, atque ad A E ſe ſecantes in A; ergo D A perpendicularis eſt ad planum C E A, atque planum D A C extenſum per perpendicularem D A, erit quoque perpendiculare ad planum trianguli per axim C E A, quare triangulum per axim efficit diametrum A K, qua erit



axis ſectionis F A G, atque D A perpendicularis erit ad axim A K exiſtentem in plano C E A, ad quod D A eſt perpendicularis, & cum ea conuenit: quare D A ordinatim ad axim applicata per verticem A tanget ſectionem F A G, quæ 32. lib. 1. *prius in eodem puncto A tangebat ſectionem H A I in eodem plano exiſtentem; & propterea eadem recta A D vtramque ſectionem tangit in puncto A. Poſtea coniungatur recta linea B E, & quia recta lineæ B A, A D, A E ſunt in eodem plano tangente vtrumque conum (cum per vertices B, & E, atque per D A contingentem circulum baſis communis ducatur) & E A, & B A angulum conſtituunt, cum E A poſita ſit perpendicularis ad D A, at B A ad eandem ſit inclinata, & exiſtunt in eodem plano; ergo recta B E parallela eſt, aut ſecat contingentem D A extra circulum vt in D. Poterit igitur ex propoſ. 15. additarum duci per rectam B E planum aliud B E M V vtrumq; conum contingens,*

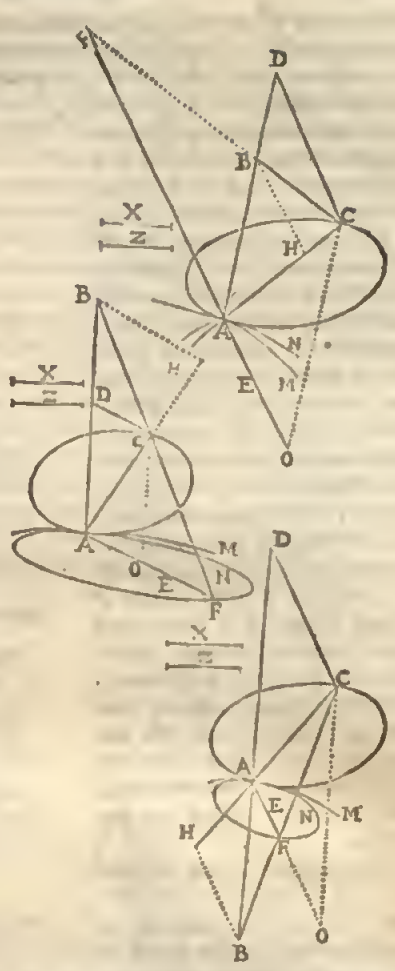
& per rectam B E extendatur aliud planum E N O B inter duo plana contingentia prope verticem A vbicunq; cadens, quod secet vtrumque conum, & circulum basis in recta linea N O, & superficies duorum conorum in lateribus B N Q, E N, B O, E O R, quarum B N occurret semisectioni A H in quolibet eius puncto Q prope verticem A, eo quod portio A H, & peripheria A N C excepto puncto eius A tota inter duo plana conos tangentia intercipiuntur; & eadem ratione E O occurret semisectioni A G in quolibet eius puncto R vltra verticem A ad partes G. Et quoniam in eodem plano trianguli E N B (scilicet plani B N O E secantis vtrumque conum) à puncto E ducitur recta linea E O intra angulum N E B; ergo vlterius producta secabit latus B N subtendentem angulum N E B inter puncta N, & B, vt in X, & propterea recta linea N X intra triangulum E N O, & ideo intra conum E A C intercepta erit; similiter recta linea O X intra triangulum B N O, & intra conum B A C intercluſa erit: quare quodlibet aliud punctũ Q lateris conici B N citra, vel vltra intercluſã portionẽ N X cadet necesario extra superficiem coni E A C, & ideo quodlibet punctum Q in productione lateris coni B N ſumptum & in ſemiſſe ſectionis conica H A prope verticem A cadet extra ſemiſſem ſectionis F A, quæ in ſuperficie coni E A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Pari modo quodlibet aliud punctum R lateris conici E O citra, vel vltra intercluſam portionẽ X O cadet extra ſuperficiem coni B A C, & ideo quodlibet punctũ R ſumptum in mediętate ſectionis conica A G prope verticem A cadet extra mediętatem ſectionis A I, quæ in ſuperficie coni B A C exiſtit, & ad eaſdem partes vergit. Igitur ſectio H A I abſcindit coniſectionem F A G in vertice communi A, vbi ambo tanguntur ab eadem recta linea A D. Quod erat faciendum.





PROP. 17. Addit.

Si fuerint quotcunque coni ſuper circulum communem baſis deſcripti, habentes latus commune indefinitè extenſum in triangulis per axes ad baſes perpendicularibus, atque per terminum lateris communis ducatur planum efficiens coni ſectiones tangentes baſim: habebunt illæ latera recta æqualia inter ſe, eritquè ſectio ſingularis, ſi fuerit parabole, vel circulus: ſi verò fuerit ellipſis, aut hyperbole erunt infinitæ.



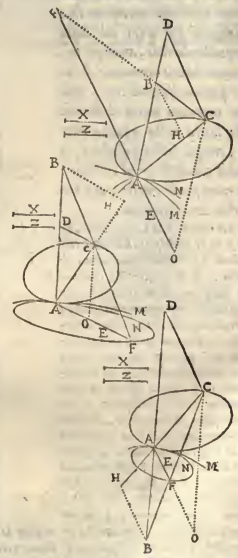
Sit conus A D C ſingularis, & A B C ſit multiplex, habentes circulum A C baſeos communem, & latus A B D productum commune ſumptum ſit in triangulis per axes conorum perpendicularibus ad circulum baſis B C, atque à termino A ducatur planũ ſecans circuli A C planum in recta linea, quæ perpendicularis ſit ad diametrum C A, quod efficiat in cono quidem A B C ſectionem A N, cuius latus rectum ſit X, & latus tranſuerſum A F: in cono verò A D C efficiat ſectionem A M, cuius latus rectum Z, & diameter communis A E; ſitque ſectio A N hyperbole, circulus, aut ellipſis circa axim maiorem, aut minorem; Sectio verò ſingularis A M in cono D A C ſit parabole, & ducatur B H parallela diametro ſectionis A E ſecans circuli diametrum A C in H: & ducatur C O parallela D A ſecans A E in O. Dico latus rectum Z paraboles A M æquale eſſe lateri recto X cuiuſlibet alterius ſectionis A N; & ſupponantur tres parabolæ A M inter ſe æquales earumq; latera recta Z æqualia, quæ in tribus figuris apponẽtur, vt confuſio euitetur. Quoniam vt latus rectum X ad tranſuerſum A F ſectionis A N, ita eſt rectangulum A H C ad quadratum B H: 12. & 13 lib. 1. *hæc verò proportio componitur ex rutione C H ad H B, & ex rutione A H ad H B: eſtque C A ad A F, vt C H ad H B (propter parallelas F A, H B, & ſimilitudinem triangulorum) & vt A H ad H B, ita eſt A C ad C D, ſeu ad*

A O (cum C D , & H B sint parallelæ, atque D O sit parallelogrammum) componunt verò hæ duæ proportiones rationem quadrati C A ad rectangulum F A O : ergo vt rectangulum A H C ad quadratum H B ; ita est quadratum C A ad rectangulum F A O , & propterea vt X ad A F, ita erit quadratum A C ad rectangulum F A O , sed vt F A ad A D (sumptis æqualibus altitudinibus A O , C D) ita est rectangulum F A O ad rectangulum A D C ; quare ex æquali X ad A D erit vt quadratum A C ad rectangulum A D C ;

11. lib. 1. *tandem vt Z latus rectum parabolæ A M ad D A ita est quadratum A C ad rectangulum A D C ; igitur X , & Z ad eandem D A habent eandem proportionem quàm quadratum A C ad rectangulum A D C , & propterea latera recta X , & Z æqualia sunt inter se.*

Et quoniam in quolibet casu sectionis conicæ A N latus rectum X semper æquale est Z lateri recto vnius eiusdemq; paraboles A M ; ergo latera recta X reliquarum omnium sectionum æqualia sunt inter se , licet sectiones illæ sint inæquales , & habeant latera trãsuersa inæqualia , imò neque eiusdem speciei sint. Quod erat propositum.

Admiratione dignum præcipuè est in hac propositione , quod si sectio A N fuerit circulus , vnicus tantummodò erit ; nam circuli latus rectum X æquale erit eius diametro, seu axi transuerso A F ; estque semper latus rectum eiusdem mensuræ , vt ostensum est ; igitur



circuli diameter F A idem semper erit ; & propterea circulus , qui à tali plano generari potest singularis erit , nimirum ille , qui in vnico cono A B C efficit triangula per axim similia , & subcontraria B A C , & B F A. Manifestum quoq; est parabolem A M singularem esse , nam supponitur idem circulus basis A C , & in plano per axim coni cõmune latus A D B semper eosdẽ angulos D A E , & D A C efficere concedituꝛ ; igitur vt sectio A M sit parabole necessariò recta à puncto C duci debet parallela diametro paraboles A E ; cum ergo in triangulo per axim D A C detur basis A C inuariabilis quia circulus vnicus supponitur eiusque

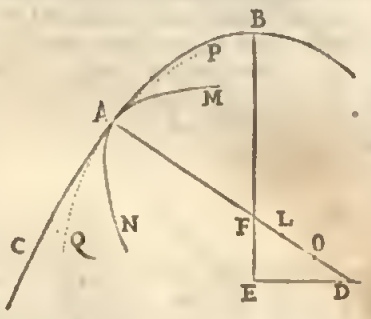
què anguli D, & D A C; dabitur quoq; eius ſpecies ſemper eadem, immo triãgulum per axim inuariabile erit, qui ſemper eodem modo inclinatur ad circulum baſis C A: & propterea conus D A C ſemper idem erit, & eodem modo ſectus, vnde ſectio paraboles A M eadem ſemper omnino erit, habens idem latus rectum Z. In hyperbole verò, aut ellipſi latera C B poſſunt ſupra, vel infra C D parallelam ipſi A E à puncto C ductam, extendi, & ſic efficientur tranſuerſa latera A F inaqualia inter ſe, cumque coni ſectiones A N habeant latera recta X æqualia inter ſe, latera verò tranſuerſa A F inaqualia, & hyperbolarum commune latus rectum habentium illa maior eſt, cuius axis tranſuerſus eſt minor: & duarum ellipſium commune latus rectum habentium, illa maior eſt cuius axis tranſuerſus eſt maior; igitur ellipſes, aut hyperbole, quæ in conis pradicta lege conſtructis deſcribuntur non ſingulares ſed infinita eſſe poſſunt. Vbi notandum eſt, quod ellipſes poſſunt eſſe ea quæ ad maiores, aut ad minores axes adiacent. Pari modo conſtat quod ſi in conis ſuperius expoſitis fiant ſectiones conica conſtituentur ad eundem axim quinque ſectiones commune latus rectum habentes ſe ſe in eodem vertice tangentes, & earum intima erit ellipſis, quæ ad axim minorem adiacet, & non erit vnica, ſed multiplex, & omnes cadent intra circulum, circulus verò intra ellipſim ad axim maiorem accommodatam cadet, hac verò intra parabolen conſtituetur, & inter circulum, & parabolen infinita ellipſes ſe in eodem puncto verticis tangentes collecari poſſunt. Tandem parabole comprahendetur ab infinitis alys hyperbolis ſe ſe in eodem puncto tangentibus.

Maurol. 2. lib. 5. Conic.

Maurol. prop. 28. lib. 5. Conic.

PROP. 18. Addit. ex 51. 52. lib. 5.

Si in qualibet coniſectione B A C ducatur breuiſecans ſingularis D A, tunc qualibet alia coniſectio M A N, cuius axis ſit eadem breuiſecans, & A L ſemiſſis erecti eius minor ſit eadem ſingulari breuiſecante A D. Dico ſectionem M A N interius contingere priorem ſectionem B A C in A.



Quia A L minor eſt, quàm A D ſumi poterit recta A O maior quidem quàm A L, & minor quàm A D, & centro O internallo O A deſcribatur circulus P A Q. Manifeſtum eſt, quod circulus P A Q ſectionem M A N exterius continget in A, at circulus P A Q interius priorem ſectionem B A C tanget, vt oſtenſum eſt, igitur coni ſectio M A N continget ſectionem B A C interius in A. Quod erat oſtendendum.

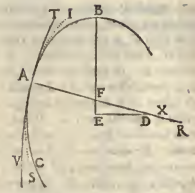
Maurol. pr. 4. 7. 10. 14. lib. 5. Conic. Prop. 12. addit. lib. 5.

Iiſdem poſitis ſi ſectionis T A V, cuius axis A D ſemiſſis eius erecti fuerit A R maior quàm D A, quæ eſt ſingularis breuiſecans ſectionis B A C. Dico, quod T A V exterius contingit ſectionem B A C in A.

PROP. 19. Add.

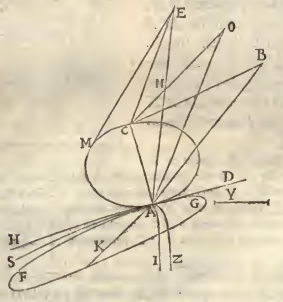
Quoniam A R maior ponitur quã A D sumi poterit recta A X minor quidem, quàm A R, sed maior quã A D, & centro X interuallo X A describatur circulus I A S. Patet (ex demonstratis superius) circulum I S extrinsecus tangere coniectionem B A C; at sectio T V extrinsecus circulum I S tangit in eodem puncto verticis A, ergo sectio T V extrinsecus tangit coniectionem B A C in eodem puncto A. Quod erat ostendendum.

ex pr. 14. addit. lib. 5. Maurol. pr. 3. 6. 9. 13. lib. 5. Conic.



PROP. 20. Addit. ex 16. addit. huius.

Si in eodem plano circulus F A G secuerit coniectionem H A I in puncto A quod non sit vertex axis eius, atque eadem recta linea D A contingat circulum, & sectionem in eodem puncto A; Dico quod quælibet alia coniectio S A Z in eodem plano cum illis posita cuius axis sit idem circuli diameter A K habens Υ semissem lateris recti axis æqualẽ radio circuli F A G: secabit quoque eandem coniectionem H A I in eodem puncto A, atque continget eandem rectam lineam A D in A.



Describantur (vt in 16. additarum huius libri factum est) duo coni A B C, Scalenus comprehendens sectionem H A I, & conus rectus E A C comprehendens circularem subcontrariam sectionem F A G, quorum basis communis sit circulus

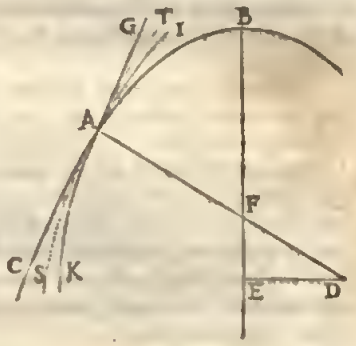
circulus A M C, ita vt idem planum per vertices conorum B, & E, & per A D contingentem eundem circulum basis extensum tangat vtrumque conum in lateribus A B, & A E. Postea si S A Z optatur parabole ducatur in plano A E C ex C recta C N parallela A K axi sectionis F A G; si verò S A Z desideratur hyperbole, aut ellipsis producatur axis A K in directum extra aut intra sectionem, & in recta linea K A O secetur portio A O aequalis lateri transuerso sectionis S A Z, coniungaturque recta linea C O, secans E A in N (eo quod axis K A in plano A E C erecto ad circulum A M C, existit) & vertice N fiat alter conus N C A. Manifestum est in cono recto E A C designari ab eodem plano D A K circulum F A G, at in cono recto N A C efficietur alia sectio conica circa communem axim A K, quasi se mutuo, & eandem rectam lineam D A tangent, in communi vertice A, atque circuli F A G, & sectionis genita in cono N A C duo latera recta erunt aequalia, & propterea sectionis genita in cono N A C semilatus rectum aequale erit radio circuli T seu dimidio erecti sectionis H A I, & si habuerit latus transuersum erit aequale A O; ergo sectio genita in cono N A C, & sectio S A Z circa communem axim A K habent latus rectum commune duplum ipsius T, & etiam commune latus transuersum A O: Quare sectio genita in cono N A C, & S A Z aequales sunt inter se, & congruentes; quapropter idem planum D A K, quod efficit in cono Scaleno B A C sectionem H A I, designat quoque in cono recto N A C sectionem S A Z: habent verò hi duo coni circulum basis communem, & idem planum per contingentem A D, & per vertices B, & N ductum vtrumque conum tangit; igitur (vt demonstratum est in 16. Addis. huius) sectio conica S A Z abscindet aliam sectionem H A I, & amba tangentur ab eadem recta linea D A in eodem puncto mutua abscissionis A. Quod erat propositum.

Prop. 17. addit. huius.

10. huius.

PROP. 21. Addit.

Si in qualibet coniectione B A C ducatur breuisecans singularis D A, & qualibet alia coniectio I A K, cuius axis sit D A, atque semissis lateris recti axis sectionis I A K sit aequalis breuisecanti D A. Dico, sectionem I A K contingere eandem rectam lineam G A, quàm tangit sectio B A C, & abscindere reliquam coniectionem in eodem puncto A.

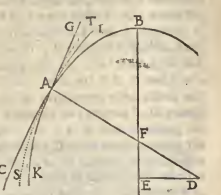


Describatur centro D interuallo D A circulus T A S constat (ex prop. 10. additarum libri quinti) circulum T A S secare coniectionem B A C in A, cumque circa eundem axim D A ponantur circulus T A S, atque coniectio I A K, cuius lateris recti semissis aequalis est D A radio circuli T A S, ergo coniectio I A K abscindit coniectionem B A C in eodem puncto A, in quo secatur à circulo T A S, & tanguntur ab eadem contingente G A in puncto A. Quod erat, &c.

20. addit. huius.

Sectionum

PROP. 22. Addit. *Sectionum conicarum circa axim communem positarum datam coni-sectionem abscindentium non in eius vertice, quas omnes eadem recta linea contingat, erunt singulares tantummodo parabolæ, & circulus, ellipses verò, & hyperbole erunt infinitæ.*



Quoniam circa communem axim D A constitui possunt parabole, circulus, Prop. 17. addit. huius. *infinitæ hyperbolæ, & infinitæ ellipses habentes semilatus rectum axis æquale singulari breuisecanti D A in sectione* Prop. 21. addit. huius. *conica B A C eductæ, & hæ omnes abscindunt coniectionem B A C in A. Ergo patet propositum.*

Hinc colligitur dari non posse coniectionem minimam extrinsecus tangentium, neque maximam intrinsecus tangentium eandem coniectionem in puncto A extra verticem axis posito.

Nam qualibet coniectio, cuius semie- Prop. 18. addit. huius. *rectum axis minus est breuisecante singulari D A intrinsecus tangit sectionem B A C in A, & si semirectum maius fuerit eadem D A extrinsecus eandem* Prop. 19. addit. huius. *sectionem B A C continget, neque vnquam cessant prædicti contactus extrinseci, vel intrinseci quousque semirectum axis efficitur æquale breuisecanti D* Prop. 21. addit. huius. *A: at tunc non amplius contingit, sed secat eam in A. Quare patet propositum.*

Constat etiam quod parabolarum vnica tantummodò, & circulorum vnicus etiam abscindit coniectionem B A C in A, & contingit eandem contingentem A G in A.

At hyperbolarum, atque ellipsium abscindentium eandem sectionem B A C in A, quas omnes eadem recta linea A G tangit in A non potest assignari maxima, neque minima.

Nam vt dictum est ad 17. Additarum huius libri infinitæ hyperbolæ se se contingentes in vertice axis desinunt in parabolam vnicam, & post parabolam interius se se successiuè contingunt infinitæ ellipses ad axim maiorem adiacentes, quæ desinunt in circulum vnicum, ac post circulum interius eum contingunt infinitæ ellipses ad axim minorem adiacentes, quarum omnium semirecta latera axium æqualia sunt breuisecanti singulari D A datæ sectionis B A C. Quare patet propositum.

LIBRI SEXTI FINIS.

APOLLONII PERGAEI
CONICORVM LIB. VII.

DEFINITIONES.

I.

SI diuidatur inclinatum ſecundum proportionem figuræ, aut addatur vni axium ellipſis linea, earumque differentia, aut aggregatum ad eandem lineam habeat eandem proportionem figuræ: vocabo homologam inclinati PRÆSECTAM.

II.

Et homologam erecti INTERCEPTAM.

III.

Atque punctum, quod eſt extremum ipſius interceptæ, & diametri: vocabo TERMINVM COMMVNEM.

IV.

Reliquum verò TERMINVM DIVIDENTEM.

V.

Et differentiam, vel ſummam lateris, & interceptæ: vocabo INTERCEPTAM COMPARATAM.

VI.

Differentiam verò, aut ſummam lateris, & præſectę: vocabo PRÆSECTAM COMPARATAM: hoc autem latus refertur ad diametrum, quæ bifariam diuidit lineam coniungentem verticem ſectionis, & terminum potentis huius lateris: reliquæ

reliquæ verò lineæ referuntur ad hoc latus.

VII.

Insuper vocabo duas diametros coniugatas, & æquales in ellipsi, ÆQVALES.

Et si quidem ad vtrasque partes axis sectionis duæ diametri educantur, quæ ad sua erecta eandem proportionem habeant, vtique vocabo eas ÆQVALES.

VIII.

Diametros verò æquales ad vtrasque partes duarum axium ellipsis cadentes, voco Homologas illius axis: sùntque homologæ diametri in ellipsi transuersa ad transuersam, & recta ad rectam.

NOTÆ.

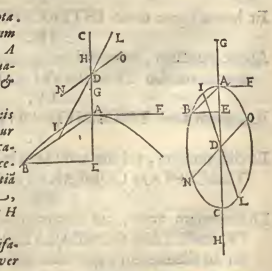
I. *Prima definitio breuissimè exponi potest hac ratione. Si axis transuersus interius in hyperbola diuidatur, aut exterius in ellipsi, secundum proportionem figuræ, segmentum homologum axis transuersi vocabo Præfectum, vt si fuerit hyperbole, vel ellipsis A B, cuius axis transuersus A C, centrum D, latus rectũ A F, & in hyperbola secetur C A inter vertices A, & C; in ellipsi verò secetur exterius in puncto G, ita vt summa, vel differentia ipsarum G A, & axis C A, ideſt C G ad G A habeat proportionem figuræ scilicet eandem, quàm habet latus transuersum C A ad latus rectum A F; tunc quidem vocatur recta linea C G Præfecta.*

II. *Atque G A vocatur Intercepta.*

III. *Punctum verò A extremum interceptæ G A, & diametri C A vocabitur terminus communis duarum linearum, scilicet axis C A, & additæ, vel ablatæ A G.*

IV. *Punctum verò G, in quo axis A C interius, vel exterius diuiditur secundum proportionem figuræ vocatur terminus diuidens; Si verò secetur C H æqualis A G vocabitur etiã C H intercepta, & A H præfecta, atque C terminus communis, & H terminus diuidens.*

V. *Si diameter I L secuerit bifariam subtensam A B à sectionis vertice A eductam, atque à termino B*



ducatur

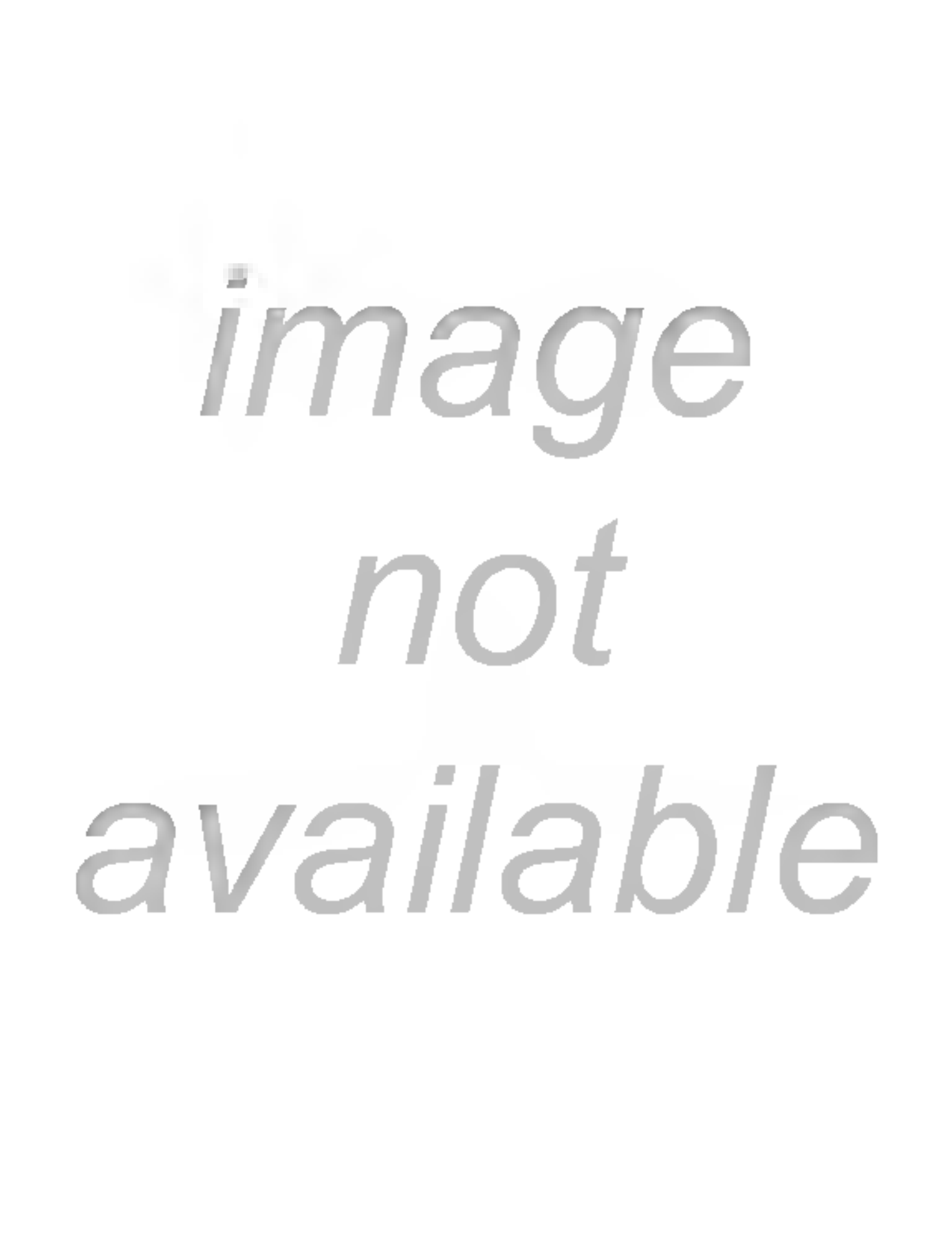
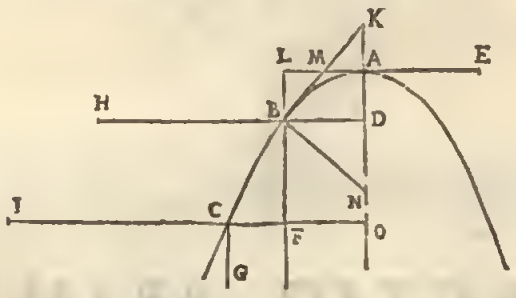


image
not
available

cum quadrato D B, quod est æquale ipsi A D in A F; igitur est æquale ipsi F D in D A. Quod erat ostendendum.

PROPOSITIO V. & XXIII.

IN parabola A B C cuiuscumque diametri B F erectus B H excedit axis A D erectum A E quadruplo abcissæ A D potentis à termino illius diametri ad axim ductæ 23. & diametri C G, remotioris ab axe, erectus C I maior est erecto B H diametri propinquioris B F quadruplo differentiæ axis abscissarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum. a

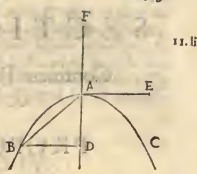


Educamus A L, B K tangentes in A, B, & B N perpendicularem ad
11. lib. 1. B K, erit K D in D N æquale quadrato D B, quod est æquale ipsi A E in A D; ergo K D ad D A eandem proportionem habet, quàm A E ad
35. lib. 1. D N: estque D K dupla ipsius A D (37. ex 1.) igitur A E est dupla ipsius D N; quarè A E eum duplo D K, nempe eum quadruplo A D est æqualis duplo K N, nempe B H (eo quod N K ad B K tangentem eandem proportionem habet, quàm assumpta M B ad B L coniugatam (57. ex 1.) (propter similitudinem duorum triangulorum); ergo B H æqualis est quadruplo A D eum A E; quarè erectus diametri B F excedit A E quadruplo A D. & A O maior est, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior est, quàm erectus B F proximioris quadruplo D O differentiæ abscissarum. Et hoc erat ostendendum. b
44. lib. 1. c

Notæ in Propositi. I.

QVia quadratum A B est æquale quadrato D A, &c. *Quoniam rectangulum F D A æquale est rectangulo F A D subsegmentis una cum quadrato reliqui segmenti D A; estque latus rectum A E æquale A F;* a

A F; igitur rectangulum F D A aquale est rectangulo D A E una cum quadrato D A; sed quadratum ordinatim ad axim applicatæ B D aquale est rectangulo D A E sub abscissa & latere recto contento; igitur rectangulum F D A æquale est duobus quadratis B D, & D A: estquè quadratum A B subtendentis rectum angulum D æquale duobus quadratis B D, & D A; igitur quadratum subtensæ A B æquale est rectangulo A D E sub abscissa D A, & sub D F, quæ æqualis est eidem abscissæ cum latere recto.



11. lib. 1.

Notæ in Propositi. V. & XXIII.

a ET diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior est erecto B H diametri propinquioris B F, &c. *Videtur hæc 23. propositio deficiens; cum omnino inuerisimile sit Apollonium non animaduertisse rem adeo facilem; quod nimirum diametri G C remotioris ab axe erectus C I maior sit erecto B H diametri B F proximioris quadruplo differentiæ axis abscissarum potentium à terminis diametrorum ad axim ductorum.*

b Quare A E cum duplo K D, nempe cum quadruplo A D est æqualis duplo K N, nempe dimidio B H, &c. *Quoniam B H latus rectum diametri B F ad duplum contingentis B K est vt M B ad B L, sed (propter æquidistantes, & similitudinem triangulorum L B M, & K N B) vt M B ad B L, ita est duplum N K ad duplum K B; ergo latus rectum B H æquale est duplo K N; sed prius ostensum est quod D A æqualis est medietati ipsius D K, & D N æqualis medietati ipsius A E; igitur duplum K N æquale est duplo K D, seu quadruplo A D cum duplo D N, seu cum A E.* 49. lib. 1. 35. lib. 1.

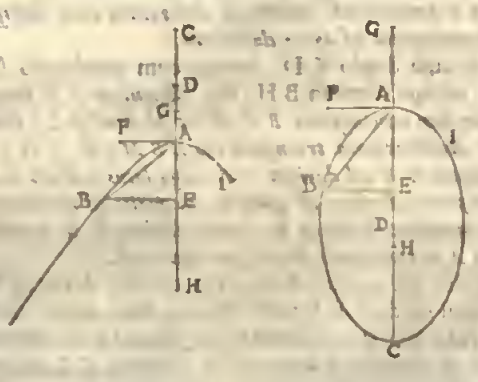
c Et A O maior est, quàm A D; ergo erectus diametri C G remotioris maior est quàm erectus B F proximioris, &c. *Addidi in hac conclusione verba hæc (quadruplo D O differentiæ abscissarum) quæ videntur deficere. Manifestum enim est, quod C I latus rectum diametri C G ab axe remotioris superat latus rectum B H diametri F B axi propinquioris quadruplo D O differentiæ abscissarum axis ab ordinatis à verticibus earundem diametrorum ductis; nam B H æqualis ostensa est E A una cum quadruplo A D, eademque ratione C I æqualis est eidem axis lateri recto E A cum quadruplo A O; ergo excessus C I supra B H erit æqualis quadruplo differentiæ D O.*

SECTIO SECVNDA

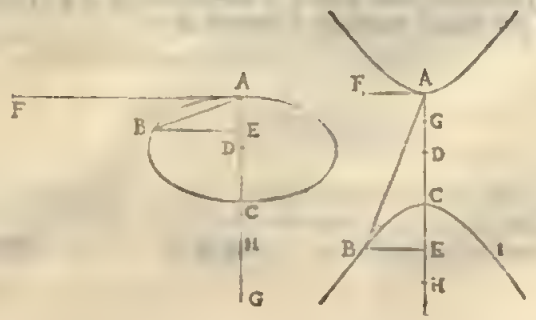
Continens Propoſit. II. III. IV. VI. & VII. Apollonij.

PROPOSITIO II. & III.

SI in ſectione A B à termino cõmuni A vtriuslibet interceptæ a
educatur linea recta A B vſq; ad ſectionem, atquè ab eius termino B ad axim A E ducatur perpendicularis B E; erit quadratum A B ad rectangulum contentum à rectis lineis inter perpendicularis incidentiam, & terminos interceptæ, nempe A E in G E habebit eandem proportionem, quàm habet inclinatus, ſiuè tranſuerſus A C ad præſectam C G.



Sit itaque A F erectus A C, & ponamus A E in E H æquale quadrato B E; igitur A E in E H ad A E in E C, nempe H E ad E C eſt vt

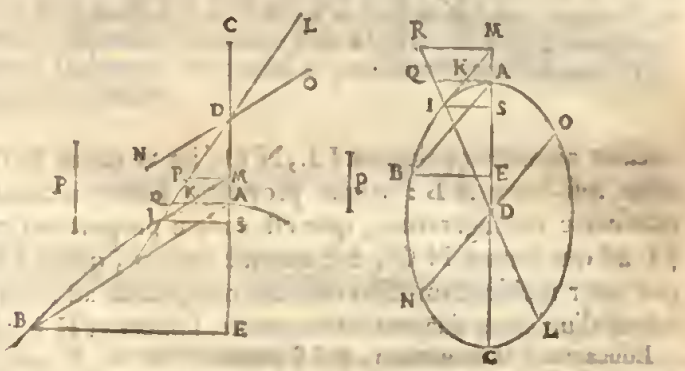


A F

b A F ad A C, & vt A G ad G C; ergo H E ad E C est vt A G ad G C; & componendo in hyperbolis, & diuidendo in ellipsibus, deinde comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & summas homologorum in reliquis, fiet A H ad G E, vt C A ad C G; ergo A H in A E; nempe quadratum A B ad G E in A E est vt O A inclinatus, siue transuersus ad C G præfectam. Quod fuerat propositum.

PROPOSITIO IV.

a SI hyperbolen, aut ellipsin A B tangat recta linea I M in I, & occurrat axi A C in M; vtique ipsius I M quadratum ad quadratum semidiametri N D coniugatæ ipsi I L habebit eãdem proportionem, quàm axis contenta M S ad eius inuersam S D.

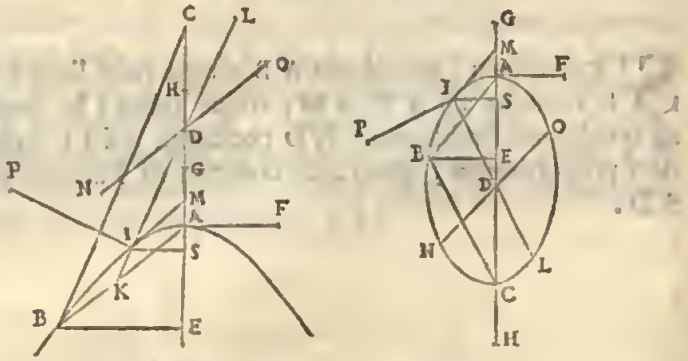


Educantur A Q, M R perpendiculares ad axim vsque ad I L, ponaturque linea P, quæ ad I M eandem proportionem habeat, quàm K I ad Q I, seu eandem, quàm habet M I ad I R; Ergo P est semissis erecti (52. ex 1.) atque D N dimidium coniugatæ diametri N O poterit P in I D, atque I M poterit P in I R; & ideo I R ad I D, nempe M S contenta ad S D inuersam eandem proportionem habet, quã quadratum tangentis I M ad quadratum N D semissis coniugatæ ipsius I L. Et hoc erat propositum. 52. lib. 1.

PROP.

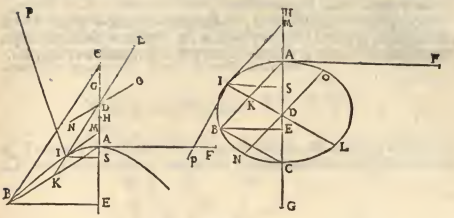
PROPOSITIO VI. & VII.

SI in hyperbole, aut ellipsi addantur axi transuerso, vel auferantur ab inclinato duæ interceptæ A G, C H ab eius terminis A, C, atque à vertice sectionis A educatur recta linea A B ad terminum alicuius potentialis B E, & per centrum D a



ducãtur diametri coniugatæ I L, N O, ita vt rectus N O æquidistet ipsi lineæ A B: vtiquè proportio figuræ inclinatæ, vel transuersæ coniugatarum, quæ est eadem proportioni quadrati I L ad quadratum N O, erit quoquè eadem, quàm habent lineæ inter incidentiam illius ordinatim applicatæ ad axim, & terminos diuidentes duarum interceptarũ, scilicet vt H E ad E G.

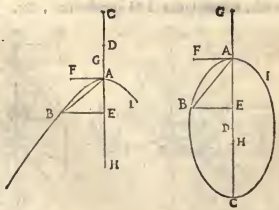
Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D est æqualis D C, & A K æqualis K B (eo quod I L cum sit coniugata N O bifariam diuidit A B) erit C B parallela ipsi I D, & propterea M S ad S D, nempè A E ad E C (propter similitudinem triangulorum) est vt quadratum I M ad quadratum N D (4. ex 7.) & quadratum I D ad quadratum I M est vt quadratum C B ad quadratum B A (propter similitudinem triangulorum); ergo proportio quadrati I D ad quadratum N D est composita ex ratione A E ad E C, & ex ratione quadrati C B ad quadratum B A; sed proportio quadrati C B ad quadratum B A est composita ex ratione quadrati C B ad C E in E H, & ex ratione C E in E H ad A E in E G, & ex ratione A E in E G ad quadratum A B; est vero quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H (3. ex 7.) atquè A E in E G ad quadratum A B est vt G C ad C A (2. ex 7.), & proportio C E in E H ad A E in E G, componitur ex ratione C E ad A E, & ex b



H E ad E G; igitur proportio quadrati I D ad quadratum N D composita est ex proportione C A ad A H, & ex G C ad C A, atque ex C E ad E A, & A E ad E C, & tandem ex H E ad E G; sed C A ad A H, & G C ad C A componunt proportionem C A ad ei æqualem A C: similiter C E ad E A, & A E ad E C est vt E C ad se ipsam: quare si hæ proportiones auferantur, remanebit E H ad E G, vt quadratum I D ad quadratum N D: nempe erit eadem ac proportio figuræ diametri I L. Quod erat ostendendum.

Notæ in Propositt. II. III.

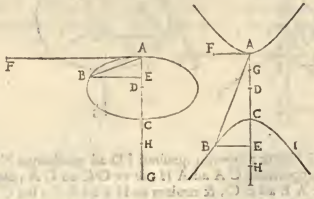
a SI in sectione A B à termino communi A interceptæ, &c. *Addidi particulam* vtriuslibet *intercepta vt propositio efficiatur vniuersalis comprahen-*



tum

dens quartum casum in postrema figura, quàm superaddidi, vti necessariam pro intelligentia octauæ propositionis.

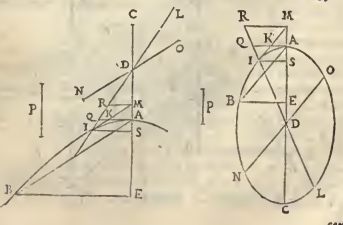
Et componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipsi prima deindè coniungendo in duabus figuris prioribus, & occurrere faciamus respectiuum cum respectiuo in reliquis figuris post inuersionem, vt fiat, &c. b



Idest componendo in hyperbolis; & in ellipsibus comparando differentias terminorum ad consequentes, deindè comparando homologorum differentias in duabus figuris prioribus, & sumas in reliquis; tunc enim A H ad G E est, vt A C ad C G, & sumpta communi altitudine E A, erit rectangulum H A E ad rectangulum G E A, vt A C ad C G. Sed rectangulum H A E æquale est quadrato A E vna cum rectangulo H E A, cui æquale est quadratum B E, ergo quadratum A B æquale est rectangulo H A E (propterea quod A B subtendit angulum rectum E in triangulo B A E) quare quadratū A B ad rectangulum A G E eandem proportionē habet quàm C A ad C G.

Notæ in Propositt. IV.

SI hyperbolen, aut ellipsim A B tangat recta linea I M, & occurrat axi A C in M, vtique ipsius I M quadratum, &c. *Suppleri debet* a

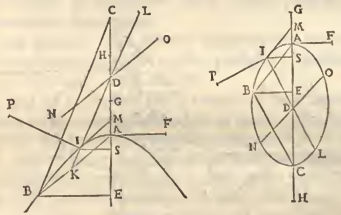


constru-

conſtructio, quæ deficit in hac propoſitione, vt nimirum ſenſus continuatus ſit à punctis M, A, I educatur ad axim perpẽdiculares M R, A Q, & I S ſecãtes diametros in R, Q, & S, & A Q, I M ſe mutuò ſecent in K, erit I S ordinatim ad axim applicata, & A Q, ſicuti etiam I M contingit ſectionem. vocat autem Interpres rectam lineam M S, quæ inter tangentem, & ordinatam interijcitur Contentam, atque D S vocat Imerſam.

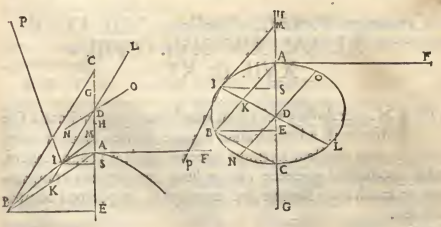
Notæ in Propoſit. VI. & VII.

a SI addatur duabus extremitatibus tranſuerſæ, aut inſiſtant ad duas extremitates recti, aut diminuatur à duabus extremitatibus inclinati A,



& C duo intercepta, &c. *Expungo verba appoſititia. Aut inſiſtat ad duas extremitates recti; quæ ſenſum perturbant.*

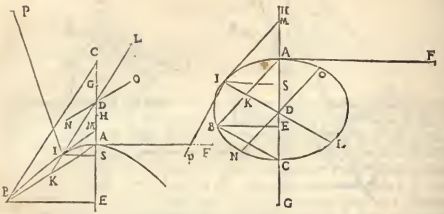
b Educamus I M tangentem, & I S perpendicularem. Et quia A D eſt æqualis D C, &c. *Ideſt Educamus I M contingentem ſectionem in I, quæ*



secet axim in M, & I S ad axim perpendicularem, seu ordinatim applicatam, cum secans in S. Et quia trianguli A C B duo latera A C, A B secantur proportionaliter, scilicet bifariam in D, & K; ergo I D parallela est basi C B: estque tangens I M parallela ipsi B A, cum ambo ad diametrum I L sint ordinatim applicatæ; pariterque I S parallela est B E (cum sint ad axim perpendiculares) igitur triangula M I S, A B E similia erunt; pariterque triangula D I S, C B E erunt similia: & ideo M S ad S I erit vt A E ad E B, & S I ad S D erit, vt B E ad E C: quarè ex æquali ordinata M S ad S D eandem proportionem habebit, quàm A E ad E C: estque quadratum I M ad quadratum N D, vt M S ad S D; ergo quadratum I M ad quadratum N D est, vt A E ad E C, &c.

Prop. 5. lib. 2.

Prop. 4. huius.

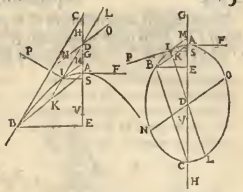


SECTIO TERTIA

Continens Propositiones Apollonij VIII. IX. X. XI. XV. XIX. XVI. XVIII. XVII. & XX.

VIII. IN hyperbola, vel ellipsi quadratum axis inclinati, siue transuersi ad quadratum summæ duarum diametrorum coniugatarum eiusdem sectionis habebit eandem proportionem, quàm productum præfectæ axis in suam interceptam comparatam ad quadratum summæ suæ interceptæ, & potentis comparatarum.

IX. Vel



IX. Vel ad quadratum differẽtiæ coniugatarum eãdem proportionem habet, quàm productum præſectæ in ſuam interceptam comparatam ad quadratum differentiæ interceptæ, & potentis comparatarum.

X. Vel ad rectangulum ſub duabus coniugatis contentum eandem proportionem habet, quàm præſecta axis ad ſuam potentem comparatam.

XI. Ad ſummam verò duorum quadratorum ex coniugatis eandem proportionem habet, quàm præſecta ad ſummam præſectæ, & interceptæ comparatarum.

XV. Sed ad quadratum erecti vnius coniugatæ eandem proportionem habet, quàm præſecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſuæ præſectæ comparatæ.

XIX. Sed ad quadratum differentiæ vnius coniugatarum, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm productum præſectę axis illi diametro homologę in ſuam interceptam comparatam ad quadratum exceſſus præſectæ, & interceptæ comparatarum.

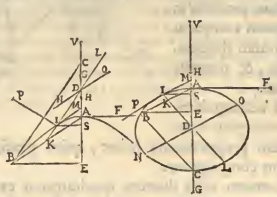
XVI. Ad quadratum verò ſummæ inclinatæ diametri, & eius erecti eandem proportionem habet, quàm præſecta axis in ſuam interceptam comparatam ad quadratum ſummæ interceptæ, & præſectæ comparatarum.

XVIII. Sed ad figuram inclinatæ vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm axis præſecta ad præſectam comparatam.

XVII. Et ad ſummam duorum quadratorum inclinatæ, & erecti vnius coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præſecta in interceptam comparatam ad duo quadrata præſectæ, & interceptæ comparatarum.

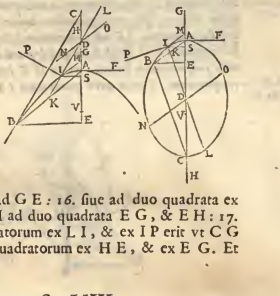
XX. Et tandem ad exceſſum duorum quadratorum laterum figuræ inclinatæ duarum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm productum præſectæ in interceptam comparatã ad exceſſum quadratorum præſectæ, & interceptæ comparatarum.

Iisdem figuris manentibus sit H V potens comparata, & I P sit erectũ ipsius I L. Dico quod quadratum A C ad quadratum summæ I L, & N O est vt C G in E H ad quadratum E H V. Quia quadratũ A D æquale a



37. lib. 1. est S D in D M (39. ex 1.) ergo S D in D M ad quadratum I D, nempe E C in C A ad quadratum C B (propter similitudinem triangulorũ) est vt quadratum A D ad quadratum I D, nempe vt quadratum A C ad quadratum I L: estque quadratum C B ad C E in E H, vt C A ad A H, seu ad C G (2. 3. ex 7.) idest vt A C in C E ad C G in C E, & permutando; igitur A C in C E ad quadratum C B, quod habebat (vt ostensum est) eandem proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum I L, erit vt G C in C E ad C E in E H, nempe vt C G ad E H, seu C G in E H ad quadratum E H; igitur quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in E H ad quadratum E H. Et quadratum I L ad quadratum N O, seu L I ad I P est vt H E ad E G (6. 7. ex 7.) scilicet vt quadratum E H ad H E in E G, quod æquale suppositum fuit quadrato H V; Ideoque I L ad N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad H V; quapropter quadratum I L, siue ad quadratum summæ ipsarum I L, N O est vt quadratum H E ad quadratum E H V; siue ad quadratum differentiæ I L, & N O erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & H V, siue ad I L in N O habebit eandem proportionem, quàm E H ad H V; siue ad duo quadrata I L, N O eandem proportionem habebit, quàm E H ad summam E H, E G; eo quod quadratum I L ad quadratum N O est vt E H ad E G; siue insuper ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum E H ad quadratum E G; vel potius ad quadratum differentiæ I L, & I P erit vt quadratum E H ad quadratum differentiæ E H, & E G, vel rursus ad quadratum rectæ lineæ ex L I, & I P compositæ, erit vt quadratum H E ad quadratum summæ duarum H E, E G, atque ad L I in I P eandem proportionem habebit, quàm H E ad E G; vel ad quadratum ipsius L I cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad duo quadrata b

drata H E, & ipſius E G, ſiue ad differentiam duorum quadratorum L I, & ipſius I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam duorum quadratorum H E, & E G. Et iam oſtenſum eſt quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habet, quàm C G in H E ad quadratum H E: 8. ergo ex æqualitate quadratum A C, ſiue ad quadratum ſummæ I L, N O eſt, vt C G in H E ad quadratum E H V: 9. ſiue ad quadratum differentiæ eius, quæ eſt inter I L, N O eſt vt C G in H E ad quadratum exceſſus E H ſupra H V: 10. ſiue ad I L in N O erit, vt C G ad H V: 11. ſiue ad duorum quadratorum I L, N O ſummam, erit vt C G ad ſummam G E, E H: 12. ſiue ad quadratum I P erit, vt C G in H E ad quadratum E G: 13. ſiue ad quadratum differentiæ L I, I P erit, vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G: 14. ſiue ad quadratum ex recta linea æquali ſũmæ duarum L I, I P, erit vt C G in E H ad quadratum ex recta linea compoſita ex H E, E G: 15. ſiue ad L I in I P erit vt C G ad G E: 16. ſiue ad duo quadrata ex L I, & ex I P erit vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H: 17. ſiue ad differentiam duorum quadratorum ex L I, & ex I P erit vt C G in E H ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G. Et hoc erat propoſitum.



Notæ in Propoſit. VIII.

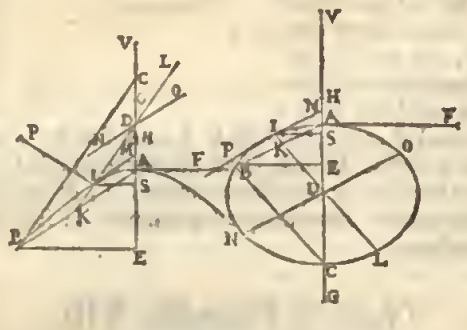
a Iſdem figuris manentibus ſit H V potens comparata, &c. *Prater definitiones ſuperius expoſitas hic duæ aliæ declarari debent, iguotum enim eſt quid nam nomine Figuræ comparatæ, & Potentis comparatæ intelligi debeat. Itaq; rectangulum ſub præfecta comparata, & interceptâ comparata contentum, ideſt rectangulum H E G vocatur Figura comparata: & ſi quadratum rectæ lineæ H V æquale fuerit rectangulo H E G vocatur H V Potens comparata.*

b Ergo S D in D M ad quadratum D I, nempe E C in C A ad quadratũ C E, &c. *AEqualia enim ſpatia, ſcilicet rectangulũ S D M, & quadratũ D A ad idem quadratum I D habent eandem proportionem: ſed quia triangula M I D, & A B C ſimilia ſunt, propterea quod latera homologa ſunt parallela inter ſe; pariterque triangula D S I, & C E B ſunt ſimilia, vt oſtenſum eſt in 6. & 7. huius; ergo S D ad D I erit vt E C ad C B, atque M D ad D I eſt vt A C ad C B erunt compoſitæ proportiones eadem inter ſe, ſcilicet rectangulum S D M ad quadratum D I eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E C A ad quadratum C B; quare vt quadratum A D ad quadratum D I, ſeu vt quadruplum ad quadruplum, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum I L, eo quod A D, & I D ſemiſſes ſunt diametrorum A C, I L.* 37. lib. 1.

Notæ

Notæ in Propoſit. IX.

SIue ad quadratum differentiæ eius, quæ eſt inter I L, N O eſt vt C G in H E ad quadratum E H, H V, &c. *Licet nouem ſubſequentes propoſitiones facile ex octaua deducantur, nequeunt tamen omnes ſimul conglobatæ vnico hauſtu deuorari; itaque operæ pretium erit aliquantisper breuitatem nimiam Arabici Interpretis relinquere. Tria demonſtrata ſunt in propoſitione octaua, quæ in ſequentibus nouem propoſitionibus vſum habent. Primò quod quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habeat, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum H E. Secundò quod I L ad N O eandem proportionem habeat, quàm H E intercepta comparata ad H V potentem* 15. & 16. lib. 1. *comparatam. Tertio quod quadratum I L ad quadratum N O, ſeu L I ad eius* C

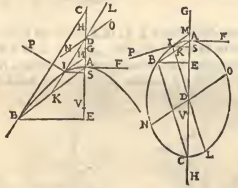


latus rectum I P, ſit vt H E ad E G, vel vt quadratum H E ad rectangulum H E G, vel ad quadratũ H V. Modo propoſitio nona ſic demonſtrabitur. Quia I L ad N O eandem rationem habet quàm H E ad H V, erunt antecedentes ad differentias terminorum proportionales, ideſt I L ad differentiam ipſarum I L, & N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad differentiam ipſarum E H, & H V: atquè quadratum I L ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V deſcriptum: erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G in H E ad quadratum 8. huius. *E H; ergo ex æquali ordinata quadratum A C ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & N O deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm rectangulum C G in H E ad quadratum ex differentia ipſarum E H, & H V.*

Notæ

Notæ in Propoſit. X.

d Siue ad I L in N O erit vt C G ad H V, &c. *Quia I L ad N O habebat eandem proportionem, quàm E H ad H V poſitis communibus altitudinibus I L, & E H habebit quadratum I L ad rectangulum I L in N O eandē proportionem, quàm quadratum E H ad rectangulum E H in H V; ſed quadratum A C ad quadratum I L habebat eandem proportionem, quàm rectangulum C G in E H ad quadratum E H; ergo ex aqualitate quadratum A C ad rectangulum ſub I L in N O eandem proportionem habet, quàm rectangulum C G in H E ad rectangulum E H in H V, ſiue quàm habet C G, ad H V.* ex prop. 8. huius.



Notæ in Propoſit. XI.

e Siue ad duorum quadratorum I L, N O ſummam erit vt C G ad ſummam G E, & E H, &c. *Quia quadratum I L ad quadratum N O erat, vt H E ad E G, antecedentes ad ſummas terminorum erunt proportionales, ſcilicet quadratum I L ad quadratum I L ſimul cum quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ſummam ipſarum H E, & E G; erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt C G ad E H; ergo ex aqualitate quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex N O ſimul ſumpta eandem proportionem habebit, quàm C G, vel H A ad ſummam ipſarum H E, & G E.* Prop. 8. huius.

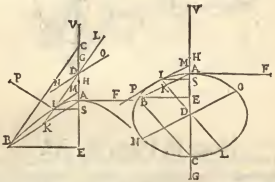
Notæ

Notæ in Propoſit. XV.

SIue ad quadratum I P erit vt C G in E H ad quadratum E G, &c. f
Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G; ergo quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G; erat autem quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum C G, ſeu A H in H E ad quadratum E H; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum G E.

Notæ in Propoſit. XIX.

SIue ad quadratum differentiæ I. I, & I P erit vt C G in E H ad quadratum differentiæ H E, E G, &c. g
Quia I L ad I P erat vt H E ad E G, comparando antecedentes ad terminorum differentias, ſcilicet I L ad differentiam ipſarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm E H ad

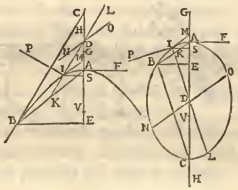


differentiam ipſarum E H, & E G, & quadratum I L ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & I P deſcriptum eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad quadratum ex differentia ipſarum H E, & G E deſcriptũ: erat autem quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex differentia ipſarum I L, & I P eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex differentia ipſarum H E, & E G.

Notæ

Notæ in Propoſit. XVI.

h Siue ad quadratum ex recta linea æquali ſummæ duarum I L, & I P erit, vt C G in H E ad quadratum ex recta linea compoſita ex H E, E G, &c. *Quia I L ad I P erat vt H E ad E G comparando, antecedentes ad ſummas terminorum, erit I L ad I L, & I P ſimul ſumptas, vt H E ad H E, & E G ſimul ſumptas, & quadratum I L ad quadratum ex ſumma ipſarum I L, & I P deſcriptum, erit vt quadratum H E ad quadratum ex ſumma duarum H E, & E G deſcriptum; & erat prius quadratum A C ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur ex æqualitate quadratum A C ad quadratum ex ſumma ipſarum I L, & I P deſcriptum eãdem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratum ex ſumma ipſarum H E, & E G deſcriptum.*

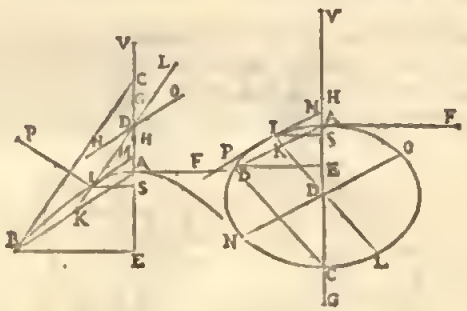


Notæ in Propoſit. XVIII.

i Siue ad I L in I P erit, vt C G in G E, &c. *Quia I L ad I P eſt vt H E ad G E poſitis communibus altitudinibus I L, H E habebit quadratum I L ad rectangulum ſub I L, & I P eandem proportionem, quàm quadratum H E ad rectangulum H E G: ſed quadratum A C ad quadratum I L eandem proportionem habebat, quàm rectangulum A H E ad quadratum H E; ergo ex æqualitate quadratum A C ad rectangulum L I P eandem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad rectangulum H E G, ſeu vt A H, vel C G ad G E.*

Notæ in Propoſit. XVII.

SIue ad duo quadrata ex I L, & I P erit, vt C G in E H ad duo quadrata E G, & E H, &c. *Quoniam I L ad I P erat vt H E ad E G, & quadratum I L ad quadratum I P erit vt quadratum H E ad quadratum E G; & comparando antecedentes ad terminorũ ſummas quadratum I L ad quadratum I L vna cum quadrato I P habebit eandem proportionem, quàm quadratum H E ad ſummam quadrati H E cum quadrato E G: ſed prius quadratum A C ad quadratum I L erat vt rectangulum A H E ad quadratum H E; igitur quadratum A C ad ſummam quadrati I L cum quadrato I P eãdem proportionem habebit quàm rectangulum A H E ad quadratum E G vna cum quadrato E H.* k



Notæ in Propoſit. XX.

SIue ad differentiam duorum quadratorum I L, I P erit, vt C G in H E ad differentiam duorum quadratorum ex H E, & ex E G, &c. *Quoniam vt dictum eſt quadratum I L ad quadratum I P eandem proportionẽ habet, quàm quadratum H E ad quadratum G E, & comparando antecedentes ad terminorum differentias quadratum I P ad differentiam quadrati I L à quadrato I P eandem proportionem habebit, quàm quadratum H E ad differentiam inter quadratum H E, & quadratum E G: eſtque quadratum C A ad quadratum I L, vt rectangulum A H E ad quadratũ H E; ergo ex aquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex I P differentiam eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A H E ad quadratorum ex E G, & ex E H differentiam.* l

SECTIO

SECTIO QVARTA

Continens Propoſit. Apollonij XII. XIII. XXIX. XVII. XXII. XXX. XIV. &XXV.

XII. XIII. XXV. Differentia quadratorum duorum axium hyperboles æqualis eſt differentiæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

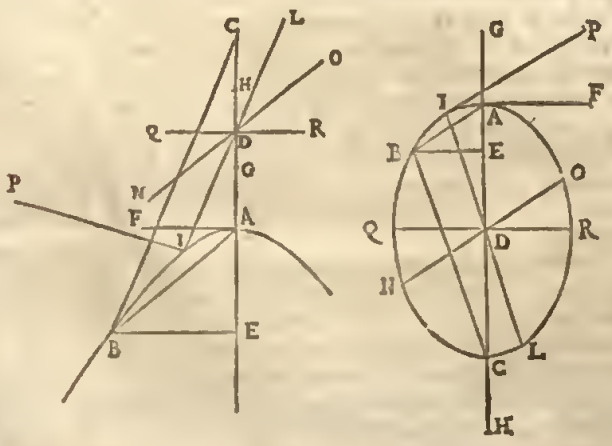
XXVIIII. Nempe differẽtiæ inter quadrata à figuris earumdẽ diametrorum æquales ſunt.

XXVII. Et differentia duorum axium maior eſt differentia quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

XXII. Et ſumma quadratorũ duorum axium ellipſis æqualis eſt ſummæ quadratorum quarumlibet duarum diametrorum coniugatarum.

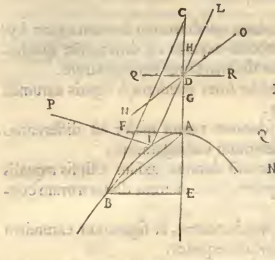
XXX. Nempe ſummæ quadratorum, & figurarum earundem diametrorum homologarum ſunt æquales.

XIIII. Axis verò tranſuerſi quadratũ ad differentiam quadratorum duarum diametrorum coniugatarum eandem proportionem habet, quàm præfecta ad duplam inuerſæ.



In eiſdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum ſui coniugati (in propoſitione 12. 13. 25.) nempe C A ad A F erectum ipſius eſt, vt Præſecta C G ad Interceptam G A, ſiue ad C H; ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipſius, & in ellipſi ad eorundem ſummam eandem proportionem habet, quàm C G ad H G. Demonſtratum autem prius fuit, quadratum C A ad quadratum I L eandem proportionem habere, quàm C G ad H E, & quadratum a

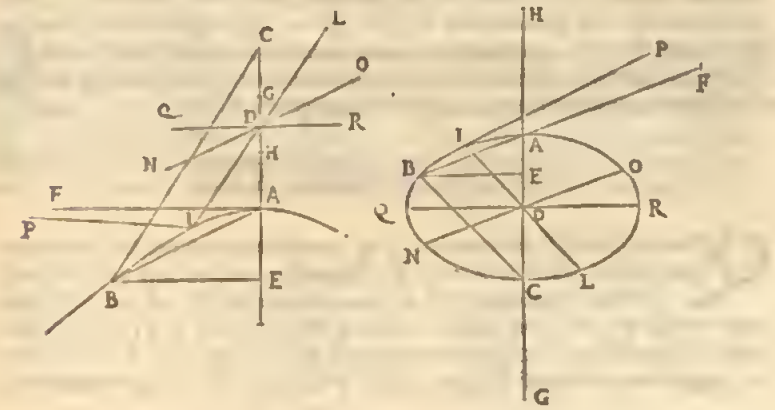
ex Def. 1. & 2.



I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; Inſuper quadratum I L ad ſummam quadratorum I L, N O in ellipſi, aut ad eorundem differentiam in hyperbola eandem proportionem habebit, quàm H E ad H G; & in propoſitione 14. vt H E ad exceſſum H E, E G, quod eſt duplum D G; igitur ex æqualitate quadratum A C, ſiue ad ſummam duorum quadratorum I L, N O, quemadmodum habetur in propoſitione 22. & 30. ſiue ad eorundem differentiam, veluti habetur in propoſitionibus 12. 13. 14. eandem proportionem habebit, quàm C G ad H G, ſiue ad duplum D G, vt in propoſitione 14. & demonſtratum fuit in eadem proportione eſſe quadratum A C ad ſummam quadratorum A C, & eius coniugati, & eſt propoſitio 25. aut ad eorundem differentiam, & eſt propoſitio 12. quapropter ſumma quadratorum I L, N O coniugatarum in ellipſi, nempe quadratum I L vna cum eius figura eſt æquale aggregato quadrati A C vna cum quadrato eius coniugati 30. nempe quadrato A C, & illius figuræ, & in hyperbola differentia quadratorum I L, N O nempe exceſſus quadrati I L ſuper illius figuram æqualis eſt differentiæ duorum quadratorum A C, & recti illius nempe quadrato A C, & illius figuræ 27. & oſtenſum iam eſt, quod I L in hyperbola maior eſt, quàm A C; ergo differentia A C & illius coniugati maior quàm differentia I L, & N O: atquè ſic oſtendetur, quod dif- b c

6. & 7. huius.

differentia I L, & N O maior sit, quàm differentia quarumlibet duarum coniugatarum ab axi remotiorum. Et hoc erat ostendendum.



Notæ in Propositi. XII.

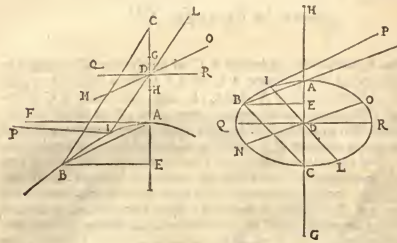
a IN eisdem figuris, quia quadratum A C ad quadratum sui coniugati in propositione 12. & 25. nempe A C ad A F erectum ipsius est vt præsecta C G ad Interceptam G A, seu C H: ergo quadratum A C in hyperbola ad differentiam quadratorum axium ipsius, & in ellipsi ad illorum summam est, vt C G ad H G, &c. *Idest. Quia quadratum A C ad quadratum axis ei coniugati Q R, sive C A ad eius erectum A F eandem proportionem habet, quàm præsecta C G ad Interceptam G A, vel ad C H, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in hyperbola, & ad terminorum summas in ellipsi, quadratum C A ad differentiam quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R habebit in hyperbola eandem proportionem, quàm C G ad differentiam inter C G, & C H: in ellipsi verò quadratum A C ad summam quadratorum ex A C, & ex Q R eandem proportionem habebit, quàm C G ad summam ipsius C G cum C H.* Defin. 1. & 2. huius.

b Et quia iam demonstratum est, quod quadratum C A ad quadratum I L sit, vt C G ad E H, &c. *Relicta abstrusa complicatione propositionum, Arabici Interpretis distinctiori methodo, sicuti in praecedenti sectione factum est propositiones declarabimus. Quoniam in hyperbola quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G comparando antecedentes ad terminorum differentias, quadratum I L ad differentiam quadrati I L à quadrato N O eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipsarum H E, & E G differentiam; sed quadratum A C ad quadratum I L est vt C G ad H E (veluti in propositione 8. ostensum est) ergo ex aqualitate quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit,* 6. huius.

habebit, quàm C G ad ipſarum H E, & E G differentiam, ſeu ad H G: ſed in eadem hyperbola quadratum A C ad quadratorum A C, & Q R differentiam eandem proportionem habet, quàm C G ad ipſarum C G, & C H differentiam, ſeu ad H G (veluti in principio huius propoſitionis dictum eſt) ergo quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R differentiam, eandem proportionem habebit, quàm ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam; & ideo in hyperbola differentiæ quadratorum axium A C, & Q R æqualis eſt differentiæ quadratorum I L, & N O coniugatarum.

Notæ in Propoſit. XIII.

7. huius. *QVoniam in ellipſi quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad G E; comparando antecedentes ad terminorũ ſummas quadratum I L ad quadratorum ex I L, & ex N O ſummam eandem proportionem habebit, quàm H E ad ipſarum H E, & E G ſummam: ſed quadratum AC ad quadratum I L eſt, vt C G ad H E (vt in octaua propoſitione dictum eſt) ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex*

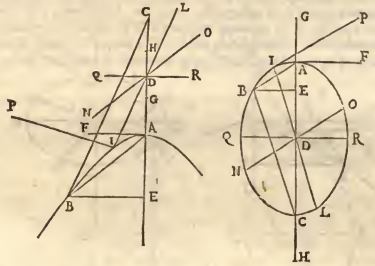


I L, & ex N O ſummam eandem proportionem habebit, quàm C G ad ſummam ipſarum H E, & E G, ſeu ad G H: ſed in principio præcedentis notæ oſtenſum eſt, quod in ellipſi quadratum A C ad quadratorum ex A C, & ex Q R ſummam eandem proportionem habet, quàm C G ad ſummam ipſarum C G, & C H, ſeu ad G H: quarè quadratum A C eãdem proportionem habet ad ſummam quadratorum ex C A, & ex Q R, quàm ad ſummam quadratorum ex I L, & ex N O; & propterea in ellipſi quadrata duorum axium A C, & Q R ſimul ſumpta æqualia ſunt quadratis duarum coniugatarum diametrorum I L, & N O ſimul ſumptis.

Notæ

Notæ in Propoſit. XXIX.

Quoniam in hyperbola differentia quadratorum ex axi A C, & ex axi Q R æqualis eſt differentiæ inter quadratum I L à quadrato eius coniugatæ N O; eſtque Q R media proportionalis inter figuræ latera A C, & A F; ergo rectangulum C A F ſub extremis contentum æquale eſt quadrato intermediæ Q R: Et propterea differentia inter quadratum A C, & rectangulum C A F æqualis erit differentiæ inter quadratum A C à quadrato Q R. 12. huius. 16. lib. 1.



Pari ratione erit differentia quadrati I L à rectangulo L I P æqualis differentiæ quadrati I L à quadrato N O; & propterea in hyperbole differentia quadrati axis A C à rectangulo ſub figuræ lateribus contentum C A F æqualis eſt differentiæ quadrati diametri I L à rectangulo L I P ſub lateribus figuræ eius.

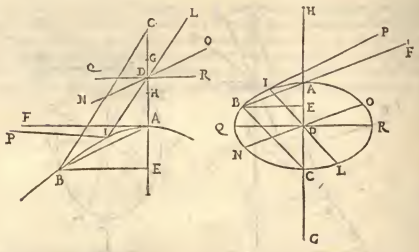
Notæ in Propoſit. XXX.

Quoniam in ellipſi quadratorum ex A C, & ex Q R ſumma æqualis eſt ſummæ quadratorum ex I L, & ex N O: eſtque rectangulum C A F æquale quadrato Q R, & rectangulum L I P æquale quadrato N O (vt in præcedenti nota dictum eſt) igitur in ellipſi quadratum axis A C, & rectangulum C A F ſub eius lateribus cõtentum ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato ex I L cum rectangulo figuræ eius L I P. Prop. 13. huius. ex 15. lib. 1.

Notæ

Notæ in Propoſit. XIV. & XXV.

QVoniam uedum in hyperbola, ſed etiam in ellipſi quadratum A C ad ſummam quadratorum ex I L, & ex N O eandem proportionem habet, quã A H ad ſummam ipſarum H E, & E G, atque quadratorum ex I L, & ex N O ſumma ad eorundem quadratorum differentiam eandem proportionem habet, quàm ipſarum H E, & E G ſumma ad earundem differentiam;

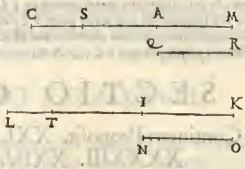


ergo ex æquali quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habet, quàm C G, ſiue H A ad ipſarum H E, & E G differentiam; ſed in ellipſi ipſarum H E, & E G differentia æqualis eſt duplo E D; igitur in ellipſi quadratum A C ad quadratorum ex I L, & ex N O differentiam eandem proportionem habebit, quàm præſecta C G ad duplum inuerſæ E D.

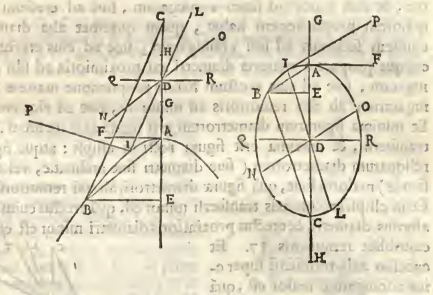
Notæ in Propoſit. XXVII.

ET oſtenſum iam eſt, quod I L in hyperbola maior eſt, quàm A C; C
ergo differentia A C, & illius coniugati maior eſt, quàm differentia homologorum ſuorum à ſuis coniugatis, & differentia proximioris homologi ad ſuam coniugatam maior eſt differentia remotioris à ſua coniugata, &c. *Hoc autem ſic demonſtrabitur. In diametris A C, & I L producatur A M æqualis Q R, & I K æqualis N O, & ab ijſdem ſecentur A S æqualis Q R, & I T æqualis N O. Quoniam M S bifariam ſecatur in A, & ei indirectum*

indirectum additur S C, erit rectangulum M C S cum quadrato ex A S, seu ex Q R aquale quadrato ipsius A C; ergo rectangulum M C S aquale est differentiæ quadrati A C à quadrato Q R: pari ratione rectangulum K L T vna cum quadrato N O aquale est quadrato I L: ergo similiter rectangulum K L T



aquale est differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; estque quadratum I L maius quadrato A C, cum diameter I L in hyperbola maior sit, quàm axis C A; igitur rectangulum K L T vna cum quadrato N O maius erit rectangulo M C S vna cum quadrato Q R: est verò rectangulum M C S aquale rectangulo K L T (cum sint differentiæ quadratorum ex conjugatis diametris, quæ in hyperbola ostensa sunt aquales); ergo quadratum N Prop. 12. huius.



O, scilicet residuum maioris summæ, maius erit quadrato Q R; quod est residuum summæ minoris: & propterea N O maior erit, quàm Q R: erat autem I L maior quàm C A; igitur I L cum N O, seu K L maior erit, quàm A C, & Q R simul, sine quàm M C: sed in rectangulis M C S, & K L T æqualibus, vt K L ad M C, ita reciprocè C S ad L T; igitur C S, seu differentia ipsarum A C, & Q R maior est, quàm L T, seu differentia ipsarum I L, & N O in hyperbola.

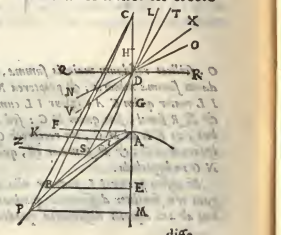
Si postea præter I L ponatur alia diameter ab axe remotior cum sua coniugata erit similiter differentia quadratorum ex diametris coniugatis remotioribus ab axi æqualis differentiæ quadratorum axium A C, & Q R, & ideo

æqualis erit differentiæ quadratorum ex I L, & ex N O; eſtque pariter diameter illa remotior ab axe maior quàm I L: ergo ſimili ratiocinio oſtendetur, quod differentia coniugatarum diametrorum ab axe remotiorum minor eſt, quàm differentia propinquiorum I L, & N O.

SECTIO QVINTA

Continens Propoſit. XXI. XXVIII. XXXXII. XXXXIII. XXIV. & XXXVII.

AXes hyperboles ſi fuerint æquales, tunc quælibet diametri coniugatæ in illa ſectione æquales ſunt 21. ſi verò fuerit 28. vnus duorum axium in hyperbola, aut ellipſi maior, a tunc eius diameter homologa maior erit ſua coniugata, quouſquè ad duas æquales diametros coniugatas in ellipſi perueniatur, & axis maior ad ſuum coniugatum, ſiuè ad erectum eius maiorem proportionem habet, quàm quælibet alia diameter eiuſdem ſectionis ad ſibi coniugatam, ſiue ad eius erectum; eritque proportio maioris diametri axi proximioris ad ſibi coniugatam, ſiue ad eius erectum maior proportione maioris coniugatarum ab illo remotioris ad minorem, ſiue ad eius erectũ. Et minima figurarum diametrorum erit figura axis inclinati, ſiue tranſuerſi, & maxima erit figura recti in ellipſi: atque figuræ reliquarum diametrorum (ſiue diametri ſint inclinatæ, vel tranſuerſæ) maiores ſunt, quã figuræ diametrorũ ab axi remotiorũ 24. Et in ellipſi erectus axis tranſuerſi minor eſt, quã erectus cuiuslibet alterius diametri, & erectus proximioris diametri minor eſt erecto cuiuslibet remotioris 37. Et excеſſus axis tranſuerſi ſuper eius coniugatum maior eſt, quã excеſſus homologarum diametrorum, ſuper ſuas coniugatas, & excеſſus proximioris homologæ ſuper ſuam coniugatam maior eſt, quàm excеſſus remotioris ſuper eius coniugatã. Et differentia duorum laterum figuræ axis maior eſt, quàm



diffe-

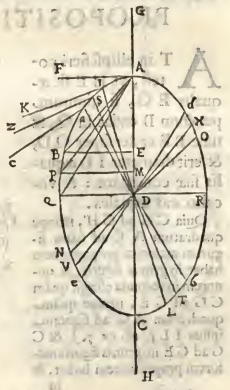
differentia duorum laterum figuræ sui homologi; pariterque proximioris axi homologi differentia duorum laterum figuræ eius maior est, quàm differentia duorum laterum figuræ remotioris.

PROPOSITIO XXI. & XXVIII.

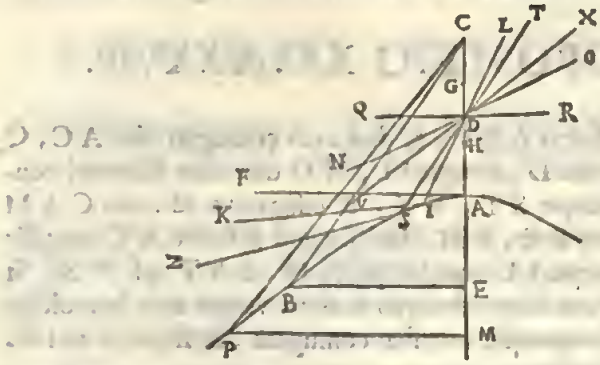
SIt itaque sectio A B P, & duo axes coniugati eius A C, Q R, centrum D; sintque I L, N O duæ aliæ diametri coniugatæ; pariterque S T, V X, & educamus ad axim C A M perpendiculares B E, P M. Dico quod si fuerit A C æqualis Q R; erit quoque I L æqualis ipsi N O, & S T ipsi V X. Si verò fuerit eorum aliquis reliquo maior, vtique eius homologa diameter maior quoque erit sua coniugata, & similiter in reliquis propositionibus.

Sit prius alter axis A C maior in prima figura, sed Q R in secunda; sintque A G, C H duæ interceptæ diametri A C. Et quia quadratum A C ad quadratum Q R, nempe A C ad eius erectum est vt A H ad H C, seu ad A G; & habet H A ad A G maiorem proportionem in prima figura, & minorem in secunda, quàm H E ad E G, quæ ostensa est (6. 7. ex 7.) vt quadratum I L ad quadratum N O, nempe I L ad eius erectum. Et similiter proportio illa maior, aut minor est, quàm H M ad M G, quæ est vt quadratum S T ad quadratum V X; igitur A C ad Q R, siue ad erectum ipsius A C in prima maiorem proportionem habet, & in secunda minorem, quàm I L ad N O, siue ad erectum ipsius I L, siue quàm S T ad V X, vel ad erectum ipsius S T; sed quia H E ad E G in prima figura maiorem proportionem, & in secunda minorem, quàm H M ad M G habebit I L ad N O maiorem proportionem in prima, & minorem in secunda, quàm S T ad V X, cumque H E in prima figura sit maior, & in secunda minor, quàm E G, pariterque H M, quàm M G, erit I L in prima maior, & in secunda minor, quàm N O, similiterque S T, quàm V X.

ex Def. 1. huius.



XXI. Deinde ſit A C æqualis Q R in hyperbola fiet A C æqualis erecto, & conuenient duo puncta H, & G in puncto D, eritque A C ad b

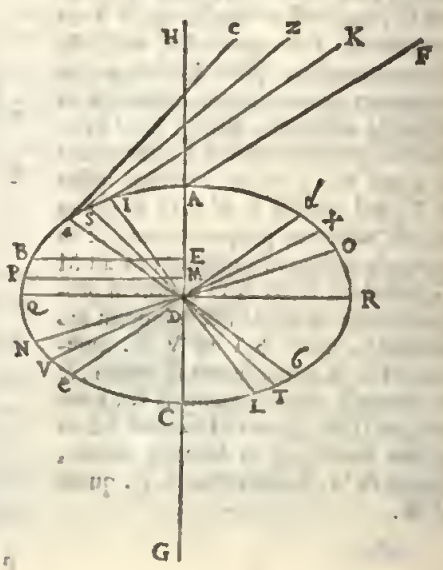


Q R vt A D ad ſe ipſam, ſiue vt A C ad ſe ipſam, quæ eſt vt D E ad ſe ipſam, & hæc oſtenſa eſt, vt quadratum I L ad quadratum N O; igitur I L, & N O ſunt æquales, & ſic demonſtrabitur, quod S T, V X ſunt æquales, & hoc erat propoſitum.

Prop. 6. huius.

PROPOSITIO XXVIII. pars 2.

AT in ellipſi fieri poteſt, vt H E ſit æqualis E G, ſi nimirum punctum B cadat in Q, & tunc B E cadet ſuper Q D, & erit diameter I L æqualis ſuæ coniugatæ; & vocabo eas æquales.



Quia C G ad C H, nempe quadratum A C ad ſuam figuram maiorem proportionem habet in primis figuris, & minorem in ſecunda ellipſi, quàm C G ad G E, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipſius I L (18. ex 7.) & C G ad G E in primis figuris maiorem proportionem habet, & c

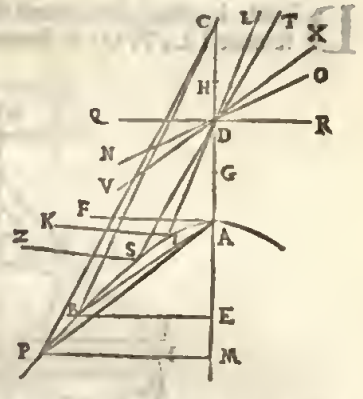
in

in ſecunda ellipſi minorem, quàm C G ad G M, nempe quàm quadratum A C ad figuram ipſius S T (18. ex 7.) ergo figura ipſius A C eſt minor; in ſecunda verò maior quàm figura ipſius I L; & ſimiliter figura ipſius I L maior, aut minor eſt figura S T. Et hoc eſt propoſitum.

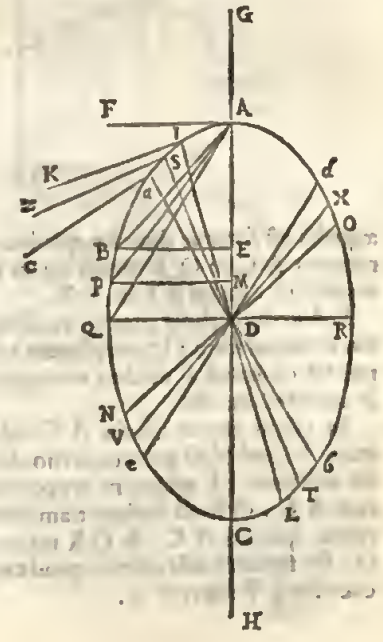
PROPOSITIO XXXXII.

IN hyperbole, & ellipſi ſúma duorum axium minor eſt ſumma quarumlibet duarum cõiugatarum diametrorum eiuſdẽ ſectionis.

XXXXIII. Et planum ab eis contentũ minus eſt plano à duabus coniugatis contento, & planum à proximioribus axi coniugatis contentum minus eſt plano à remotioribus contento.



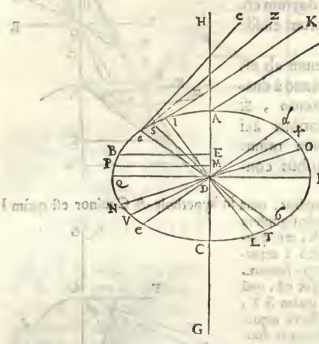
Iiſdem figuris manentibus, quia in hyperbole A C minor eſt quàm I L, & I L, quàm S T; & ſiquidem A C æqualis fuerit Q R, erit quoque I L æqualis N O, & S T æqualis V X (21. ex 7.) ergo ſumma ipſorum A C, Q R minor eſt, quã ſumma I L, N O, & quàm S T, V X: ſi verò A C non fuerit æqualis ipſi Q R, vtique differentia duorum quadratorum A C, Q R æqualis erit differentiæ quadratorum I L, d N O: & propterea ſumma ipſorum A C, Q R minor erit, quàm ſumma I L, N O: & hæc ſumma ex hac eadem demonſtratione minor etiam erit, quàm ſumma duarum S T, V X. At in ellipſi; quia A e C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O (28. ex 7.) habebit quadratum ex ſumma A C, Q R ad earundem duarum ſummam quadratorum maiorem proportionem, quàm quadratum ſummæ I L, N O ad quadratorum ſum-



ſummam earundem: & ſumma duorum quadratorum ipſarum æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum A C, Q R (22. ex 7.) ergo ſumma A C, Q R minor eſt, quàm ſumma I L, N O, atque ſic oſtendetur, quod ſũma I L, N O minor eſt, quàm ſumma S T, V X. Quod erat propoſitũ.

PROPOSITIO XXXXIII.

DEinde in ellipſi quadratum ſummæ A C, Q R minus eſt quadrato ſummæ I L, N O; & ſumma duorum quadratorum A C, Q R

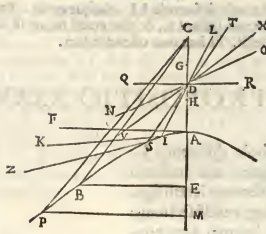


æqualis eſt ſummæ duorum quadratorum I L, N O (22. ex 7.) igitur remanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & ſimiliter I L in N O minus erit, quàm S T in V X. f

Sed in hyperbola, quia quilibet axium minor eſt homologa diametro coniugatarum; igitur planum rectangulum ab axibus contentum minus eſt eo quod à duabus coniugatis continetur hoc igitur in hyperbole manifeſtum eſt.

In ellipſi autem, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet; quàm I L ad N O per conuerſionem rationis, & permutando maior A C ad minorem I L minorem proportionem habebit, quàm differentia ipſarum A C, Q R ad differentiam ipſarum I L & N O; & propterea differentia ipſarum A C, & Q R maior erit differentia reliquarum I L, & N O. Et ſimiliter oſtendetur, quod exceſſus I L ſuper N O maior ſit, quàm exceſſus S T ſuper V X. g

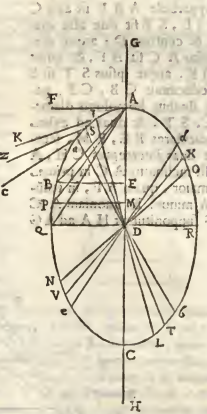
PROP.



PROPOSITIO XXIV.

ET quia in ellipſi quadratum Q R, nempe figura axis A C minor eſt in prima, & maior in ſecunda ellipſi, qdàm quadratum N O, nempe quã figura I L (28. ex 7.) eſtque A C maior in prima, & minor in ſecunda figura quàm I L; igitur erectum ipſius A C minus eſt in prima figura, & maius in ſecunda, quàm erectum I L. Et ſic oſtendetur, quod creæum ipſius I L maius ſit, ſiue minus, quàm erectum S T.

h



Et quia erectum ipſius A C minus eſt in prima ellipſi, & maius in ſecunda, quàm erectum ipſius I L, & A C maior eſt in prima, & minor in ſecunda figura quàm I L, igitur differentia A C, eiuſq; erecti, quæ ſunt duo latera figuræ A C, in quo-

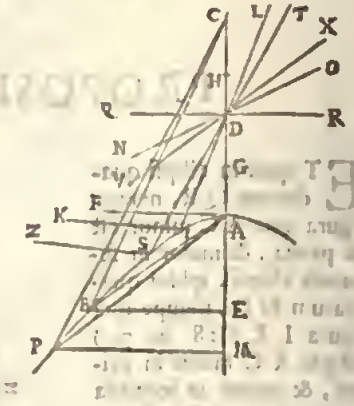
libet

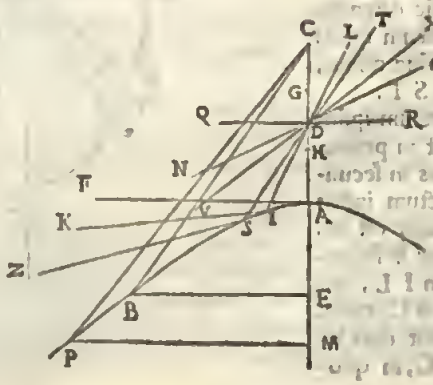
libet casu maior erit differentia I L, eiusque erecti. Pari modo ostendetur quod differentia ipsius I L, & eius erecti maior sit differentia ipsius S T, eiusque erecti. Et hoc erat ostendendum.

PROPOSITIO XXXVII.

IN hyperbole differentia laterum figuræ axis inclinati maior est differentia laterũ figurę sui homologi eiusdẽ sectionis: & differẽtia laterum figuræ inclinati proximioris axi maior est differentia laterum figuræ inclinati ab illo remotioris.

In hyperbole A B P sit axis C A, & I L, S T sit duæ aliæ diametri, & centrum D; atque erectus ipsius A C sit A F, & ipsius I L sit I K, atque ipsius S T sit S Z: & educamus C B, C P, parallelas duabus homologis diametris I L, S T, & duas ad axim perpendiculares B E, P M, secemusque duas interceptas C H, A G, & sit inclinatus A C in prima figura maior, quàm A F, in secũda verò minor. Et quoniam A C ad A F supponitur vt H A ad A G





erit

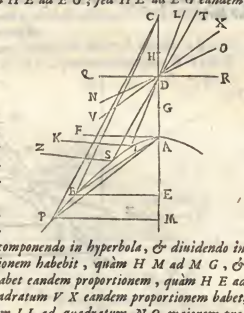
erit quadratum A C ad quadratum differentiæ ipſarum A C, A F, vt quadratum H A ad quadratum H G, at ad quadratum differentiæ ipſarum I L, I K eſt, vt E H in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) ad quadratum verò differentiæ S T, S Z eſt, vt H M in H A ad quadratum H G (19. ex 7.) eſt verò M H in H A maius quàm E H in H A, atque E H in H A maius quàm quadratum H A; igitur A C ad differentiam ipſarum A C, A F minorem proportionem habet, quàm ad differentiam ipſarum I L, I K, & ad differentiam earundem I L, I K minorem proportionem habet, quam ad differentiam ipſarum S T, S Z; igitur differentia ipſarum A C, A F maior eſt, quàm differentia ipſarum I L, I K, atquè differentia earundem I L, I K maior eſt quàm differentia S T, S Z. Quod erat propoſitum.

Notæ in Propoſit. XXVIII.

Sit in primis figuris axis A C maior, quàm axis Q R. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G; eſtque G A minor quàm G E; ergo H G ad G A maiorem proportionem habet quàm ad G E: & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi H A ad A G maiorem proportionem habet, quàm H E ad E G; ſed H E ad E G eandem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O; ergo quadratum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem habet, quàm quadratum I L ad quadratum N O: & propterea A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O: & ſunt quoquè earundem proportionum duplicatæ pariter inæquales, nimirum axis A C ad eius latus rectum A F maiorem proportionem habebit, quàm diameter I L ad eius latus rectum I K. Secundò quia G E minor eſt, quàm G M; ergo H G ad G E maiorem proportionem habet, quàm ad G M; & componendo in hyperbola, & diuidendo in ellipſi H E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm H M ad M G, & quadratum I L ad quadratum N O habet eandem proportionem, quàm H E ad E G; nec non quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; ergo quadratum I L ad quadratum N O maiorem proportionem habet, quàm quadratum S T ad quadratum V X, & I L ad N O maiorem proportionem habebit, quàm S T ad V X, & earundem proportionum duplicatæ inæquales quoque erunt, ſcilicet I L ad eius latus rectum maiorem proportionem habebit, quàm S T ad eius latus rectum. Deindè in ſecundis figuris ſit axis A C minor quàm Q R. Quia H A minor eſt, quàm H E;

ex 15. 16. lib. 1. Defin. 1. huius.

6 & 7. huius.



ex 15. 16. huius.

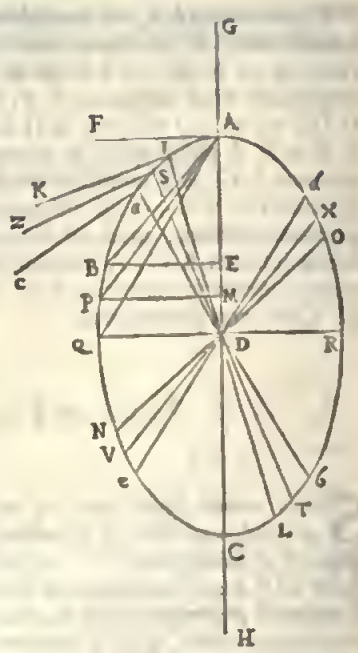
6. & 7. huius.

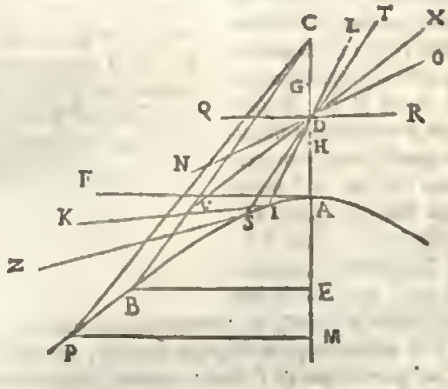
nec non H E minor quàm H M ergo H A ad eandem H G minorem proportionem habebit, quàm H E, & comparando antecedentes, ad terminorum summas vel ad differentias H A ad A G minorem proportionem habet, quàm H E ad E G, & similiter H E ad E G minorem proportionem habet, quàm H M ad M G: est verò quadratum A C ad quadratum Q R, vt H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O, vt H E ad E G; pariterquè quadratum S T ad quadratum V X est, vt H M ad M G; & ideo A C ad Q R minorem proportionem habebit, quàm I L ad N O, & I L ad N O minorem proportionem habebit, quàm S T ad V X; & similiter earundem proportionum duplicata eodem ordine inæquales erunt, scilicet A C ad eius latus rectum minorem proportionem habebit quàm I L ad eius rectum latus, &c. Ad perfectionem partis secundæ propositionis 28. requiritur hoc.

Lem. 2. lib. 5.

ex 15. 16. lib. 1. Defin. 1. huius. Prop. 7. huius.

ex 15. 16. lib. 1.



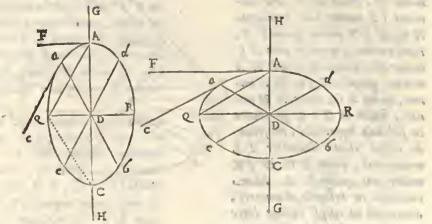


LEMMA. I.

IN ellipsi cuius axes inæquales sunt, duas diametros coniugatas inter se æquales reperire.

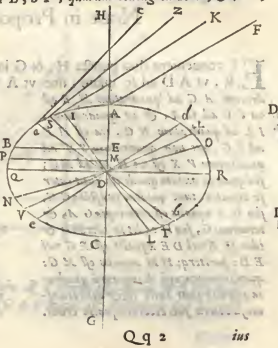
In

In eadem figura coniungatur recta linea A Q terminos axium coniungens, & per centrum huic parallela sit e d, *perq; idem centrum, & sempartitionem*



applicatæ A Q ducatur diameter a b: *Dico diametros coniugatas* a b, *&* c d *æquales esse inter se. Quoniam à termino Q ordinatim applicatæ A Q ad diametrum* a b *ducitur ad axim perpendicularis Q D cadens in centrum D; ergo* ex 7. huius. *H D ad D G eandem proportionem habet, quam quadratum diametri* a b *ad quadratum eius coniugatæ* c d; *sumptæ H D, & G D æquales inter se, cum semiaxes, atque intercepta sint æquales inter se; ergo diametri coniugatæ* a b, *&* c d *æquales erunt inter se hoc præmisso.*

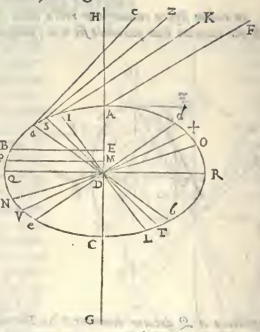
Reperiantur in ellipsi duæ diametri coniugatæ inter se æquales a b, c d, *& inter* a, *& A ponantur diametri I L, S T, quarum coniugatæ N O, & V X, & ducatur reliquæ rectæ lineæ, vt prius factum est, & ponatur primo loco axis A C maior quàm Q R: Dico I L maiorem esse ipsa N O, & S T maiorem V X. Quia quadratum A C ad quadratum Q R eandem proportionem habet, quàm H A ad A G, & quadratum I L ad quadratum N O eandem proportionem habet, quàm H E ad E G; pariterque quadratum S T ad quadratum V X eandem proportionem habet, quàm H M ad M G; sed in prima hyperbola, & prima ellipsi H A maior est, quàm A G, & H E maior, quàm E G, atque H M maior, quàm M G; igitur quadratum I L ma-*



Defin. 1. huius.

Prop. 7. huius.

ius est quadrato N O, & quadratum S T maius quadrato V X; ideoque quando axis A C maior est, quàm Q R, erit diameter I L maior eius coniugata N O, & S T maior quàm V X. Pari ratione, quando axis A C minor est, quàm Q R erit H A minor, quàm A G, & H E minor, quàm E G, atque H M minor, quàm M G: & propterea in secunda hyperbola, & secunda ellipsi etiam diameter I L minor erit, quàm N O, & S T minor erit quàm V X. Idem contingit in reliquis diametris, dummodo in ellipsi cadant inter A, & a, nam a b est aqualis suæ coniugatæ c d: & vltra punctum a ad partes Q diametri cadentes minores sunt suis coniugatis in prima ellipsi, & maiores in secunda, cum propinquiores sint axi Q R.

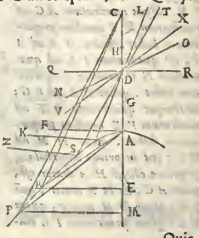


Si verò fuerit vnus duorum axium in hyperbola aut ellipsi maior, tunc eius homologa diameter coniugata maior est, &c. *Non nulla in hoc textu deficiunt; non enim omnes diametri in ellipsi sunt inaquales vt in Lemmate 1. ostensum est, & ideo textus corrigi debuit.* a

Notæ in Propositi. XXI.

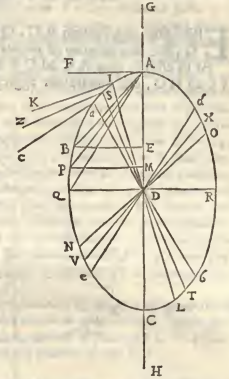
ET conuenient duo puncta H, & G in puncto D; eritque A C ad Q R, vt A D ad se ipsam, siue vt A C ad se ipsam, &c. *Quia quadratum A C ad quadratum Q R est vt C G ad G A, & vt quadratum I L ad quadratum N O, ita est H E ad E G, nec non quadratum S T ad quadratum V X est vt H M ad M G; sed quandò axium quadrata sunt inter se aqualia, tunc quidem præsecta C G, seu H A aqualis est intercepta G A, & terminus G, seu H cadit in cẽtro D; & ideo H E vel D E aqualis est E G vel E D: pariterq; H M aqualis est M G: quarè coniugatarũ diametrorũ quadrata aqualia sunt inter se; & etiã transuersa latera suis erectis aqualia erunt.* b

Defin. 1. Prop. 7. huius.



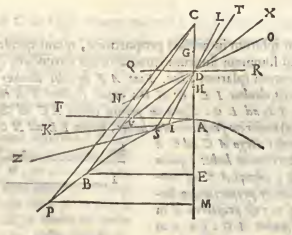
Quia

c Quia C G ad A G, nempe quadratum A C ad suam figuram in maiori, & in figura secunda ellipsi in minori proportione, &c. *Idest. In prima, & secunda figura hyperboles, & in prima figura ellipsis habet C G ad G A maiorem proportionem, quàm ad G E, eo quod G E maior est, quàm G A: at in secunda figura ellipsis proportio minor est; quia G E minor est, quàm A G. Propositum verò aliter ostenditur hac ratione.*



Quoniam ex demonstratis in nota propos. 27. in hyperbola, atquè ex propositione 11. libri quinti in ellipsi erit axis minor, & rectus Q R minor diametro recta N O, & N O minor remotiore V X, ideoquè quadratum Q R minus erit quadrato N O, & quadratum N O minus quàm quadratum V X: est verò figura, seu rectangulum C A F sub extremis contentum æquale quadrato Q R ex media proportionali inter illas descriptum: paristerquè rectangulum L I K æquale est quadrato diametri ei coniugatæ N O, nec non rectangulum T S Z æquale erit quadrato V X, ergo rectangulum C A F minus est rectangulo L I K, atque rectangulum L I K minus est rectangulo T

15. lib. 1.



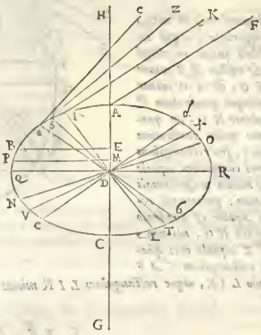
S Z. E contra in ellipsi secunda. Quia Q R maior est, quàm N O; & hæc maior, quàm V X; ergo rectangulum C A F maius est rectangulo L I K, & hoc maius erit rectangulo T S Z.

Notæ

Notæ in Propoſit. XXXXII.

ERit igitur aggregatum A C, Q R minus quàm aggregatum I L, N O, &c. *Hoc oſtenſum eſt in nota propoſit. 27. huius.* d

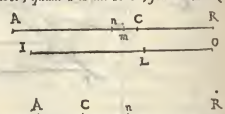
At in ellipſi, quia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, erit quadratum aggregati A C, Q R ad ſummam duorum c



quadratorum ipſarum in maiori proportione, quàm quadratum aggregati I L, N O ad ſummam duorum quadratorum earundem, & ſumma duorum quadratorum ipſarum, &c. *Fiat A R æqualis duabus A C & Q R, I O fiat æqualis duabus I L, & N O; atque ſecetur A R in* m, *vt ſit* A m *ad* m R, *vt I L ad L O. Quia in prima ellipſi A C ad Q R, vel ad C R (in hac figura) maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O, ſeu ad L O (in præſenti figura); Ergo A C ad C R maiorem proportionem habet, quàm* A m *ad* m R; *ideoq; A C ad eandem A R maiorem proportionem habebit quàm* A m; *& propterea* A m *minor erit, quàm A C: ſed* A m *maior eſt quàm M R, eo quod I L priori homologa maior eſt, quàm L O; at in ſecunda ellipſi A C ad C R minorem proportionem habet, quam*

Prop. 21. huius.

Lem. 2. lib. 5.



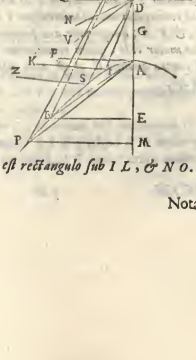
I L

I L ad L O, seu quàm A m *ad* m *R; & A C ad eandem A R minorem proportionem habet quàm A* m; *ideoque A C minor erit, quàm A* m, *& A* m *minor quàm* m *R, sicuti I L minor est, quàm L O; & propterea secta A R bifariam in* n *in vtroq; casu C* n *semidifferentia maximæ, & minimè scilicet A C, & C R maior erit, quàm* m n *semidifferentia inæqualium intermediarum A* m, *& R* m: *suntque duo quadrata ex A C, & ex C R æqualia quadratis ex R* n, *& ex C* n *bis sumptis, atquè quadrata ex A* m, *& ex R* m *æqualia sunt quadratis ex R* n, *& ex* m n *bis sumptis, sed duplum quadrati* n *C cum duplo quadrati* n *R maiora sunt duplo quadrati* n m *cum duplo quadrati* n *R (cum* n *R sit communis, &* n *C maior sit* n m); *igitur in vtroque casu duo quadrata ex maxima, & ex minima, scilicet quadratum A C vna cum quadrato C R maiora sunt quadrato A* m, *& quadrato* m *R simul sumptis: & quadratum A R minorem proportionem habet ad summam quadratorum ex A C, & ex C R, quàm ad summam quadrati A* m, *& quadrati* m *R; sed quadratum I O ad quadratum I L vna cum quadrato L O eandem proportionem habet, quàm quadratum A R ad summam duorum quadratorum ex A* m, *& ex* m *R (propterea quod A R, & I O diuiduntur proportionaliter in* m, *& L): igitur quadratum A R ad summam quadrati A C vna cum quadrato C R minorem proportionem habet, quàm quadratum I O ad summam quadrati I L cum quadrato L O.* Lem. 2. lib. 5.

Non secus ostendetur, quod quadratum summæ I L, & N O ad quadrati ex I L, & quadrati ex N O summam habet minorem proportionem, quàm quadratum summæ S T, & V X ad quadratorum ex S T, atquè ex V X summam: & ideo I L cum N O minores erunt, quàm S T cum V X. ex 22. huius.

Notæ in Propositi. XXXXIII.

f REmanet A C in Q R minus quàm I L in N O, & pariter I L in N O minus quàm S T in V X, &c. *Quia si ex quadrato summæ A C, & Q R auferantur duo quadrata ex C A, & ex Q R simul sumpta, remanent duo rectangula sub C A, & Q R contenta: pariterque duplum rectanguli ex I L in N O est residuum quadrati ex summa ipsarum I L, & N O descripti, postquàm ablata sunt quadratum ex I L, & quadratum ex N O simul; sed bina quadrata vtring; ablata sunt æqualia inter se in ellipsi; & summa A C, Q R minor est quàm summa I L, N O; Ergo duplum rectanguli sub C A & sub Q R minus est duplo rectanguli I L in N O, & rectangulum sub A C, & Q R minus est rectangulo sub I L, & N O.*



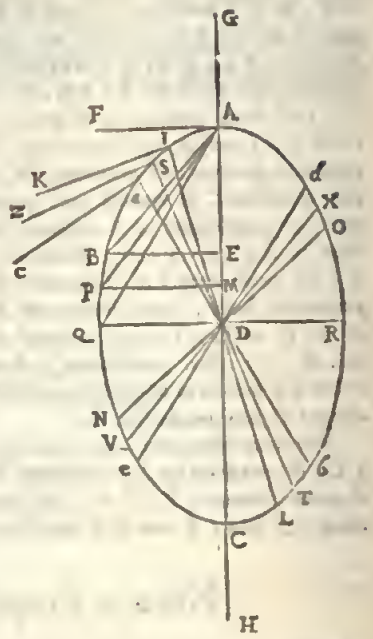
Prop. 22. huius.

Prop 42. huius.

Notæ

Notæ in Propoſit. XXXVII.

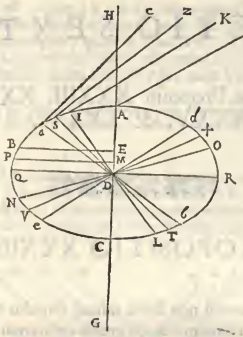
QVia A C ad Q R maiorem proportionem habet, quàm I L ad N O poſt cõuerſionem rationis, & permutationem A C maior ad I L, minorem, habebit proportionem minorem, quàm exceſſus A C ſuper Q R ad exceſſum I L ſuper N O, &c. *Hoc quidem verum eſt in ellipſi, (velut dictum eſt ad propoſ. 28. huius) quandò maior axis eſt A C, ſed quandò A C eſt minor, atque A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O, opere pratium erit, demonſtrare, quod tunc etiam differentia axium A C, & Q R maior ſit differentia diametrorum I L, & N O. Quoniam exiſtente C A minore, quàm Q R (ex 28. huius) A C ad Q R minorem proportionem habet, quàm I L ad N O; & inuertendo Q R ad A C maiorem proportionem habebit, quàm N O ad I L, & per conuerſionẽ rationis Q R ad differentiam ipſarum Q R, & A C minorem proportionem habebit, quàm N O ad differentiam ipſarum N O, & I L; & permutando Q R maior ad minorem N O habebit proportionem minorem, quàm differentia ipſarum Q R, & A C ad differentiam ipſarum N O, & I L: & propterea differentia ipſarum Q R, & A C maior erit, quàm differentia ipſarum N O, & I L.*



28. huius. *Poſtea quandò C A eſt maior axis, tunc I L ad N O maiorem proportionem habet, quàm S T ad V X; & ſimiliter per conuerſionem rationis, & permutando maior I L ad minorem S D habebit minorem proportionem, quàm differentia coniugatarum diametrorum I L, & N O ad differentiam coniugatarum S T, & V X, quapropter axi propinquiorum diametrorum I L, & N O differentia maior erit, quàm remotiorum coniugatarum S T, & V X differentia.*

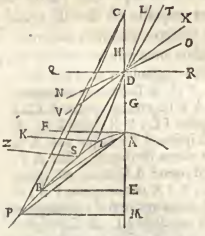
E contra quandò C A eſt axis minor idem concludetur, vti paulo ante factum eſt.

Notæ



Notæ in Propoſit. XXIV.

h IGitur erectum ipſius A C minus eſt in prima, & maius in ſecunda, quàm I L, & ſic oſtenderur, quod erectum ipſius I L maius ſit, ſiue minus quàm erectum S T, &c. *Quoniam in prima ellipſi rectangulum C A F minus eſt rectangulo L I K; ergo A C ad I L minorem proportionem habet reciproce, quã I K ad A F; quare I K ad aliquam aliam quantitatem maiorem, quàm A F eandem proportionem habebit, quàm A C ad I L; eſtque A C maior quàm I L in prima ellipſi; ergo multò magis I K maior erit quàm A F. Pari ratione in eadem prima ellipſi rectangulum L I K minus eſt rectangulo T S Z, & I L axi maiori propinquior maior eſt, quàm S T; ergo S Z maior erit, quàm I K.*



Prop. 28. huius.

E contra in ſecunda ellipſi rectangulum L I K minus erit rectangulo C A F; & rectangulum T S Z minus erit rectangulo L I K; eſtque T S maior quàm I L, & I L maior, quàm A C; igitur reciprocè A F maior erit, quàm I K, & I K maior, quàm S Z.

Ibidem.

SECTIO SEXTA

Continens Propoſit. XXXIII. XXXIV. XXXV. & XXXVI.

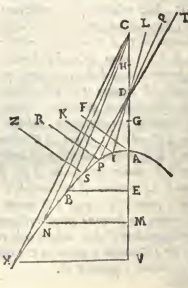
PROPOSITIO XXXIII.

AXis inclinatus ſi non fuerit minor dimidio ſui erecti, vtique eius erectus minor eſt erecto cæterarum diametrorum inclinatarum eiuſdem ſectionis, & axi proximioris inclinati erectus minor eſt, quàm erectus remotioris.

XXXV. Et ſi fuerit axis inclinatus minor dimidio erecti, vtique ad vtraſque eius partes cadent duæ inclinatæ, quarum quælibet æqualis eſt ſemiſſi erecti ipſius, atque eius erectus minor eſt erecto cuiuslibet inclinati ad vtraſque partes eius poſitæ, & erectus proximioris minor eſt erecto remotioris.

In hyperbole A B N ſint A C, I L, P Q, S T diametri inclinatæ, & A F ſit erectus ipſius A C, I K ipſius I L, P R ipſius P Q, & S Z ipſius S T: ſitquè axis A C non minor medietate ipſius A F. Dico, quod A F minor eſt, quàm I K, & I K minor quàm P R, & P R minor quàm S Z. Educantur C B parallela I L, & C N ipſi P Q, & C X ipſi S T; & ducantur B E, N M, X V perpendiculares ad axim C A E. Quoniam ſi A C æqualis eſt ipſi A F, etiam I L æqualis eſt ipſi I K (21. ex 7.) & P Q ipſi P R; eſtque A C minor quam I L, & I L, quàm P Q; ergo

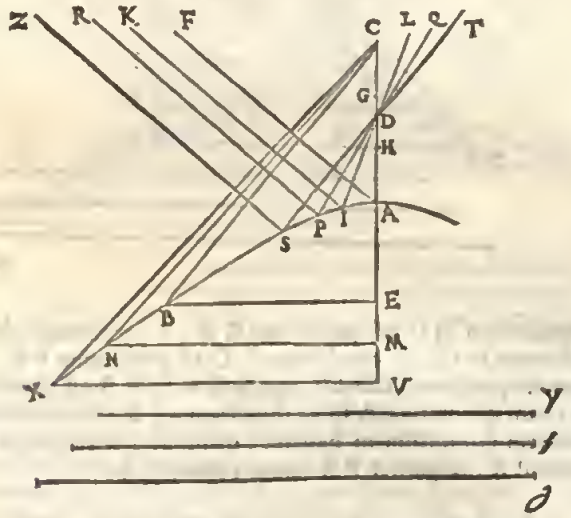
ex 38. lib. 5.



ergo A F minor eſt, quàm I K, & I K minor quàm P R. Si verò A C maior eſt, quam A F eſſet I L maior, quàm I K: & I L ad I K minorem proportionem habebit, quàm A C ad A F (28. ex 7.) & I L maior eſt quàm A C; igitur A F minor eſt, quàm I K; atquè ſimiliter patebit I K minorem eſſe quàm P R, & P R, quàm S Z. 21. huius.

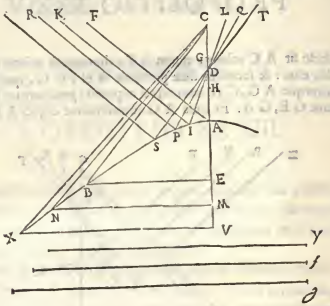
PROPOSITIO XXXIV.

DEinde ſit A C minor, quàm A F, dummodò minor non ſit dimidio eius: & ſecentur duæ præſectæ A H, C G, quæ erunt æquales; pariterque A G, C H interceptæ æquales; ponaturque linea y æqualis ſummæ G E, G A. Et quia A G non eſt maior duplo A H, & y maior



eſt duplo A G, erit y in A H maius, quàm quadratũ A G; igitur y in A E ad y in A H, nempe E A ad A H minorem proportionẽ habebit, quã y in A E ad quadratum A G; ideoquè E H ad H A, nẽpe E H in H A ad quadratum A H minorẽ proportionẽ habebit, quàm y, ſeu eidem æquales E G, G A in A E, cum quadrato A G (quæ ſunt æqualia quadrato G E) ad quadratum A G; ergo E H in H A ad quadratum E G, ſeu (vt oſtenſum eſt in 15. ex 7.) quadratum A C ad quadratum I K minorem proportionem habebit, quàm quadratum A H ad quadratũ A G, ſeu quã quadratum A C ad quadratum A F. Igitur A C ad I K minorem proportionem habet, quàm ad A F; & propterea A F minor eſt quàm I K.

Simili modo oſtendetur quod I K minor ſit, quàm P R: etenim ſi ponatur linea *f* æqualis ſummæ M G, G E: cum G E non ſit maior duplo E H, & *f* maior ſit duplo G E; igitur *f* in E H maius eſt quadrato G E. Poſtea oſtendetur (quemadmodum antea dictum eſt) quod M H ad H E, nempe M H in H A ad E H in H A minorem proportionem habet



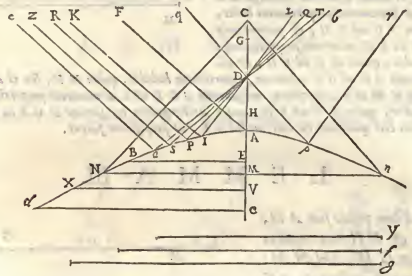
quàm quadratum M G ad quadratum G E; & permutando M H in H A ad quadratum M G, ſeu quadratum A C ad quadratum P R (15. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum G E, nempe quàm quadratum A C ad quadratum I K: & propterea A C ad P R minorem proportionem habebit, quàm ad I K; ideoquè I K minor eſt, quàm P R: & pariter P R minor, quàm S Z.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

SIt poſtea A C minor dimidio A F; erit A G maior duplo A H, & ideo H G maior eſt, quàm H A: ponatur iam H M æqualis H G, ducaturque ad axim perpendicularis N M; iungaturque N C, & educatur diameter P Q parallela N C. Et quia M H medietas eſt ipſius M G, erit P Q dimidium ipſius P R (6. ex 7.) Inter duas diametros P Q, A C ducatur diameter I L, & C B ei parallela, & ad axim perpendicularis B E. Quoniam M H in H E minus eſt quadrato H G; addito communi

producto

producto ex G E, & G H in E H, erit M H in H E cum E G, atquè G H in H E, nempe ſumma M G, G E, quæ eſt æqualis ipſi *f* in E H minus erit, quàm quadratum H G cum aggregato E G, G H in E H, quæ ſunt æqualia quadrato G E; igitur *f* in E H minus eſt quadrato E G. Poſtea vti prius dictum eſt oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum P R maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum I K, & propterea P R minor eſt, quàm I K. Non aliter oſtendetur quod I K minor ſit, quàm A F. Ponatur poſtea diameter S T extra locum inter P Q, A C comprehenſum, ducaturque C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V. Igitur V H M maius erit quàm quadratum H G,



& eodem modo procedendo, tandem oſtendetur quod quadratum A C ad quadratum S Z minorem proportionem habet, quàm ad quadratum P R, & ideo P R minor erit quàm S Z. Non ſecus oſtendetur quod S Z minor eſt erecto cuiuslibet inclinati cadentis ad partem S T extra illam. Itaque demonſtratum eſt, quod P R minor ſit erecto cuiuslibet diametri ſectionis cadentis ad vtraſque partes ipſius P Q verſus A, & X, & erecti proximiores diametro P Q minores ſunt remotioribus. Et hoc erat propoſitum.

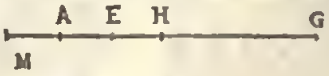
In Sectionem VI.

IN Expoſitione ſequentium Propoſitionum difficultas, quæ à nimia prolixitate oritur, incuitabilis eſt, niſi Methodus in textu ſeruata aliquantisper relinquatur: propterea non nulla lemmata præmittam, ex quibus ſemel demonſtratis caſus omnes ſequentium propoſitionum facillime, & breuiſſime deducuntur.

Lemma

LEMMA II.

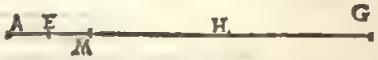
Si recta linea H G producatur in A & E, ita vt A H, pariterque E H, non maior sit H G: Dico rectangulum ex A G E summa inæqualium segmentorum in E H intermediam sectionem, minus esse quadrato ex segmento intermedio minore E G.



Fiat H M æqualis H G, & quia A E æqualis, aut minor est, quàm M E; & E G maior, quàm E H, ergo A E ad M E minorem proportionem habet, quàm E G ad E H, & permutando A E ad E G minorem proportionem habebit, quàm M E ad E H, & cõponendo A G ad G E minorem proportionem habebit, quàm M H, seu ei æqualis G H ad H E, & iterum componendo A G E ad G E minorem proportionem habebit, quàm G E ad E H: quare Rectangulum ex summa A G E in H E minus erit quadrato ex intermedia G E, vt propositum fuerat.

LEMMA III.

Isdem positis sint A H, & E H non minores quàm G H, vel H M: Dico rectangulum ex A G E in E H maius esse quadrato ex E G.



Quia A G maior est quàm E G, & G H non maior ipsa H E, ergo A G ad G E maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, & componendo A G E ad E G maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo rectangulum ex A G E in E H maius erit quadrato ex G E.

LEMMA IV.

Isdem positis sit A H maior, sed E H minor eadem M H semisse totius M G: Dico quod si proportio ipsius A G ad G E fuerit eadem rationi G H ad H E, erit

rectan-

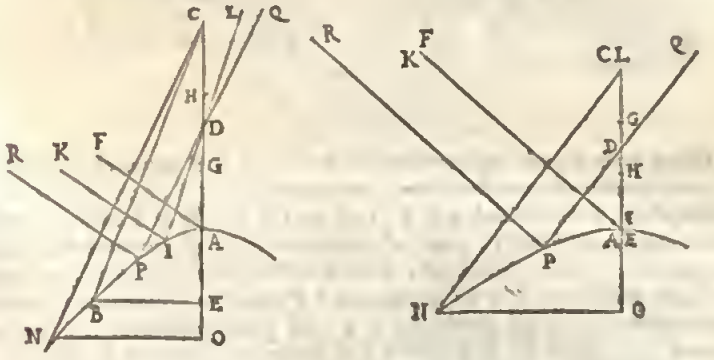
rectangulum ſub A G E in E H æquale quadrato ex G E, & ſi proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadrato; & ſi illa proportio minor fuerit, Rectangulum quadrato minus erit.

Et primo, quia A G ad G E ponitur vt G H ad H E; componendo A G E ad G E, erit vt G E ad E H, & rectangulum ſub extremis conceptum, nimirum ſub A G E in E H, æquale erit quadrato ex intermedia G E.

Secundo, ſi A G ad G E maiorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, componendo A G E ad G E maiorem proportionem habebit, quàm G E ad E H, & ideo Rectangulum ſub A G E in E H maius erit quadrato ex G E. pari ratione ſi A G ad G E minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, oſtendetur Rectangulum ex A G E in E H minus quadrato G E.

LEMMA V.

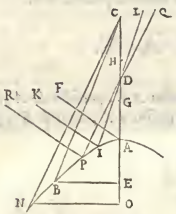
IN hyperbola, cuius axis C A, & erectus A F, præſecta H A, intercepta G A, diameter L I, cuius erectus I K, latus C E, &

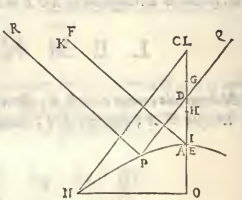


diameter Q P, cuius erectus P R, latus C O: Dico quod erectus P R ab ipſo erecto I K, vel ab A F atque rectangulum ſub O G E in G H ab ipſo quadrato G E, vel rectangulum ex O G A in A H ab ipſo quadrato G A, vna deficiunt, vel vna æqualia ſunt, aut vna excedunt.

Et primo ponatur rectangulum ſub O G E in E H æquale quadrato E G, ergo idem rectangulum ſub O G E in E O ad rectangulum ſub E G O in E H, ſeu E O ad E H eandem proportionem habet, quàm ad quadratum G E, & propterea E O ad E H erit vt rectangulum ſub E G O in E O ad quadratum E G,

G E, & componendo O H ad E H, seu rectangulum O H A ad rectangulum E H A, erit vt rectangulum sub G E, & G O in O E vna cum quadrato E G, seu vt quadratum ex O G ad quadratum ex G E, & permutando rectangulum A H O ad quadratum O G, erit vt rectangulum E H A ad quadratum G E, sed vt rectangulum O H A ad quadratum O G, ita est quadratum A C ad
15. huius. *quadratum P K, & vt rectangulum E H A ad quadratum*
ex Def. & *ex G E; seu vt*
15. huius. *quadratum A C ad quadratum A F, vel ex I K; quapropter idem quadratum A C ad quadratum ex P K, atque ad quadratum ex A F vel I K eandem proportionem habet, & ideo quadrata ipsa aqualia sunt, & eorum latera P K; & A F, vel I K pariter aqualia erunt.*





Eodem modo quando rectangulum sub O G E in E H maius est quadrato G E, tunc quidem idem rectangulum, cuius altitudo O G E, basis vero O E, ad rectangulum, cuius altitudo O G E, basis verò E H, seu O E ad E H, minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum E G, & componendo, atque permutando, vt prius factum est, habebit rectangulum O H A ad quadratum O G, siue quadratum A C ad quadratum P K minorem proportionem, quàm
15. huius. *rectangulum E H A ad quadratum G E, seu quàm quadratum A C ad quadratum A F, vel I K, & propterea P K maior erit, quàm A F, vel I K.*

Quando verò rectangulum sub E G O in E H minus est quadrato E G, tunc quidem ostendetur eodem progressu quadratum P K minus esse quadrato A F, vel I K, quod erat propositum.

Notæ in Propos. XXXIII. & XXXIV.

Def. 2. huius. *QVoniam ex hypotesi C A minor non est medietate ipsius A F, estque A H ad A G, vt C A, ad A F, ergo A H maior, aut aqualis est medietati ipsius A G, & ideo A H maior, aut aqualis est residuo H G, quare E H,*

E H, atque eius portio A H non minores sunt eadem G H; ergo rectangulum sub E G A in A H maius erit quadrato A G, atque I K maior erit quàm A F.

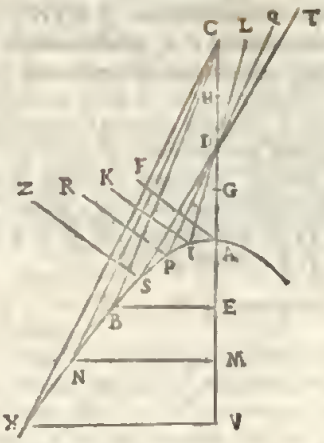
Simili modo, quia tam M H, quam E H excedunt ipsam, G H, erit rectangulum sub M G E in E H maius quadrato A G, atque P R maior, quam I K.

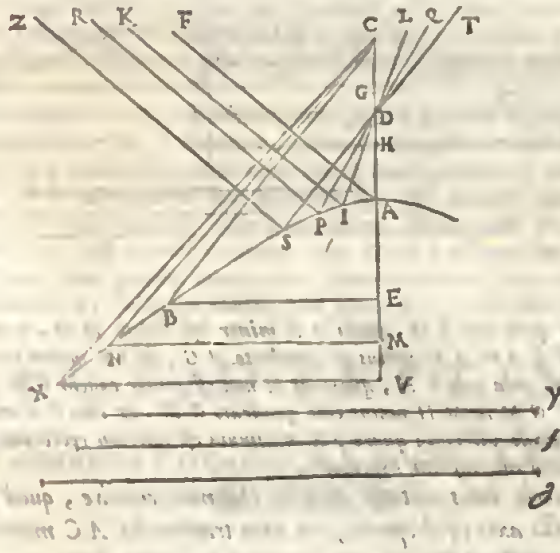
Lem. 3. huius.

Lem. 5.

Lem. 3. huius.

Lem. 5. huius.

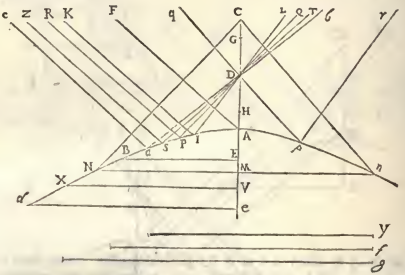




Notæ in Propoſit. XXXV.

Quia ex hypoteſi axis A C minor eſt ſemi A F, erit A H minor mediate ipſius A G, & ideo A H minor erit H G: ſiat igitur M H æqualis H G, & per M (quæ intra ſectionẽ cadet) ad axim ordinatim applicata

ducatur N n occurrens ſectioni in N, & n, à quibus iungantur N C, n C, & eis æquidiſtantes diametri P Q, & p q extendantur, quarũ erecta P R, & p r. Oſtendendum eſt P Q ſubduplam eſſe ipſius P R, atq; p R, & p r æquales eſſe inter ſe, & minima eſſe erectorum quarumlibet Diametrorum eiuſdem ſectionis. Prop. 6. huius. *Quoniam vt H M ad M G ita eſt P Q ad P R, & p q ad p r, erat autem H M ſubdupla ipſius M G, ergo Diameter P Q ſubdupla eſt erecti eius P R, pariterque p q ſubdupla eſt ipſius p r: atque Diametri P Q, & p q æquales ſunt inter ſe, cum æque recedant ab axi A C, atque earum commune latus ſit C M. Poſtea quia tam E H, quàm M H maiores non ſunt eadem H M, vel* Lem. 2. huius. *G H, ergo rectangulum ſub M G E in E H minus eſt quadrato E G, & ex lem. 5. P R minor eſt I K.*



Lem. 2. & 5. huius. *Similiter quia tam E H, quàm A H minor eſt eadem H M, ergo rectangulum ſub E G A in A H minus eſt quadrato A G, & I K minor erit, quàm A F. tandem, quia tam V H, quàm M H non eſt minor eadem G H, ergo* Lem. 3. *rectangulum V G M in M H maius erit quadrato G M, & ideo S Z maior erit,* Lem 5. *quàm P R, & ſic vlterius: quare P R minimum eſt laterum rectorum quarumlibet Diametrorum eiuſdem hyperboles.*

PROP. 1. Addit *In hyperbole latus rectum alicuius Diametri reperire, quod æquale ſit lateri recto axis; ſed oportet, vt axis tranſuerſus A C minor ſit medietate eius erecti A F.*

ex 35. hu. *Reperiatur Diameter P Q, quæ ſubdupla ſit eius erecti P R, ſitque C M latus, & fiat e G ad G A, vt M H ad H A, & ducatur ordinatim applicata ad axim e d, coniungaturque recta d C, & extendatur diameter a b parallela ipſi d C, cuius latus rectum ſit a c. Dico a c æquale eſſe A F: quia e G* Lem. 4. huius. *ad G A facta fuit vt M H, ſiue G H ad H A, ergo rectangulum ſub e G A in* Lem. 5. huius. *A H æquale eſt quadrato G A, ideoque erectum a c æquale erit erecto A F, quod erat propoſitum.*

Dato

Dato latere recto I K diametri hyperboles I L reperire latus rectum alterius Diametri, quod æquale ſit lateri recto I K: oportet autem, vt Diameter I L cadat inter axim, & aliam Diametrum, quæ ſubdupla ſit ſui erecti. PROP. 2. Addit.

Reperiatur Diameter Ω P, qua ſubdupla ſit ſui erecti P R, eiuſque latus ſit M C; ergo ex hypotheſi I L cadet inter axim A C, & Diametrum P Ω, & propterea terminus E lateris C E cadet inter A, & M, igitur reperiri poterit V G, quæ ad G E eandem proportionem habeat, quàm maior M H ad minorem H E, & vt prius, laterit C V ducatur diameter S T, cuius latus rectum S Z: dico S Z æquale eſſe I K: quia V G ad G E eſt, vt M H, ſeu G H ad H E, ergo rectangulum ſub V G E in E H æquale eſt quadrato G E, ideoque S Z æquale I K; quod erat propoſitum. ex 35. huius. Lem. 4. huius. Lem. 5. huius.

Deducitur ex prima propoſitione additarum quod in aliqua hyperbola reperiri poſſunt tria diametrorum latera recta æqualia inter ſe; ſi nimirum in hyperbola, cuius axis C A minor ſit medietate eius lateris recti, reperiantur vtrinque duæ diametri b a, *quarum latera recta* a c *æqualia ſint ipſi A F; tunc quidem tria illa latera recta æqualia erunt inter ſe: reliqua verò latera recta diametrorum cadentium inter A, & a maiora erunt latere recto A F; & latera recta diametrorum cadentium vltra punctum* a *ad partes B maiora ſunt latere recto* a c, *propterea quod magis recedunt ab omnium minimo latere recto P R.* ex 35. huius.

Simili modo in eadem hyperbola reperiri poſſunt quatuor diametrorum latera recta æqualia inter ſe, ſi nimirum ex ſecunda propoſitione additarum dato latere recto I K diametri I L reperiatur æquale latus rectum S Z alterius diametri S T, & ex altera parte axis ducantur duæ aliæ diametri æquè ab axi remota ac illa, erunt quatuor recta latera earum æqualia inter ſe, & maiora quolibet latere recto diametri cadentis inter I, & S ad vtraſque partes axis: minora verò erunt quolibet latere recto diametri cadentis vltra punctum I ad partes verticis A, vel infra puncta S ad partes a, *vt deducitur ex 35. huius.*

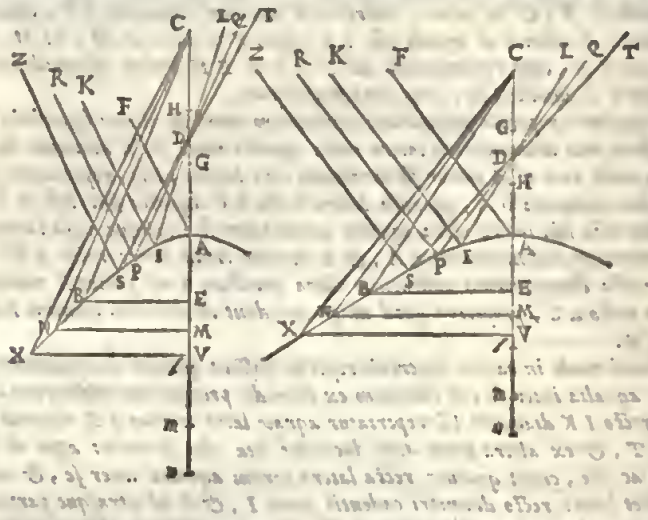
SECTIO SEPTIMA

Continens Propoſit. XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

PROPOSITIO XXXVIII.

IN hyperbole axis inclinatus ſi non fuerit minor triente erecti ipſius, erunt duo latera figuræ axis minora, quàm duo latera figuræ cuiuslibet inclinatæ coniugatarum, quæ in eadem ſectione conſiſtunt, & duo latera figuræ inclinati proximioris axi minora ſunt, quàm duo latera figuræ remotioris inclinati.

Si verò fuerit axis minor parte tertia ſui recti aſſignari poterunt ad vtraſque eius partes duo æquales diametri, quarum quælibet pars tertia ſit ſui recti, atque duo latera figuræ eiuſdem minora ſunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri ad vtraſque eius partes in eadem ſectione cadentis: & duo latera figuræ diametri ei propinquiores minora ſunt duobus lateribus figuræ remotioris.



In eadem figura ſupponatur prius hyperboles axis A C non minor ſuo recto, erit P Q maior quàm A C, & S T maior quàm P Q: ideoquè rectus ipſius A C minor erit recto ipſius P Q (33. ex 7.), & rectus ipſius P Q minor eſt recto ipſius S T; igitur duo latera figuræ A C minora ſunt, quàm duo latera figuræ P Q, & duo latera figuræ P Q minora, quàm duo latera figuræ S T.

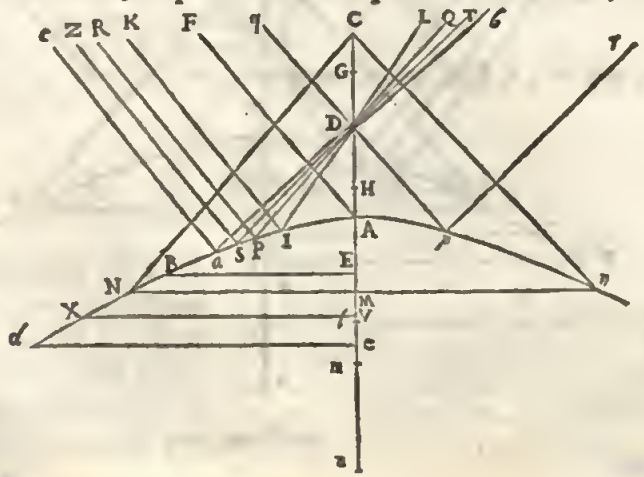
PROPOSITIO XXXIX.

DEindè ſit A C minor quàm A F, ſed non ſit minor tertia parte eius; igitur A H non erit minor tertia parte ipſius H C: & propterea non eſt minor quadrante ipſius A C; ideoquè C A in A H non eſt minus quarta parte quadrati A C; quare C A in A M quater ſumptum ad C A in A H quater, nempe M A ad A H non habet maiorem proportionem, quàm quadruplum ipſius A C in A M ad quadratum A C. Et ponamus M m æqualem M A, componendo M H, ad H A, nempe M H in H A ad quadratum H A non habebit maiorem proportionem, a

tionem ; quàm C M in M A quater ſumptum vna cum quadrato C A, nempe quàm quadratum C *m* ad quadratum A C ; ideoque M H in H A ad quadrarum H A minorem proportionem habet quàm quadratum C *m* ad quadratum A C. Et permutando M H in H A ad quadratum C *m*, ſeu ad quadratum ex ſumma ipſarum G M ; & M H, ad quod habet eandem proportionem quàm quadratum C A ad quadratum ſummæ P Q, & P R (17. ex 7.) habebit minorem proportionem ; quàm quadratum A H ad quadratum A C, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum A C, & A F ; igitur ſumma ipſarum A C, & A F minor eſt quàm ſumma ipſarum P Q, & P R. Et quia M H maior eſt quarta parte ſummæ ipſarum M G, & M H ; ergo quadruplum C *m* in M H maius eſt quadrato C *m*, & ponatur V *n* æqualis A V ; igitur quadruplũ V M in C *m* ad quadruplum M H in C *m*, ſcilicet V M ad M H minorem proportionem habebit, quàm quadruplum V M in C *m* ad quadratum C *m* ; & componendo V H ad H M, nempe V H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm V M in C *m* quater ſumptum, vel *n m* in *m* C bis ſumptum cum quadrato C *m* (eo quod *n m* dupla eſt ipſius V M quæ omnia ſimul ad idem quadratum C *m* minorem proportionem habet, quàm quadratum C *n*. Ergo V H in H A ad quadratum C *n*, ſcilicet quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum S T, & S Z (17. ex 7.) minorem proportionem habet quàm M H in H A ad quadratum C *m*, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum ſummæ ipſarum P Q, P R (17. ex 7.) quapropter P Q, & P R ſimul ſumptæ minores ſunt, quàm S T, & S Z ſimul ſumptæ.

PROPOSITIO XXXX.

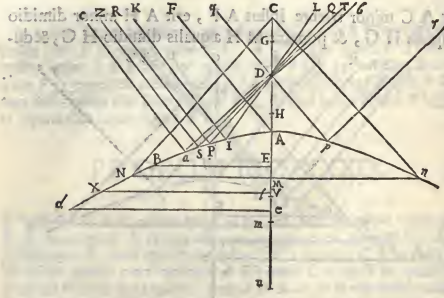
SIt A C minor triente ipſius A F, erit A H minor dimidio ipſius H G, & ponatur M H æqualis dimidio H G, & du-



eamus

camus perpendicularem, & diametrum. Dico, quod P Q æqualis est trienti ipsius P R.

Educamus inter P Q, A C diametrum I L, & educamus C B ei æquidistantem, & perpendicularem B E, & fiat E *l* æqualem E A erit summa ipsarum G E, & E H æqualis C *l*; estque H E minor quàm M H, quæ quarta pars est ipsius C *m*; ergo summa ipsarum M G, H E in M H quater sumptum minus est quadrato C *m*: auferatur communiter M G, H E in M E quater sumptum remanebit quadruplum summæ M G, H E in H E minus quàm quadratum C *l* quia M G, H E simul sumptæ, nempe M C vna cum A E in M E quater sumptum æquale est quadrato *l m*; quod est duplum M E, & aggregatum C E, A E, nempe C *l* in *l m* bis sumptum *)* igitur aggregatum M G, & H E in M E quater sumptum ad aggregatum M G, H E in H E quater sumptum, nempe G E ad H E maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum *l* C. & componendo M H ad H E, seu M H in H A ad E H in H A habebit maiorem proportionem, quàm M G, H E in M E quater sumptum cum quadrato *l* C (quæ æqualia sunt quadrato C *m*) ad quadratum *l* C: & permutando erit M H in H A ad quadratum C *m*, nempe ad quadratum summæ ipsarum M G, & M H, seu quadratum A C ad quadratum summæ ipsarum P Q, P R (17. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm E H in H A ad quadratum *l* C (quod est æquale quadrato summæ ipsarum G E, E H *)* quod erit vt quadratum A C ad quadratum aggregati ipsarum I L, I K: quapropter A C ad duo latera figuræ P Q maiorem proportionem habet, quàm ad duo latera figuræ I L. Et propterea duo latera figuræ P Q minora sunt, quàm duo latera



figuræ

figuræ I L. Simili modo eſtendetur, quod duo latera figuræ I L minora ſunt, quàm duo latera figuræ A C.

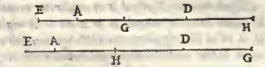
Educamus poſtea C X extra ſegmentum A N; & educamus diametrũ S T ei parallelam, & ad axim perpendicularem X V, erit aggregatum G V, M H in M H quater ſumptum maius quàm quadratum C *m*; & addamus communiter aggregatum M H, G V in M H quater ſumptum; oſtendetur vt antea, quod duo latera figuræ S T maiora ſunt, quàm duo latera figuræ P Q.

Oſtendetur quoque in reliquis diametris cadentibus ad vtraſque partes ipſius P Q in eadem ſectione, quod duo latera figuræ diametri ipſi P Q proximioris minora ſunt, quàm duo latera figuræ remotioris.

In Sectionem VII. Propoſit: XXXVIII. XXXIX. & XXXX.

LEMMA VI.

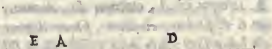
SI recta linea HG bifariam ſecta in D producatur vtcumque ad A, & E, ita vt D H non maior ſit quàm H E, vel H A, & E D maior ſit, quàm D A: dico rectangulum ſub E D A in H A maius eſſe quadrato D A.



Quia E D maior ad minorem D A habet maiorem proportionem, quàm D H non maior ipſa H A, ad H A, ergo componendo E D A ad D A maiorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & proptera rectangulum ſub extremis contentum, ſcilicet ſub E D A in A H, maius eſt quadrato D A.

LEMMA VII.

ISdem poſitis, ſi D H non minor fuerit quàm H A, vel H E, ſitque H E maior, quàm H A: duo rectangulum ſub E D A in A H minus eſſe quadrato D A.



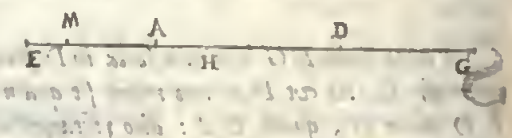
Fiat

Fiat H M æqualis maiori H D, erit E A differentia minima H A, & intermedia H E minor, quàm M A, quæ est differentia maxima M H, & minima H A, & A D maior est quàm A H, ergo E A ad M A minorem proportionem habet, quàm D A ad A H, & permutando E A ad A D habebit minorem proportionem, quàm M A ad A H, & componendo E D ad D A minorem proportionem habebit, quàm M H, siue D H ad A H, & iterum componendo E D A ad D A minorem proportionem habebit, quàm eadem D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H minus erit quadrato D A.

LEMMA VIII.

Isdem positis si D H maior fuerit, quàm A H sed minor quàm E H, fuerintque proportio E A ad A D eadem proportioni M A ad A H, dico rectangulum sub E D A in A H æquale esse quadrato D A: si verò proportio illa maior fuerit, vel minor rectangulum similiter quadrato maius, vel minus erit.

Quia E A ad A D ponitur vt M A ad A H, componendo E D ad D A, erit vt M H, seu D H ad H A, & iterum componendo E D A ad D A, erit vt D A ad A H, & propterea rectangulum sub E D A in A H æquale erit quadrato D A.

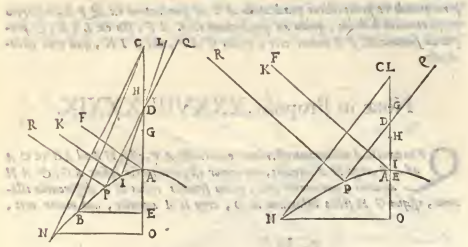


Quando verò E A ad A D maiorem proportionem habet, quàm M A ad A H, tunc bis componendo E D A ad D A maiorem proportionem habebit, quàm D A ad A H, & propterea rectangulum sub extremis: scilicet sub E D A in A H maius erit quadrato intermediæ D A: non secus quando E A ad A D minorem proportionem habet, quàm M A ad A H, ostendetur rectangulum sub E D A in A H minus quadrato ex D A.

LEMMA IX.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præfecta H A, intercepta G A, centrum D, diameter I L, eiusque erectus I K, & C E sit latus eiusdem, sitque diameter Q P, cuius erectus P R, & latus L O: dico quod rectangulum sub O D E in E H ab ipsa quadrato D E, atque Q P R summa laterum figuræ Diametri P Q ab L I K summa laterum figuræ I L, vel ab ipsa C A F summa laterum figuræ axis, vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, aut vna excedunt.

Et



Et primo rectangulum sub O D E in E H æquale sit quadrato D E, ergo ad hæc duo spatia æqualia eandem proportionem habebit idem rectangulum sub E D O in O E, sed vt rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, ita est O E ad E H, (propterea quod æquales altitudines habent), igitur vt O E ad E H, ita est rectangulum sub E D O in O E ad quadratum D E, & componendo O H ad E H, siue rectangulum O H A ad rectangulum E H A eandem proportionẽ habebit, quàm rectangulum sub E D O in O E vna cum quadrato D E, seu quàm quadratum D O ad quadratum D E, vel potius vt quadratum ex dupla D O ad quadratum ex dupla D E, nempe vt quadratum ex G O H ad quadratum ex G E H, quare permutando rectangulum O H A ad quadratum ex G O H eandem proportionem habebit, quàm rectangulum ex E H A ad quadratum ex G E H, seu vt quadratum ex Prop. 16. huius. Isidem. *A C ad quadratum ex C A F, vel ex L I K; sed vt rectangulum A H O ad quadratum ex G O H, ita est quadratum ex A C ad quadratum ex ♎ P R: quare idem quadratum A C eandem proportionem habet ad quadratum ex ♎ P R, quam ad quadratum ex C A F, vel ex I K L, & propterea quadrata ipsa æqualia sunt, & summa laterum ♎ P R æqualis est summæ laterum C A F, vel I L K.*

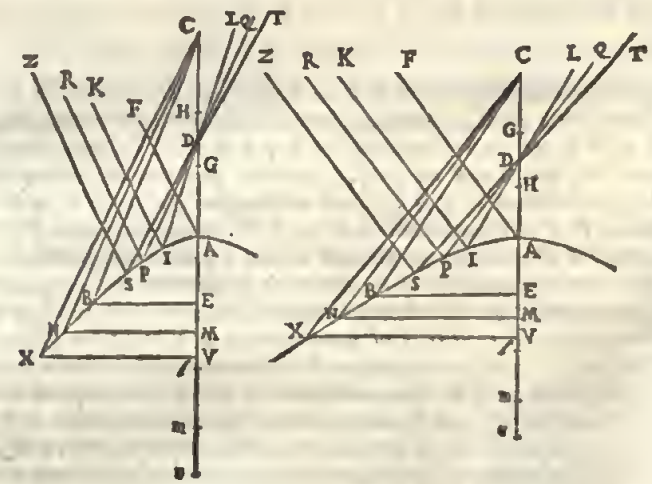
Secundo sit rectangulũ sub E D O in E H maius quadrato D E, tunc quidem idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub O D E in E H minorem proportionẽ habebit, quàm ad quadratum ex D E, seu O E ad E H minorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex D E; & componendo sumpta eadem altitudine H A, quadruplicando postrema quadrata, & permutando, & ex 16. huius, idem quadratum A C ad quadratum ex ♎ P R minorem proportionem habebit, quam ad quadratum ex C A F, vel ex L I K, & propterea summa ♎ P R maior erit, quàm C A F, seu quàm L I K.

Tertio sit rectangulum sub E D O in E H minus quadrato D E, patet quod idem rectangulum sub E D O in O E ad rectangulum sub E D O in E H, seu O E ad E H maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum D E, & componendo ductis prioribus terminis in A H, quadruplicando postrema quadrata,

permutando vt prius, idem quadratum A C ad quadratum ex Q P R, maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum ex C A F, seu ex L I K, & propterea summa Q P R minor erit, quàm C A F, vel L I K, quæ erat ostendenda.

Notæ in Propoſit. XXXVIII. XXXIX.

QVia axis C A minor non est triente eius recti A F, estq; H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A æqualis, aut maior est parte tertia ipsius A G; & A H æqualis, aut maior erit, quàm semissis ipsius H G differentia illarum, estque G H secta bifariam in D, ergo H A æqualis, aut maior erit,



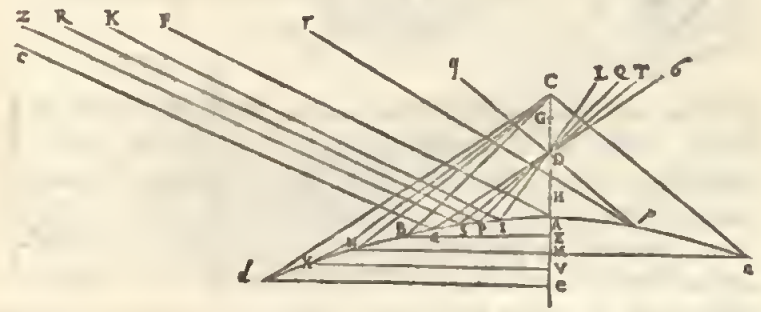
Lem. 6. *quàm D H, estque H E maior quàm H A, ergo pariter H E maior est, quàm D H, quare rectangulum sub E D A in A H maius erit quadrato D A, atque*
Lem. 9. *summa laterum figuræ L I K maior, quàm summa laterum figuræ axis C A F.*

Similiter quia H M maior est, quàm H E, erit quoque H M maior, quàm D H, & propterea ex lemma 6. & 9. summa Q P R maior erit, quàm summa L I K.

Notæ in Propoſit. XXXX.

QVia C A minor est triente ipsius A F, estque H A ad A G vt C A ad A F, ergo H A minor est tertia parte ipsius A G, & minor semisse differentiæ

rentia H G, & ideo H A minor erit, quàm H D: secari ergo poterit H M aqualis D H, quæ maior erit, quàm A H, ducaturq; per M ad axim ordinatim applicata N M n occurrens sectioni in punctis N n, à quibus iungãtur C N, & C



n, ijsdemque aquidistantes ducantur duæ diametri P Q, & p q, quarum latera recta P R, & p r. Ostendendum est P Q sui erecti P R, atque p q sui erecti p r subtriplam esse, sed duo figura latera P Q, P R aqualia esse alterius figura lateribus p q, p r, & insuper P Q, P R minima esse laterum figura cuiuslibet alterius diametri eiusdem sectionis, & latera figurarum minimè proximiora, esse minora lateribus figurarum remotiorum.

Quia H M ad M G eandem proportionem habet quàm P Q ad P R, vel p q ad p r, estque H M subtripla ipsius M G (cum M H facta sit aqualis H D) ergo P Q ipsius P R, pariterque p q ipsius p r subtripla est: & sunt latera figura Q P R aqualia lateribus q p r alterius figura, cum diametri Q P, & q p aque recedant ab axi, & habeant latus commune C M. Prop. 6. huius.

Quod verò summa laterum figura Q P R minima sit reliquarum summarũ laterum figura cuiuslibet diametri sic ostendetur.

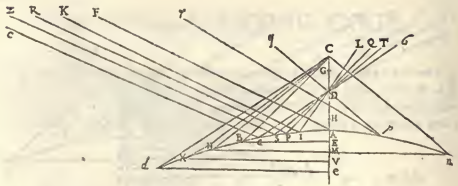
Quia A H, & E H minora sunt, quàm H M, sive D H, ergo rectangulum sub E D A in A H minus est quadrato D A, & summa L I K minor est summa C A F. Lem. 7. Lem. 9.

Pariter quia M H aqualis est H D, & H E minor eadem, ergo ambo non erunt maiores eadem D H, ergo rectangulum sub M D E in E H minus erit quadrato D E, atque summa Q P R minor erit, quàm L I K. Lem. 7. Lem. 9.

Rursus quia V H maior, est quàm M H, seu quàm D H, erunt illæ non minores eadem D H, ergo rectangulum sub V D M in H M maius erit quadrato D M, atque summa T S Z maior erit, quàm summa Q P R. Lem. 6. Lem. 9.

In hyperbola reperire diametrum, cuius figura latera aqualia sint lateribus figura axis: oportet autem vt axis A C minor sit triente erecti eius. Reperiatur diameter P Q subtripla erecti eius P R, eiusque latus sit C M, & fiat e A ad A D, vt M A ad A H, & lateris C e ducatur diameter a b, cuius erectus a c. Dico hanc esse diametrum quæsitam: quia e A ad A D eandem proportionem habet, quàm M A ad A H, erit rectangulum sub e D A in A H PROP. 3. Addit. ex 40. huius.

Lem. 8. Lem. 9. *æquale quadrato D A, & summa laterum* b a c *æqualis erit lateri figuræ axis summæ C A F.*



PROP. 4. Addit. ex 40. huius. Lem. 8. *In eadem hyperbola data diametro I L reperire aliam diametrum, ita vt eius figuræ latera æqualia sint lateribus figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q subtriplam eius erecti. Sit C E latus diametri I L, & C M, sit latus diametri P Q, & quia punctum E cadit inter M, & A, erit H E minor, quàm H M, vel D H: fiat V E ad E D, vt M E ad E H, ergo rectangulum sub V D E in E H æquale erit quadrato E D, & ex lemma 9. summa laterum T S Z æqualis erit summa laterum L I K; quod erat propositum.*

Facile colligitur ex 3. additarum, quod in hyperbola cuius axis subtripla sit erecti eius assignari possunt tres summæ laterum figurarum trium Diametrorum quæ æquales sint inter se. Ex 4. verò additarum in eadem Hyperbola assignari, possunt quatuor summæ laterum figurarum quatuor diametrorum, quæ æquales sint inter se.

Deinde sit A C minor, quàm A F, sed non sit minor eius triplo, ergo A H non erit minor triplo H C, &c. *Textus mendosus omnino corrigi debuit, nam ex contextu sequenti deducitur A C non tripla minor, sed minor parte tertia supponi debere ipsius A F.* a

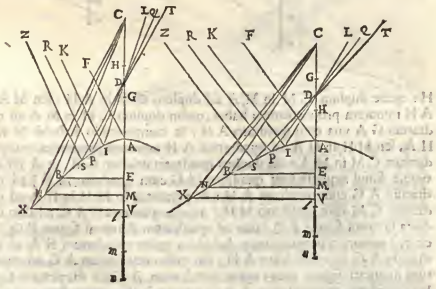
SECTIO

SECTIO OCTAVA

Continens Propoſit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

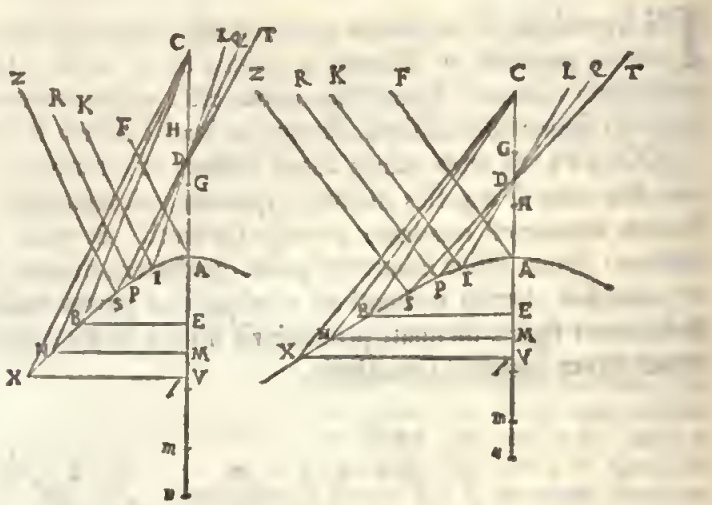
IN hyperbole ſi quadratum axis inclinati minus non fuerit dimidio quadrati ex differentia ipſius, & ſui erecti, vtique quadratum diametri figuræ eius minus eſt, quàm quadratum diametri figuræ cuiuſcumque alterius inclinati eiuſdem ſectionis.

XXXXVI. Si verò minus fuerit cadent ad vtraſque partes eius duæ inter ſe æquales diametri, quarum vniuscuiuſlibet quadratum æquale eſt quadrato exceſſus ſui erecti, & quadratum diametri figuræ ipſius minus eſt quàm quadratum diametri figuræ cuiuſlibet alterius inclinati ad vtraſque eius partes cadentis: & diameter figuræ inclinati proximioris illi minor eſt quàm diameter figuræ inclinati remotioris.



Iiſdem figuris manentibus ſupponatur prius A C non minor quàm A F; ergo P Q non erit minor quàm P R (28. ex 7.) & duo quadrata A C, A F nempe diameter figuræ A C minor eſt quàm diameter figuræ P Q; & Demonſt. prop. 44.

Q; & pariter diameter figuræ P Q minor eſt, quàm diameter figuræ S T. Sit iam A C minor quàm A F, & eius quadratum non minus dimi-
Demonſt. prop. 45. dio quadrati exceſſus ipſius A F ſuper A C. Et quia A C ad A F eandem proportionem habet, quàm A H ad A G; ergo duplum quadrati A H non eſt minus quadrato H G; ergo M H in H A bis ſumptum maius eſt quadrato H G, & addatur communiter duplum G A in A H fiet duplum ſummæ G A, M H, vel C M in A H maius quàm duplum G A in A H cum quadrato H G, ſeu quàm quadratum G A cum quadrato A

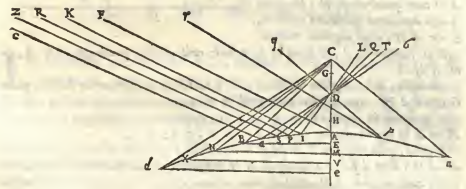


H: quare duplum C M in M A ad duplum C M in A H, ſeu M A ad A H minorem proportionem habet, quàm duplum C M in M A ad quadratum G A vna cum quadrato A H: & componendo habebit M H ad H A, ſeu M H in H A ad quadratum A H minorem proportionem quàm duplum C M in M A cum duobus quadratis ipſarum G A, & A H (quæ omnia ſimul æqualia ſunt quadrato M G cum quadrato M H) ad quadratum A G cum quadrato A H: & permutando M H in H A ad quadratum G M cum quadrato M H (nempe quadratum A C ad duo quadrata laterum figuræ P Q) ſiue ad quadratum diametri figuræ P Q (17. ex 7.) minorem proportionem habebit, quàm quadratum H A ad quadratum A G cum quadrato A H, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius; igitur quadratum A C ad diametrum figuræ P Q minorem proportionem habet, quàm ad diametrum figuræ A C: & ideo diameter figuræ P Q maior erit diametro figuræ A C. Præterea, quia duplum quadrati M H maius eſt quadrato H G; ergo V H in M H bis maius erit, quàm quadratum H G: & oſtendetur (quemadmodum diximus) quod diameter figuræ S T maior ſit quàm diameter figuræ P Q.

PROP.

PROPOSITIO XXXXVI.

SIt postea quadratum A C minus dimidio quadrati ex differentia ipsarum C A, & A F; erit duplum quadrati A H minus quadrato H G & ponamus duplum quadrati M H æquale quadrato H G: & educamus ad axim perpendicularem N M, & iungamus N C; & ducamus diametrum P Q parallelã ipsi N C, erit H M ad M G, vt P Q ad P R, & pro-
a pterea quadratum P Q dimidium erit quadrati excessus ipsius P R; ergo P Q est vna æqualium: ponatur insuper inter A, & P diameter I L, & constructio perficiatur, vt prius. Et quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G, erit duplum M H in H E minus quadrato H G, & ponatur communiter duplum G E in E H; igitur duplum aggregati M G in E H minus est quadrato G E cum quadrato E H; & ostendetur quemadmodum diximus antea, quod quadratum diametri figuræ P Q minus sit quadrato diametri figuræ I L; & quadratum diametri figuræ I L minus sit quadrato diametri figure A C. 6. huius.



Deindè ducatur diameter inclinata S T extra segmentum A P, & C X ei parallela, & ad axim perpendicularis X V: & quia duplum quadrati M H æquale est quadrato H G erit duplum V H in H M maius quadrato H G: ponatur communiter duplum G M in M H, fiet duplum aggregati V G, M H, in M H maius quadrato M G cum quadrato M H: quare duplum aggregati V G, & M H in M V ad duplum aggregati V G, & M H in M H, nempe M V ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum aggregati V G, & M H in M V ad quadratum G M cum quadrato M H: & componendo ostendetur (quemadmodum antea dictum est) quod quadratum A C ad diametrum figuræ P Q maiorem proportionem habeat, quàm ad diametrum figuræ S T. Eadem prorsus cõtingent in reliquis omnibus diametris. Quapropter diameter figuræ P Q minor est diametro figuræ cuiuslibet diametri ad vtrasque eius partes in eadem sectione existente. Quod erat ostendendum.

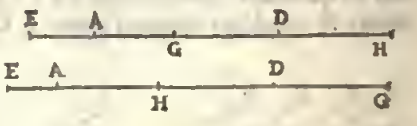
In

In Sectionem VIII. Propoſit. XXXXIIII. XXXXV. & XXXXVI.

LEMMA X.

SI rectæ lineæ G H bifariam ſectæ in D addantur ſegmenta H A, & H E atque proportio dupli E H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H A: dico duplum rectanguli ex G A, & H E in H A æquale eſſe quadratis ex G A, & ex A H: ſi verò proportio illa maior fuerit, erit quoque rectangulum maius quadratis: ſi verò proportio fuerit minor, rectangulum minus erit quadratis.

Primo quia ſi duplum E H ad H G, eſt vt G H ad H A, ergo duplum rectanguli E H A æquale erit quadrato G H, & addatur communiter duplum rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex ſumma G A, & E H in A H æquale duplo rectanguli G A H cum quadrato G H; his verò ſpatijs æquantur quadrata ex G A, & ex A H, ergo duplum rectanguli ex ſumma G A, E H in A H æquale erit duobus quadratis ex G A, & ex A H.

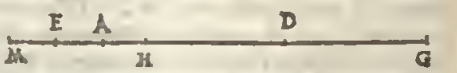


Secundo, quia duplum E H ad H G, maiorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A maius eſt quadrato G H, & addito communiter duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H maius duobus quadratis ex G A, & ex A H.

Tertio, quia duplum E H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad A H, ergo duplum rectanguli E H A minus eſt quadrato G H, & addito duplo rectanguli G A H, erit duplum rectanguli ex G A, E H in A H minus quadratis ex G A, & ex A H.

LEMMA XI.

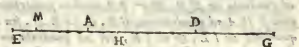
SI recta linea G H ſecetur exterius in A, E, & ſit eadem G H differentia nedum ſegmentorum G E, & E H, ſed etiam duorum ſegmentorum G A, & A H: dico quod quadrata ex maximo, & ex vno intermediorum ſegmentorum, ſcilicet ex G E, & ex E H æqualia ſunt quadratis ex reliquo intermediorum, & ex minimo ſegmento, ſcilicet ex G A, & ex A H vna cum duplo rectã-



guli

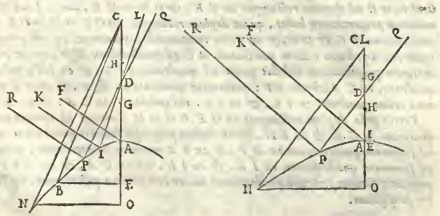
guli ex ſumma extremorum, vel intermediorum in differentiam minimorum ſegmentorum, ſcilicet ex G A cum H E in E A.

Quia duplum rectanguli G A H cum duplo rectanguli G A E æquatur duplo rectanguli ſub G A in H E, addito comuniter duplo rectanguli H E A erit duplum rectanguli G E H æquale duplo rectanguli G A H cum duplo rectanguli ex ſumma G A, H E in E A; & addito communi quadrato G H, erit duplum rectanguli G E H cum quadrato G H, ſcilicet duo quadrata ex G E, & ex E H, erunt æqualia illis omnibus ſpatijs, ſcilicet duplo rectanguli ex ſumma G A, H E in E A cum duplo rectanguli G A H ſimul cum quadrato ex G H: ſed duplo rectanguli G A H cum quadrato G H æqualia ſunt duo quadrata ex G A, & ex A H, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia erunt quadratis ex G A, & ex A H cum duplo rectanguli ex G A in & H E in E A, quod erat oſtendendum.

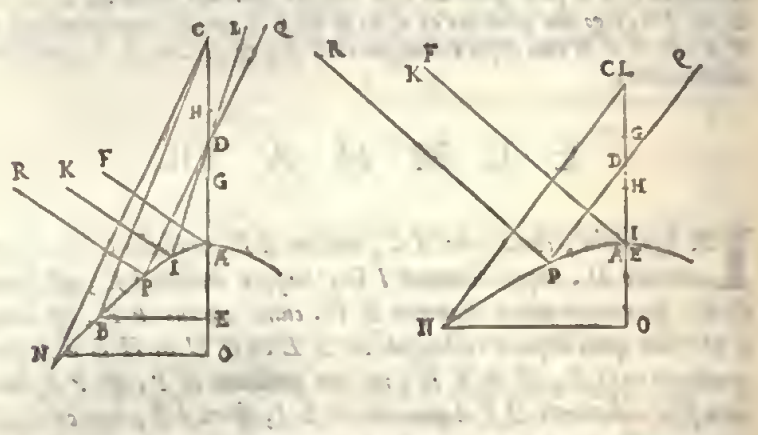


L E M M A XII.

IN hyperbola, cuius axis A C, erectus A F, præſectæ C G, H A, centrum D, atque diameter I L, eiuſque erectus I K, & latus C E, pariterque altera diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex G E cũ O H in H E à duobus quadratis ex G E, & ex E H; nec non quadrata Q P, & P R laterum figuræ diametri Q P à quadratis ex L I, & ex I K, vel ex C A, & ex A F, vna deficiunt, aut vna æqualia ſunt, vel vna excedunt.



Quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E æquale est quadratis ex G E, & ex E H, ergo idem rectangulum, cuius altitudo G E, & O H, basis verò O E bis sumptum ad duplum rectanguli, cuius altitudo G E, O H, basis verò H E, seu O E ad H E eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad quadrata ex G E, & ex E H: quare componendo O H ad E H, seu O H A ad E H A eandem proportionem habebit, quàm Lem. 11. huius. *duo quadrata ex G O, & ex O H ad duo quadrata ex G E, & ex E H, & permutando O H A ad quadrata ex G O, & ex O H, seu quadratum ex A C* 17. huius. *ad quadrata ex 2 P, & ex P R eandem proportionem habebit, quàm rectan-* Ibidem. *gulũ E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu erit vt quadratum A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex C A & ex A F: quare duo quadrata ex 2 P, & ex R P æqualia sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, vel ex C A, & A F.*

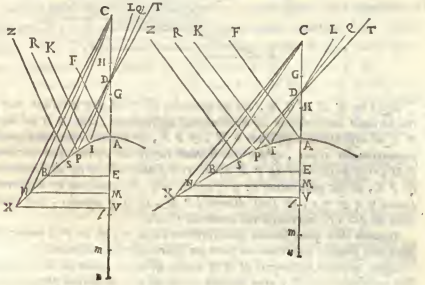


Secundo quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus ponitur quadratis ex G E, & ex E H, igitur idem spatium scilicet duplum rectanguli ex G E, & O H in O E ad duplum rectanguli ex G E, & O H in H E, sive O E ad H E maiorem proportionem habet, quàm duplum rectanguli ex G E, O H in O E ad quadrata ex G E, & O H, & vt prius componendo, ex lemmate 11. & permutando, ex 17. huius; idem quadratum A C ad quadrata ex 2 P, & ex P R maiorem proportionem habebit quàm ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata, ex C A, & ex A F: quapropter quadrata ex 2 P, & ex P R minora erunt quadratis ex I L, & ex I K, vel quadratis ex C A, & ex A F.

Tertio quia duplum rectanguli ex G E, O H in H E minus est summa quadratorum ex G E, & ex E H, igitur, eodem progressu, habebit quadratum A C ad summam quadratorum ex 2 P, & ex P R minorem proportionem, quàm ad summam quadratorum ex I L, & ex I K, vel ex C A, & ex A F: & propterea summa priorum quadratorum maior erit summa posteriorum, vt fuerat propositum.

Notæ in Propoſit. XXXXIV. & XXXXV.

Quia C A maior eſt, quàm A F, vel ſi minor eſt quadratum ex C A, minor non eſt dimidio quadrati ex differentia C A, & A F, eſtque H A ad A G vt A C ad A F, & H A ad G H, vt A C ad differentiam ipſarum A C, A F, ergo quadratum H A ad dimidium quadrati G H erit vt quadratum A C ad dimidium quadrati ex differentia ipſarum A C, & A F, quare quadratum ex H A minor non erit ſemiſſe quadrati H G, ideoq;

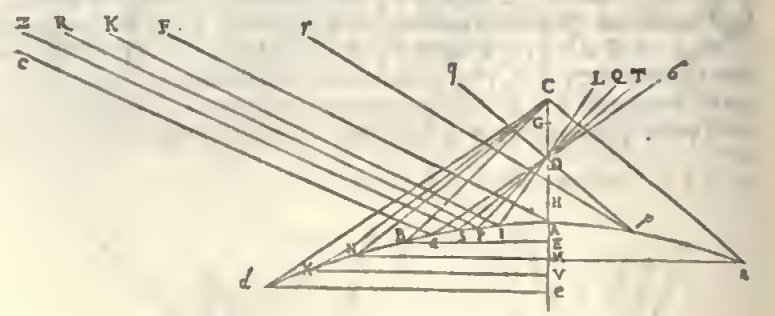


duplum quadrati A H minor non erit quadrato H G, eſtque duplum rectanguli E H A, vel M H E maius duplo quadrati A H, ſeu maius quadrato H G; propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H A, ideoque duplum rectanguli ex G A, H A in A H maius erit quadratis ex G A, & ex A H, & inſuper ſumma quadratorum ex I L, & ex I K maior erit, quàm ſumma quadratorum ex C A, & ex A F. Lem. 10. Lem. 12.

Notæ in Propoſit. XXXXVI.

Quia quadratum axis C A minus eſt ſemiſſe quadrati ex differentia ipſarum A C, & A F, eſtque H A ad A G, vt C A ad A F, atque G H eſt differentia ipſarum A H, & A G, igitur quadratum ex A H

minus eſt ſemiſſe quadrati G H: fiat iam quadratum ex M H æquale ſemiquadrato ex G H, & lateris C M fiant duo diametri Ω P, & q p, eorumque erecta ſint P R, & p r: dico ductas diametros æquales eſſe, & quadratum ex P Ω æquale eſſe quadrato ex differentia ipſarum P Ω, & P R.



ex 6. hu. *Quia vt M H ad G M, ita eſt diameter Ω P ad eius erectum P R, ergo comparando antecedentes ad terminorum differentias, erit M H ad H G, vt P Ω ad differentiam ipſarum P Ω, & P R, & pariter eorundem quadrata proportionalia erunt, eſtque quadratum ex H M æquale ſemiquadrato ex G H, ergo quadratum ex P Ω æquale erit ſemiquadrato ex differentia P Ω, & P R, & ſic quadratum ex p q æquale erit ſemiquadrato ex differentia ipſarum p q & p r; & ſunt diametri P Ω, & p q æquales, cum æquè recedant ab axi, & habeant latus commune C M.*

Secundo dico quod ſumma quadratorum ex Ω P, & ex P R minor eſt qualibet alia ſumma quadratorum laterum figura alterius diametri.

Quia duplum rectanguli M H E minus eſt duplo quadrati M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum M H ad H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli ex G E, & M H in E H
Lem. 10. huius. *minus erit ſumma quadratorum ex G E, & ex E H & propterea ſumma qua-*
Lem. 12. huius. *dratorum ex Ω P, & ex P R minor erit ſumma quadratorum ex I L, & ex I K.*

Tertio, quia duplum rectanguli ex E H A minus eſt duplo quadrati M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum E H ad H G minorem proportio-
Lem. 10. huius. *nem habet, quàm G H ad H A, ergo duplum rectanguli ex G A, E H in A H*
Lem. 12. huius. *minus erit ſumma quadratorum ex G A, & ex A H: quare ſumma quadratorum ex I L, & ex I K minor erit, quàm quadratorum ſumma ex A C, & ex A F.*

Quarto quia duplum rectanguli V H M mains eſt duplo quadrati ex M H, ſeu ſingulari quadrato ex G H, ergo duplum V H ad H G maiorem proportio-
Lem 10 huius. *nem habet, quàm H G ad H M, & propterea duplum rectanguli ex G M, &*
Lem. 12. huius. *V H in M H mains erit ſumma quadratorum ex G M, & ex M H, & ideo ſumma quadratorum ex T S, & S Z maior erit quadratorum ſumma ex Ω P, & ex P R, & ſic de reliquis: quare ſumma quadratorum ex Ω P, & ex P R minima eſt omnium, vt fuit propoſitum.*

In

In hyperbola reperire diametrum, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ axis: oportet autem vt quadratum axis C A minus sit semiquadrato ex differentia laterum figuræ eius C A, & A F. PROP. 5. Addit.

Quia ex hypothesi quadratum axis A C minus est semiquadrato ex differentia laterum figuræ A C, A F, vt in nota proposit. 46. dictum est, quadratum ex A H minus est semiquadrato ex G H: fiat duplum C H ad H G, vt G H ad H A, & lateris C c ducatur diameter b a, cuius erectus c a, ergo duplum rectanguli ex summa G A, c H in A H æquale est summæ quadratorum ex G A, & ex A H, & summa quadratorum ex a b, & ex a c æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum. Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

In eadem hyperbola diametrum reperire, cuius figuræ duo quadrata laterum æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L: oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex differentia P Q, & ex P R. PROP. 6. Addit

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z: erit igitur dupli rectanguli ex G E, & V H in E H æquale quadratis ex G E, & ex E H, & propterea summa quadratorum ex T S, & ex S Z æqualis erit quadratorum summæ ex L I, & ex I K, quod erat propositum. Lem. 10. huius. Lem. 12. huius.

Deducitur pariter ex 5. propositione additarum in eadem hyperbola tres diametros reperiri posse, quarum laterum summæ quadratorum æquales sint inter se.

Et ex 6. propositione additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem hyperbolæ laterum summæ quadratorum æquales esse possunt inter se.

a Et educamus inter A P inclinatam I L: quia quadruplum quadrati M H æquale est quadrato H G, &c. *Suppleri debent ea, quæ deficiunt, alioqui constructio imperfecta esset: duci igitur debet C B parallela diametro I L, quæ occurrat sectioni ad punctum B, à quo ad axim perpendicularis ducatur B E secans axim in E.*

SECTIO NONA

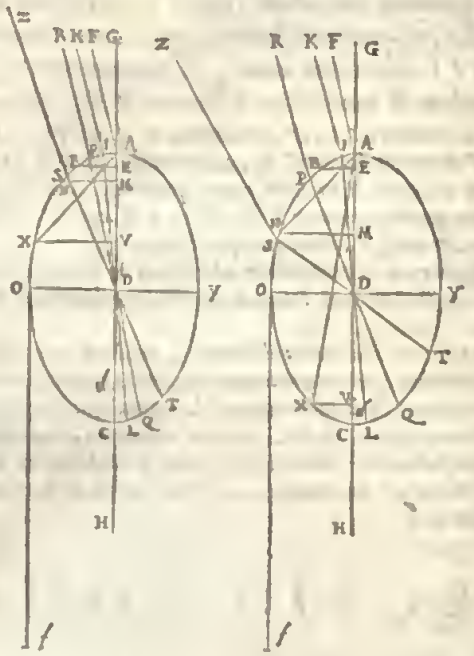
Continens Propositiones XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

a IN ellipsi duo latera figuræ maioris axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cuiuslibet alterius diametri, & duo latera figuræ diametri axi maiori proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ diametri remotioris.

XXXXVII.

XXXXVII. Si verò duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; vtique quadratum diametri ſuæ figuræ minus erit quadrato diametri figuræ cuiuſlibet alterius diametri eiuſdem ſectionis, & quadratum diametri figuræ proximioris axi minus erit quadrato diametri figuræ remotioris.

XXXXVIII. Si autem duplum quadrati axis tranſuerſi maius fuerit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ, æquidem reperientur ad vtraſque eius partes duæ diametri æquales, & cu-



iuslibet earum quadratum bis ſumptum æquale erit quadrato ex ſumma duorum laterum ſuæ figuræ; & quadratum diametri ſuæ figuræ minus eſt quadrato diametri figuræ alterius cuiuſcunque diametri exiſtentis in eodem quadrante eiuſdem ſectionis; & diameter figuræ proximioris minor eſt diametro figuræ remotioris.

PROP.

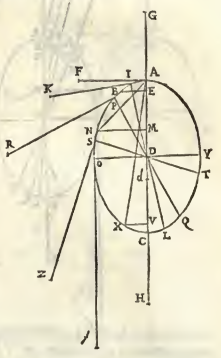
PROPOSITIO XXXXI.

IN ellipſi A B C ſit A C axis maior, & y O minor, & ſint P Q, & S T duæ aliæ diametri, ſitque A F erectus ipſius A C, & P R erectus ipſius P Q, & O f ipſius y O. Dico quod C F minor eſt, quàm Q R, & Q R, quàm T Z, & T Z, quàm y f.

Ducantur A N, A X ordinatim applicatæ ad diametros P Q, S T, & duæ ad axim perpendiculares N M, X V, & interceptæ A G, C H.

b Quia quadratum A C ad quadratum y O, nempe A C ad A F eandem proportionem habet, quàm C G ad G A, ſeu ad C H habebit quadratum C A ad quadratum C F ſummæ ipſius C A, eiuſque erecti eandem proportionem, quàm quadratum C G, nempe C G in A H ad quadratum G H: & quadratum A C ad quadratum y O eandem proportionem habet, quàm G C in C H ad quadratum C H: eſtquè quadratum y O ad quadratum ſummæ y f, vt quadratum C H ad quadratum H G; ergo quadratum A C ad quadratum y f eſt, vt C G in C H minorem ad quadratum H G; ſed quadratum A C ad quadratum C F eandem proportionem habet, quàm G C in maiorem A H ad quadratum G H; igitur A C ad C F maiorem proportionem habet, quàm ad y f: & propterea C F ſumma A C, & erecti illius minor eſt, quàm y f, quæ eſt ſumma y O, & erecti illius. Et quoniam C G in M H, quod minus eſt, quàm C G in A H ad quadratum H G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum Q R ſummæ diametri, & erecti ipſius P Q (16. ex 7.) quare quadratum A C ad quadratum C F maiorem proportionem habebit, quàm ad quadratum Q R, & propterea C F minor erit, quam Q R. Et quoniam C G in V H ad quadratum H G eſt vt quadratum A C ad quadratum T Z ad quàm ordinatim applicatur A X (16. ex 7.) erit C F minor quàm T Z: cumque C G in H M ad quadratum H G maiorem proportionem habeat, quàm G C in V H ad quadratum idipſum H G habebit quadratum

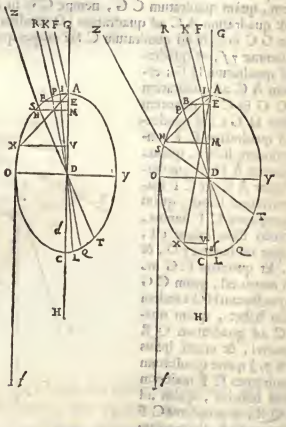
Defin. 1. huius.



tum A C ad quadratum Q R maiorem proportionem quàm ad quadratũ T Z. Et pariter oſtendetur, quod quadratum A C ad quadratum T Z maiorem proportionem habet, quàm ad quadratum *y f*; quapropter C F minor eſt quàm Q R, & Q R minor, quàm T Z, & T Z minor, quàm *y f*. Quod erat oſtendendum.

PROPOSITIO XXXXVII.

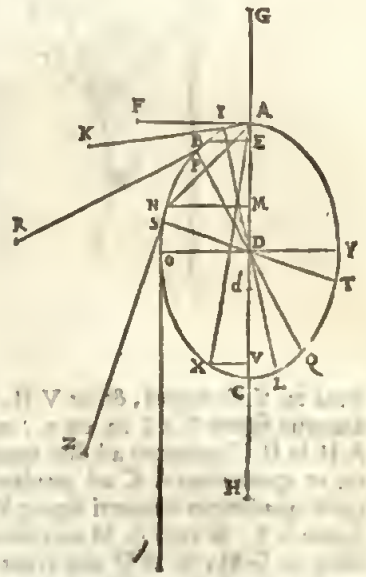
IN eadem figura ſi duplum quadrati A C maius non fuerit quadrato ſummæ C F. Dico, quod diameter figuræ eius minor eſt diametro figuræ Q P R, & diameter figuræ Q P R minor eſt diametro figuræ T S Z.



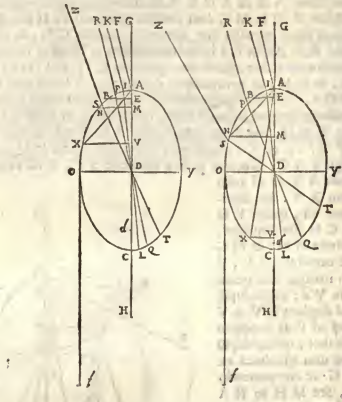
Quoniam duplum quadrati A C non excedit quadratum ſummæ C A F; ergo duplum quadrati C G, nempe G C in A H bis ſumptum non excedit quadratum H G, & propterea C G in H M bis ſumptum minus eſt quadrato H G: tollatur communiter duplum M G in H M remanebit

duplum

duplum H M in C M minus duobus quadratis ex M H, & ex G M: & propterea A M in M C bis ſumptum ad H M in M C bis ſumptum, nempe A M ad M H habebit maiorem proportionem, quam duplum A M in M C ad duo quadrata ex H M, & ex G M: & componendo A H ad H M, ſeu quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habebit quàm duplum A M in M C cum duobus quadratis ex H M, & ex M G (quæ omnia ſimul æqualia ſunt duobus quadratis C G, & H C) ad duo quadrata M H, & M G; igitur quadratum A H ad A H in H M maiorem proportionem habet, quàm duo quadrata C G, & C H ad duo quadrata H M, & G M, & permutando quadratum A H ad duo quadrata C G, & H C, ſcilicet quadratum A C ad quadratum diametri figuræ eius maiorem proportionem habet, quàm A H in H M ad duo quadrata M G, & M H, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) quapropter diameter figuræ P Q maior eſt diametro figuræ A C. Ducatur poſtea diameter S T, & ad eam ordinatim applicata A X, & ad axim perpendicularem X V. Et ſiquidem G M minor eſt, quàm V H cum A G, & C H ſint æquales, erunt duo quadrata H M, & M G maiora duobus quadratis H V, V G: hæc autem maiora ſunt quàm duplum V H in V *d*: ergo duplũ M V in V *d* ad duplum H V in V *d*, nempe V M ad V H maiorem proportionem habet, quàm duplũ M V in V *d* ad duo quadrata ex V H, & ex V G: & componendo M H ad H V, ſeu M H in H A ad V H in H A maiorem proportionem habebit, quàm duplum M V in V *d* cum duobus quadratis ex V H, & ex V G, quæ omnia ſimul ſunt vt duo quadrata M H, & M G ad duo quadrata V H, & V G: & permutando M H in H A ad duo quadrata H M, & G M, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm V H in H A ad duo quadrata V H, & V G, ſeu quàm quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) quare diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Poſtea quia *y* O eſt media proportionalis inter A C, & A F erit quadratum A C ad quadratum *y* O, vt A C ad A F, nempe vt C G ad C H, ſeu vt C G in C H ad quadratum C H, & quadratum *y* O ad ſummam quadratorum *y* O, & O *f*, nempe ad quadratum diametri ſuæ figuræ eſt vt quadratum H C ad quadratum C G cum quadrato H C: quare ex



æqualitate quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O eandem proportionem habet, quàm C G, ſeu A H in H C ad duo quadrata ipſius C G, atque ipſius C H: igitur A H in H V maiorem ad duo qua-

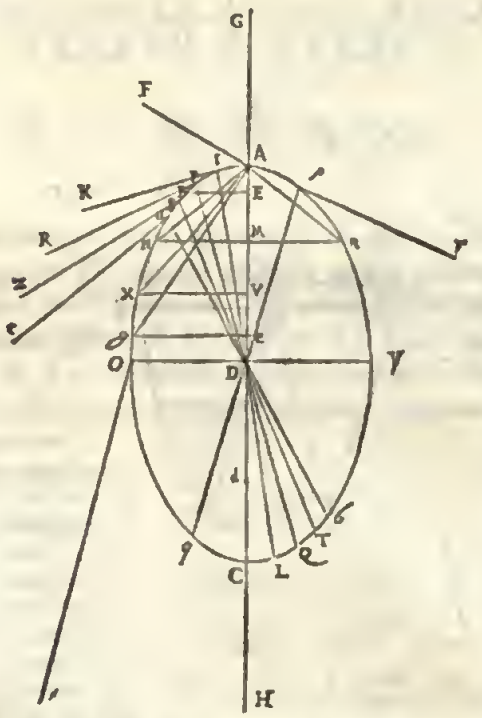


drata ex V G minori, & ex V H, ſeu vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T (19. ex 7.) maiorem proportionem habebit, quàm A H in H C minorem ad duo quadrata ex G C, & C H maiora, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ y O (19. ex 7.); igitur quadratum diametri figuræ y O maior eſt quàm quadratum diametri figuræ S T. Si verò G M non fuerit minor quàm V H; vtique duo quadrata ex G M, & M H non erunt maiora duobus quadratis ex V G, & ex V H: at A H in M H ad duo quadrata ex G M, & ex M H, nempe quadratum A C ad quadratum diametri figuræ P Q habebit maiorem proportionem, quàm A H ad H V ad duo quadrata ex V H, & ex V G, ſcilicet vt quadratum A C ad quadratum diametri figuræ S T; igitur diameter figuræ S T maior eſt diametro figuræ P Q. Eadem prorſus oſtendentur, quando punctum V cadit vltra punctum D ad partes A inter puncta D, & M. Et hoc erat propoſitum.

PROP.

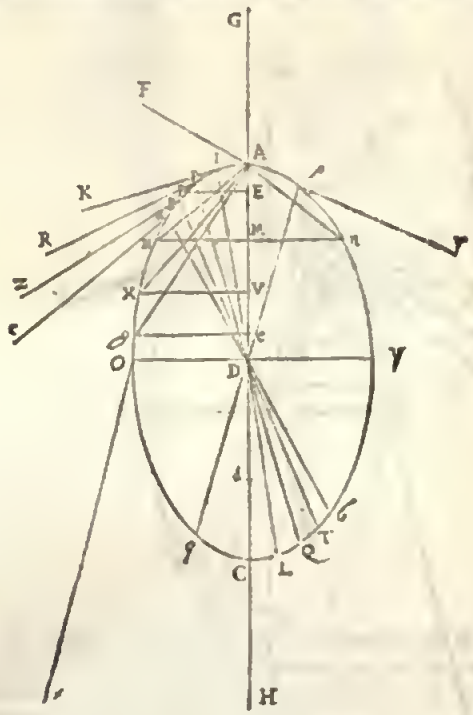
PROPOSITIO XXXXVIII.

SIt iam duplum quadrati A C maius quadrato C A F, erit duplum quadrati A H maius quadrato G H: ponatur duplum quadrati H M æquale quadrato G H: & ducatur ad axim perpendicularis M N; iun-



gaturque A N, eiuſque diameter P Q extendatur, erit H M ad M G, vt P Q ad P R (7. ex 7.); ergo, & quadratum H M ad quadratum H G erit, vt quadratum P Q ad quadratum P R, & quadratum H M ad duo quadrata ex H M, & ex M G eandem proportionẽ habebit, quàm quadratum P Q ad quadratum diametri ſuæ figuræ: educatur poſtea diameter I L inter A, & B, & erectum illius ſit I K ad quàm ordinatim ducta ſit A B, & ad axim perpendicularis ſit B E, erit quadratum M H, nec non G H in H D æquale dimidio quadrati H G; igitur G H ad M

H erit vt M H ad H D : & comparando homologorum differentias erit M G ad M D, vt G H ad H M : & propterea duplum G H in M D, seu quadruplum H D in D M est æquale duplo G M in M H : & propterea duplum G M in M H maius erit quàm duplum G E in M H ; ponatur communiter duplum E M in H M cum quadruplo quadrati M D, & fiat D *d* æqualis D M, fiet duplum E *d* in M H maius quadrato H M cum



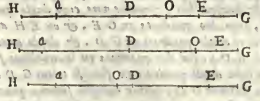
quadrato M G ; igitur *d* E in E M bis sumptum ad duplum E *d* in M H. nempe E M ad M H minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M ad duo quadrata ex M G, & ex M H : & componendo E H ad M H, seu E H in H A ad M H in H A minorem proportionem habebit, quàm duplum *d* E in E M vna cum quadratis ex M H, & ex M G, quæ æqualia sunt duobus quadratis H E, & G E ad duo quadrata ex M G, & ex H M. Et sic pariter ostendetur, quod quadratum H A ad H E in H A minorem proportionem habebit, quàm duo quadrata ex H A, & ex A G ad duo quadrata ex H E, & ex E G. Atque demonstrabitur quemadmodum antea dictum est, quod quadratum diametri figu-

tri figuræ P Q minus est quadrato diametri figuræ I L, & quadratum diametri figuræ I L minus est quadrato diametri figuræ A C. Ponatur postea diametri S T, & γ O vltra diametrum P Q, sitque A X ordinatim applicata ad diametrum S T, & V X ad axim perpendicularis sit, ostenderur (quemadmodum in præcedentibus dictum est) quod diameter figuræ P Q minor sit diametro figuræ S T, & diameter figuræ S T minor sit diametro figuræ γ O, vbicunque secet ad axim perpendicularis X V ipsam A C. Et hoc erat ostendendum.

In Sectionem IX. Propositi. XXXXI. XXXXVII. & XXXXVIII.

L E M M A. XIII.

SI recta linea G H secetur bifariam in D, & non bifariam in O, E, atque fiat G a æqualis H E; si quidem proportio dupli O H ad H G eadem fuerit proportioni G H ad H E, erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O in H O æquale quadratis ex G O, & ex O H: si verò proportio illa maior fuerit erit rectangulum maius quadratis; & si eadem proportio fuerit minor, idipsum rectangulum quadratis minus erit.



Et primo quia duplum O H ad H G est vt G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E æquale erit quadrato ex G H; auferatur communiter duplum rectanguli H O G, quia H O est communis rectangulorum altitudo, remanet dupli rectanguli ex differentia ipsarum E H, G O, seu ex differentia ipsarum G a, & G O in H O, seu remanet duplum rectanguli a O H æquale quadrato H G minus duplo rectanguli G O H: huic verò differentiæ æqualia sunt duo quadrata ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli a O H æquale est summæ quadratorum ex G O, & ex O H.

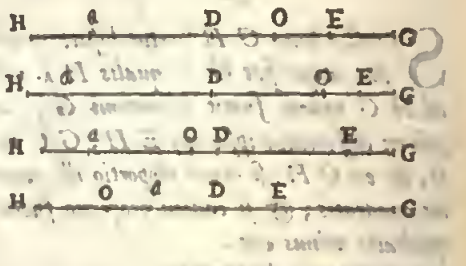
Secundo, quia duplum O H ad H G maiorem proportionem habet, quàm G H ad H E, ergo duplum rectanguli O H E maius erit quadrato G H, & ablato communiter duplo rectanguli G O H erit duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G O in H O maius, quàm summa quadratorum ex G O, & ex H O.

Tertio

Tertio ſi duplum O H ad H G minorem proportionem habuerit, quàm G H ad H E, eodem progreſſu oſtendetur, quod duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G O in H O minus eſt quadratis ex G O, & ex H O, quod erat propoſitum.

LEMMA XIV.

Iſdem poſitis ſit G E minimum ſegmentorum, dico quod duo quadrata ex E H, & ex G E, ſcilicet ex maximo, & minimo ſegmentorum æqualia ſunt duobus quadratis ex O H, & ex G O intermedijs ſegmentis una cum duplo rectanguli ſub differentijs minimæ G E à duabus intermedijs G O, & H O.

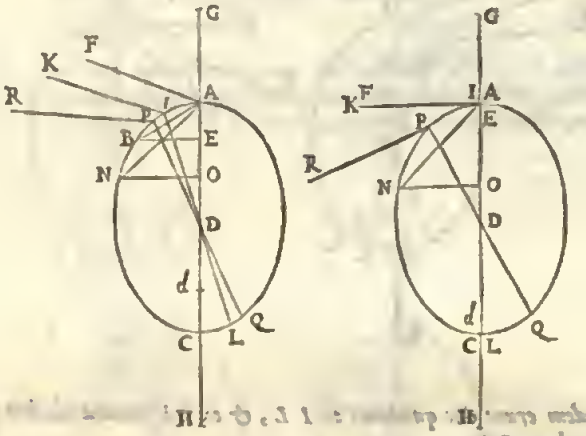


Fiat H a æqualis G E, ergo O a erit differentia ipſarum E H, & G E, ſicuti O E eſt differentia ipſarum G O, & G E. Et quia duo quadrata ex maximo, & ex minimo ſegmentorum, ſcilicet ex H E, & ex E G æqualia ſunt duplo quadrati ex G D ſemiſſe totius, eũ duplo quadrati ex E D intermedia ſectione; eſtque duplum quadrati ex E D ſemiſſe ipſius E a æquale duplo rectanguli E O a ex inæqualibus ſegmentis una cum duplo quadrati ex intermedia ſectione O D, ergo duo quadrata ex G E, & ex E H æqualia ſunt his omnibus ſpatijs, ſcilicet duplo quadrati ex G D, & duplo quadrati ex D O cum duplo rectanguli E O a, ſed duo quadrata ex inæqualibus ſegmentis G O, & ex O H æqualia ſunt duplo quadrati ex ſemiſſe totius G D cum duplo quadrati ex intermedia ſectione O D, igitur exceſſus ſummæ quadratorum ex G E, & ex E H, ſupra ſummam quadratorum ex G O, & O H æqualis eſt duplo rectanguli ex E O a, quod erat oſtendendum.

LEMMA XV.

IN ellypſi, cuius axis A C, erectus A F, diameter I L, eiuſq; erectus I R, & latus C E, & ſimiliter alterà diameter Q P, cuius erectus P R, & latus C O: dico quod duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, G O, in H O à duobus quadratis ex G O, & ex O H, atque

H, atque aggregatum quadratorum laterum I L, & I K figuræ diametri I L ab aggregato quadratorum laterum P Q, & P R figuræ alterius diametri, vna deficiunt, aut vna æqualia sunt, vel vna excedunt.

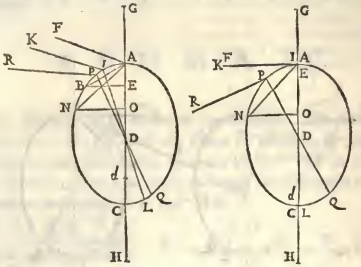


Fiat O d differentia ipsarum E H, & G O, & primo quia duplum rectanguli ex d O H æquale est quadratis ex G O, & ex H O, ergo duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O, eandem proportionem habet, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & componendo, erit E H ad H O, seu rectangulum E H A ad rectangulum O H A vt duo quadrata ex G E, & ex E H ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & permutando rectangulum E H A ad quadrata ex G E, & ex E H, seu quadratum ex A C ad quadrata ex I L, & ex I K, vel ad quadrata ex A C, & ex A F eandem proportionem habebit, quàm rectangulum O H A ad quadrata ex G O, & ex H O, vel quadratum A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R, quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K, seu ex A C, & A F æqualia erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R: Lem. 14. huius. 17. huius. Ibidem.

Secundo sit duplum rectanguli d O H minus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit maiorem proportionem, quàm duplum rectanguli d O E ad duo quadrata ex G O, & ex H O, & rursus componendo ex lem. 2. lib. 5. & ex lem. 14. & permutando, atque ex 17. propos. huius habebit idem quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K maiorem proportionem, quàm ad duo quadrata ex P Q, & ex P R: quapropter duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

Tertio sit rectangulum d O H maius duobus quadratis ex G O, & ex H O. duplum rectanguli ex d O E ad duplum rectanguli d O H, seu O E ad H O habebit

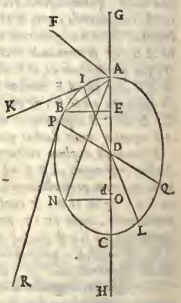
bebit minorem proportionem, quàm duplum rectanguli d *O E ad duo quadrata ex G O, & ex O H, & componendo ex lem. 14. permutando, & ex 17. hu-*



ius; tandem erunt duo quadrata ex I L, & ex I K maiora duobus quadratis ex P Q, & ex P R.

LEMMA XVI.

SI in ellypſi termini E, O laterum C E, C O, diametrorum I L, & P Q cadant hinc inde à centro D, ſitque D O maior quàm D E, dico quod quadrata ex P Q, & ex P R maiora ſunt quadratis ex I L, & ex I K.



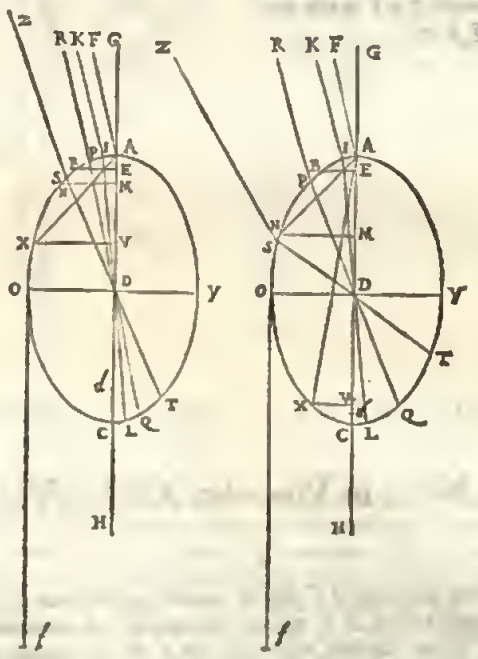
Quia O H minor eſt, quàm E H, ſed duo quadrata ex G O maximo, & O H minimo ſegmentorum eiuſdem rectæ lineæ G H maiora ſunt duobus quadratis ex G E, & ex E H intermedijs ſegmentis; ergo O H ad E H, minor ad maiorem ſeu rectangulum O H A ad rectangulum E H A minorem proportionem habet; quàm maior ſumma quadratorum ex G O, & ex O H ad minorem ſummam quadratorum ex G E, & ex E H, & permutando rectangulum O H A ad duo quadrata ex G O, & ex O H, ſeu quadratum 17. huius. *A C ad duo quadrata ex P Q, & ex P R*

minorem

minorem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad duo quadrata ex G E, & ex E H, seu quàm quadratum A C ad duo quadrata ex I L, & ex I K: igitur duo quadrata ex P Q, & ex P R maiora sunt duobus quadratis ex I L, & ex I K, quod erat ostendendum. 17. huius.

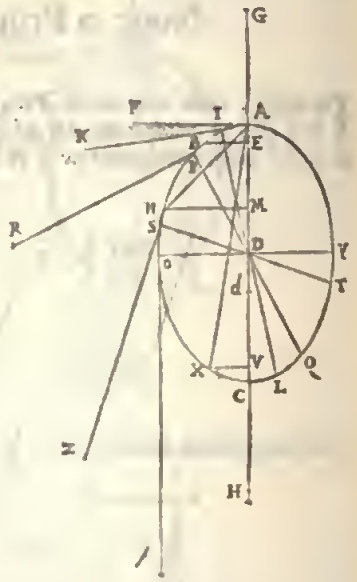
Notæ in Propoſit. XXXXI.

IN ellypsi, cuius axis maior A C, quia rectangulum A H E ad quadratum H G est, vt quadratum A C ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F, atq; quadratum ex G H ad rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex aequali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: estque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratū ex summa Q P R maius est quadrato ex summa L I K, & propterea lineariū sūma Q P R maior erit, quàm sūma L I K, vel quàm summa Prop. 16. huius.



mem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum A C, igitur ex aequali perturbata rectangulum A H E maius ad minus rectangulum A H M eandem proportionem habet, quàm quadratum ex Q P R ad quadratum ex L I K, vel ad quadratum ex C A F: estque rectangulum A H E maius rectangulo A H M, ergo quadratū ex summa Q P R maius est quadrato ex summa L I K, & propterea lineariū sūma Q P R maior erit, quàm sūma L I K, vel quàm summa

ex 16. huius. Ibidem. *ma C A F. Tandem quia rectangulum A H M ad quadratum ex ſumma H M G eandem proportionem habet, quàm quadratum A C ad quadratum ex 2 P R, ſed quadratum ex H C G ad rectangulum ex A H C eandem proportionẽ habet, quàm quadratum ex ſũma T O ſ ad quadratum A C, (eo quod H C eſt intercepta comparata diametri T O, cum T O ſecet biſariam ad eam ordinatim applicatam A C, atque ab eodem puncto C perpendicularis ad axim ducta cadat ſuper idem punctum C), igitur ex aquali perturbata rectangulum A H M maius ad minus rectangulum ex A H C eandem proportionem habet, quàm quadratum ex ſumma T O ſ ad quadratum ex ſumma 2 P R, & propterea ſumma laterum T O ſ maior erit, quàm ſumma 2 P R.*

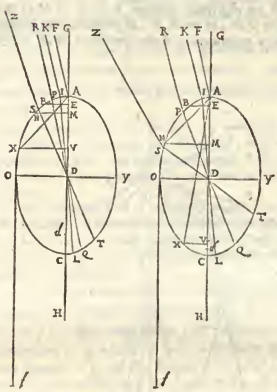


Notæ in Propoſit. XXXXVII.

QVia duplum quadrati A C non eſt maius quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H aquale, aut minus erit quadrato ex ſumma G H, eſtque duplum rectanguli ex E H A, vel ex E H M minus duplo quadrati A H, igitur minus quoque erit quadrato ex G H, igitur duplum M H ad G H minorem proportionem habet, quàm G H ad E H, ergo duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H G M in M H minus eſt duobus

Lem. 13. huius. Lem. 15. huius. *quadratis ex G M, & ex H M: quare duo quadrata ex I L, & ex I K minora erunt duobus quadratis ex 2 P, & ex P R, & ſic duo quadrata ex 2 P, & ex P R minora ſunt duobus quadratis ex T S; & ex S Z.*

Notæ

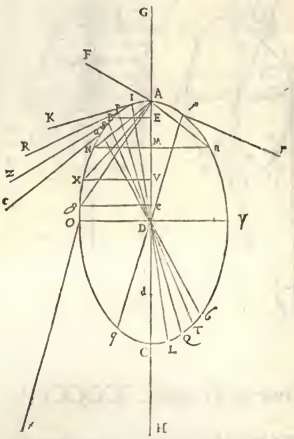


Notæ in Propoſit. XXXXVIII.

QVia ex hypotheſi duplum quadrati A C mains eſt quadrato ex C A F, ergo duplum quadrati ex A H maius erit quadrato ex H G. Fiat igitur quadratum ex M H æquale ſemiquadrato G H, & lateris C M fiant duæ diametri 2 P, & q p, quarum erectæ ſint P R, & p r: Dico duplum quadrati 2 P æquale eſſe quadrato ex ſumma laterum 2 P R: Quia 2 P ad P R eſt vt H M ad M G, & antecedentes ad terminorum ſummas, & eorum quadrata proportionalia erunt, ſcilicet quadratum 2 P ad quadratum ex 2 P R eandem proportionem habebit, quàm quadratum ex M H ad quadratum ex H G: erat autem quadratum M H ſubduplum quadrati ex H G, igitur quadratum ex P 2 ſubduplum eſt quadrati ex 2 P R. Eadem ratione quadratum ex q p ſubduplum erit quadrati ex q p r, & diametri 2 P, & q p æquales erunt, cum æque recedant ab axi, & habeant commune latus C M. Prop. 7. huius.

Poſtea quia punctum E cadit inter M, & A, erit duplum rectanguli M H E maius duplo quadrati ex M H, ſeu maius quadrato G H, & propterea duplum M H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H E, ergo

Lem. 13. *duplum rectanguli ex differentia ipſarum E H, & G M in M H maius erit*
Lem. 15. huius. *duobus quadratis ex G M, & ex M H, & propterea duo quadrata ex I L, &*
ex I K ſimul ſumpta maiora erunt duobus quadratis ex Ω P, & ex P R.



Similiter duplum rectanguli E H A maius erit quadrato ex G H, & propterea duplum E H ad H G maiorem proportionem habebit, quàm G H ad H
Lem. 13. huius. *A, & ideo duplum rectanguli ex differentia ipſarum A H, & G E in E H*
Lem. 15. huius. *maius erit duobus quadratis ex G E, & ex E H: igitur duo quadrata ex C A,*
& A F maiora erunt duobus quadratis ex I L, & ex I K.

Rurſus quia V H minor eſt, quàm M H erit duplum rectanguli V H M minus duplo quadrati M H, ſeu minus quadrato G H, igitur duplum V H ad
Lem. 13. huius. *H G minorem proportionem habet, quàm G H ad H M, & propterea duplum*
rectanguli ex differentia ipſarum M H, & G V in V H minus erit duobus
Lem. 15. huius. *quadratis ex G V, & ex V H, & propterea duo quadrata ex Ω P, & ex P*
R minora erunt duobus quadratis ex T S, & ex S Z: ſi verò D V maior fue-
Lem 16. huius. *rit quàm D M, erunt duo quadrata ex Ω P, & ex P R minora duobus quadratis*

dratis ex T S, & S Z : igitur summa duorum quadratorum ex Q P, & ex P R minor est summa quadratorum duorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri eiusdem ellipsis.

In ellipsi reperire diametrum, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ axis maioris : oportet autem vt quadratum axis maioris A C maius sit semiquadrato ex summa laterum C A F figuræ eius. PROP. 7. Addit

Quia ex hypothesi quadratum axis maioris A C maius est semiquadrato ex summa C A F, ergo, vt in nota prop. 48. dictum est, duplum quadrati ex A H maius est quadrato ex H G ; fiat duplum rectanguli c H A æquale quadrato ex G H, & lateris C c fiat diameter a b cuius erectus a c. Dico hanc esse diametrum quæsitam.

Quoniam duplum rectanguli c H A æquale est quadrato ex G H, ergo duplum c H ad H G est vt G H ad H A, erit; duplum rectanguli ex differentia ipsarum A H, & G c in c H æquale quadratis ex G c, & ex c H, & summa quadratorum ex b a, & ex a c æqualis erit quadratorum summæ ex A C, & ex A F, quod erat ostendendum. Lem 13. Lem. 15.

In eadem ellypsi diametrum reperire, cuius duo quadrata laterum figuræ eius æqualia sint quadratis laterum figuræ datæ diametri I L : oportet autem vt I L cadat inter axim, & diametrum P Q, cuius quadratum subduplum sit quadrati ex summa laterum Q P R. PROP. 8. Addit.

Sit C E latus diametri I L, & fiat duplum V H ad H G, vt G H ad H E, & ponatur S T diameter lateris C V, cuius erectus sit S Z : erit igitur duplum rectanguli ex differentia ipsarum E H, & G V in V H æquale quadratis ex G V, & ex V H, ideoque summa quadratorum ex L I, & ex I K æqualis erit quadratorum summæ ex T S, & S Z, quod propositum fuerat. Lem. 13. huius. Lem. 15. huius.

Colligitur similiter ex 7. propos. additarum, quod in vna ellypsi tres diametri reperiri possunt, quarum summæ quadratorum laterum æquales sint inter se : & ex 8. propos. additarum deducitur, quod quatuor diametrorum eiusdem ellypsis laterum summa quadratorum æquales possunt esse inter se, sed oportet vt quadratum axis maioris datæ ellypsis maius sit, quàm dimidium quadrati ex summa laterum figuræ axis C A F.

a Duo latera figuræ axis transuersi minora sunt duobus lateribus figuræ cæterarum diametrorum, & duo latera figuræ diametri axi proximioris minora sunt duobus lateribus figuræ remotioris, &c. *Addidi ea, quæ deficere videbantur in hoc textu.*

b Iisdem figuris manentibus cum suis signis ostendatur quod duplum quadrati A C, si non excesserit F, quod diameter est illius figuræ minor, quàm diameter figuræ I L, & diameter figuræ I L, quàm diameter figuræ P Q, &c. *Legendum puto vt in textu apparet.*

c Et sic ostendetur quod si punctum V inciderit super D A, & ostendetur D, & M, &c. *Legendum puto, vt in textu videre est.*

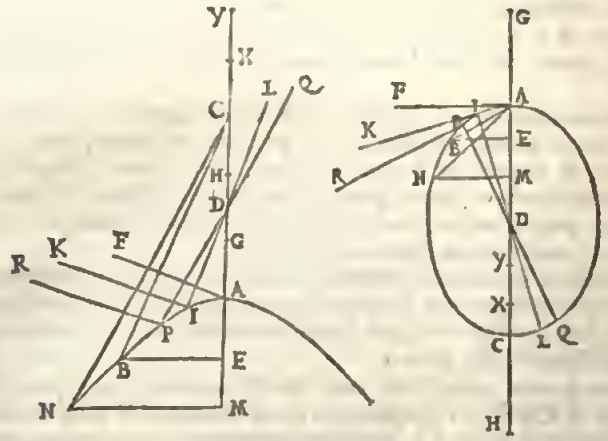
SECTIO

SECTIO DECIMA

Continens Propoſit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

XXXXXI. IN hyperbola, & ellipſi, ſi axis tranſuerſus minor fuerit ſuo erecto, differentia quadratorum duorum laterum figuræ axis eius maior eſt, quàm differentia quadratorum laterum figuræ cuiuslibet alterius diametri ei homologæ. Et differentia quadratorum laterum figure homologæ proximioris axi ſemper maior eſt in hyperbola, quàm differentia quadratorum laterum figuræ remotioris; at in ellypſi quouſque diameter tranſuerſa æqualis non fiat ſuo erecto. a

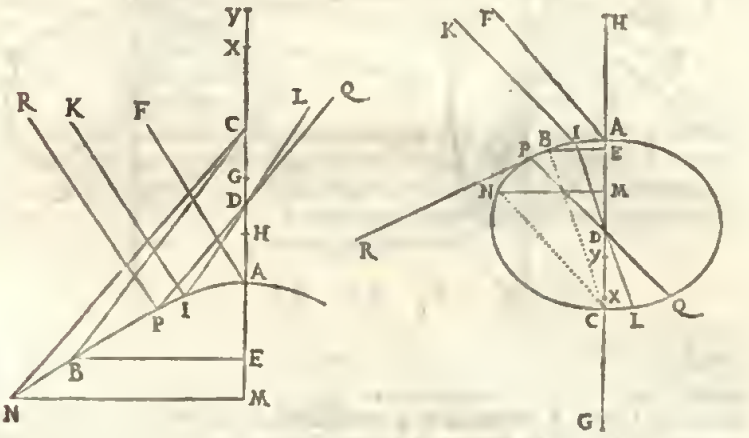
XXXXX. Et in hyperbola differentia quadrati axis inclinati ab eius figura minor erit ſemidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ ſui homologi.



XXXXIX. Si verò in hyperbole axis inclinatus maior fuerit ſuo erecto, vtique differentia quadratorum duorum larerum figuræ axis minor erit differentia quadratorum laterum figuræ alterius

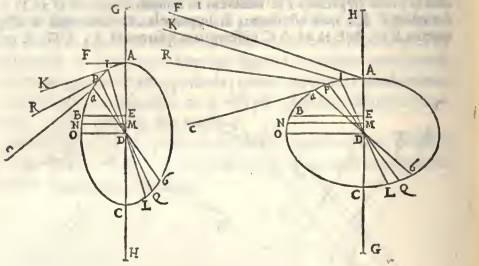
terius homologæ diametri, atque differentia quadrati axis ab eius figura maior erit ſemidifferentia quadratorum duorum laterum figuræ ſuæ homologæ, & minor erit integra differentia eorundem quadratorum.

In ſectione A B N ſit axis A C maior in figura prima, & in ſecunda minor, ſintquè I L, P Q duæ aliæ diametri, quæ in ellipſi cadant inter
b axim, & vnā æqualium; ducanturque duæ ordinationes A B, A N ad diametros I L, P Q, & duas ad axim perpendiculares B E, N M; ſitque A F erectus ipſius A C, & A G, C H duæ interceptæ: ponaturque
c in ellipſi X D æqualis E D, habebit E H ad H A minorem proportionem in prima hyperbola, & maiorem in reliquis, quàm E D ad D A, ſeu quàm E X, quæ eſt ſumma in hyperbola, & differentia in ellipſi ipſarum E G, & E H ad A C differentiam ipſarum H A, A G; & qua-



dratum A C in omnibus figuris ad differentiam quadratorum A C, & A F eandem proportionem habet, quàm quadratum A H ad differentiam duorum quadratorum A H, & G A: atque E H ad H A minorem proportionem habet in duabus primis figuris, & maiorem proportionem in duabus ſecundis, quàm E G ad G A, comparando homologorum ſummas, erit E H ad H A, vt E H cum E G ad H A cum G A, nempe aggregatum E H, E G in earundem differentiam ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod eſt æquale differentiæ duorum quadratorum E H, E G; nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet (in prima ellipſi), & maiorem (in ſecunda) quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in earundem differentiam, quod eſt æquale differentiæ quadratorum H A, A G, nempe quadratum A C ad differentiam quadratorum

dratorum duorum laterum figuræ eius ; igitur quadratum A C ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ I L minorem proportionem habet, in prima ellipſi, & maiorem in reliquis, quam ad differentiam quadratorum duorum laterum figuræ A C; ergo differentia quadratorum duorum laterum figuræ A C minor eſt in prima ellipſi, & maior in cæteris, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L. Præterea M H ad H E minorem proportionem, aut maiorem habet, quàm M G ad G E : & ponamus in ellipſi Y D æqualem D M, oſtenderturquè



quod M H in H A minus ſit in prima ellipſi, & maior in cæteris, quàm duarum M G, M H ſumma in earum differentiam M Y : & oſtendetur quemadmodum dictum eſt, quod differentia quadratorum duorum laterum figuræ I L maior eſt, quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ P Q.

Deinde in hyperbola ponamus I K erectum ipſius I L, erit differentia quadratorum duarum I L, I K (quæ eſt æqualis K L in ſummam L I, I K) maior illa, quàm I L in L K, quod eſt æquale differentiæ quadrari I L, & eius figuræ, nempe differentiæ quadrati A C, & eius figuræ (29. ex 7.) & non eſt maior in prima, quàm duplum, & in ſecunda maior duplo, & hoc eſt propoſitum.

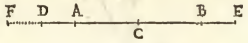
In Se-

In Sectionem X. Propoſit. XXXXIX. XXXXX. & XXXXXI.

LEMMA XVI.

SI rectæ lineæ AB bifariam ſectæ in C vtrinque addantur æquales portiones AD, & BE, dico rectangulum ſub tota DE, & ſub intermedia AB æquale eſſe differentiæ quadratorum ex AE, & ex AD.

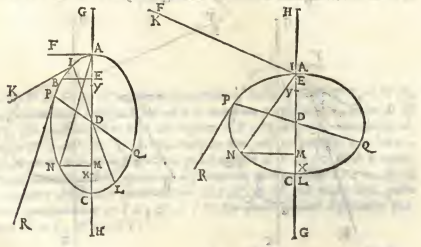
Apponatur FD æqualis DA, vel BE: & quia FD æqualis eſt BE additæ communi ED, erit FB æqualis DE, & ideo rectangulum FBA æquale erit rectangulo ſub DE, & ſub AB, ſed quadratum



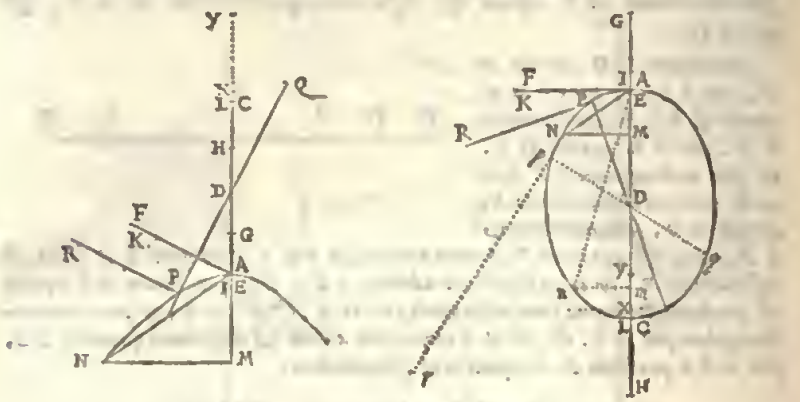
BD æquale eſt quadrato DA cum rectangulo FBA, (eo quod FA ſecta eſt bifariam in D, & ei in directum additur AB), ergo quadratum DB æquale eſt quadrato DA vna cum rectangulo ſub DE, & ſub AB, & propterea rectangulum ſub DE, & ſub AB contentum æquale eſt differentiæ quadrati BD, ſeu AE à quadrato DA, quod erat oſtendendum.

LEMMA XVII.

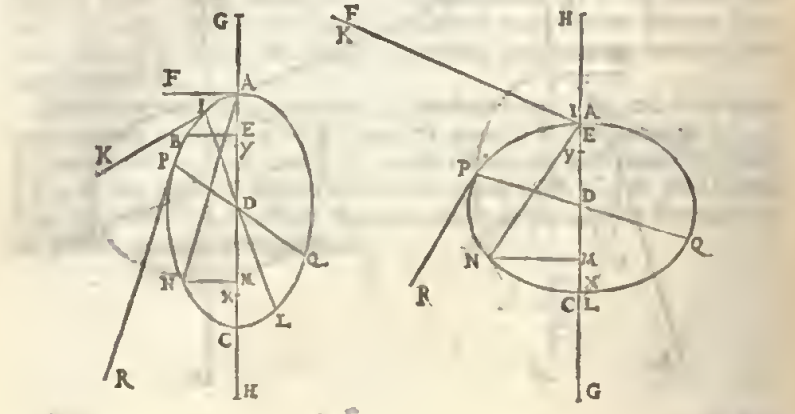
IN hyperbola, & ellypſi, cuius centrum D, axis AC, erectus AF, præfectæ AH, GC, & in ea diameter IL, cuius erectus



I K, & latus C E, pariterque diameter Q P, cuius erectus P R, eiusque latus C M, si fuerit proportio ipsius H M ad M D eadem proportioni H E ad D E, vel eadem proportioni H A ad D A, erit differentia quadratorum ex lateribus Q P, & ex P R figuræ diametri Q P æqualis differentiæ quadratorum ex lateribus figuræ diametri I L, vel A C: si verò proportio illa minor fuerit erit prior differentia quadratorum maior reliqua, & si illa proportio maior fuerit, erit prima quadratorum differentia minor reliqua.



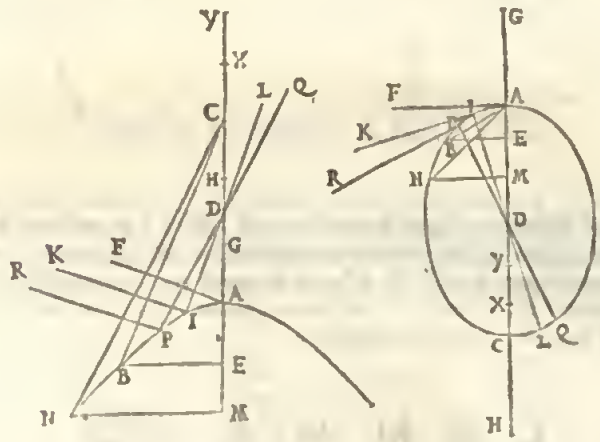
Fiat D X æqualis D E, & D Y æqualis D M, & primo quia H M ad M D est vt H E ad D E, permutando M H ad H E erit vt D M ad D E, seu vt duplum M Y ad duplum E X, & sumptis altitudinibus H A, & G H erit rectangulum M H A ad rectangulum E H A vt rectangulum sub Y M, & G H ad rectan-



gulum

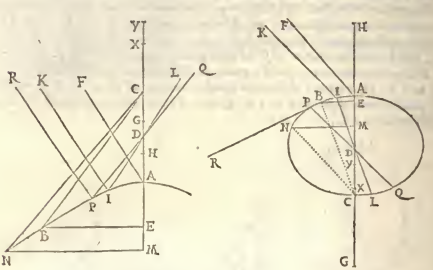
gulum ſub E X, & G H, & permutando rectangulum M H A ad rectangulum ſub Y M, & G H, ſeu ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G eandem proportionem habebit, quàm rectangulum E H A ad rectangulum ſub E X, & ſub G H, ſeu ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G: eſt verò quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R, vt rectangulum M H A ad differentiam quadratorum ex H M, & ex M G, pariterque idem quadratum A C ad differentiã quadratorum ex I L, & ex I K eſt, vt rectangulum E H A ad differentiam quadratorum ex H E, & ex E G, igitur idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R eandem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, & propterea differentia quadratorum ex Q P, & ex P R æqualis eſt quadratorum differentiæ ex I L, & ex I K, ſive æqualis eſt quadratorum differentiæ ex A C, & ex A F.

Lem. 16. huius.
Ibidem.
Prop. 20. huius.
Ibidem.



Secundo H M ad M D minorem proportionem habeat, quàm H E ad D E, vt prius permutando habebit H M ad H E minorem proportionem, quàm D M ad D E, ſeu quàm duplum M Y ad duplum E X, & ſumptis communibus altitudinibus H A ad G H, & permutando ex lem. 16. & propoſit. 20. huius, idem quadratum A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R minorem proportionem habebit, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quapropter differentia quadratorum ex P Q, & ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu maior, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.

Tertio habeat H M ad M D maiorem proportionem quàm H E ad D E: vt prius permutando, ſumptis communibus altitudinibus H A, & G H, & denuo permutando ex lem. 16. & prop. 20. huius, ſequitur quod idem quadratum



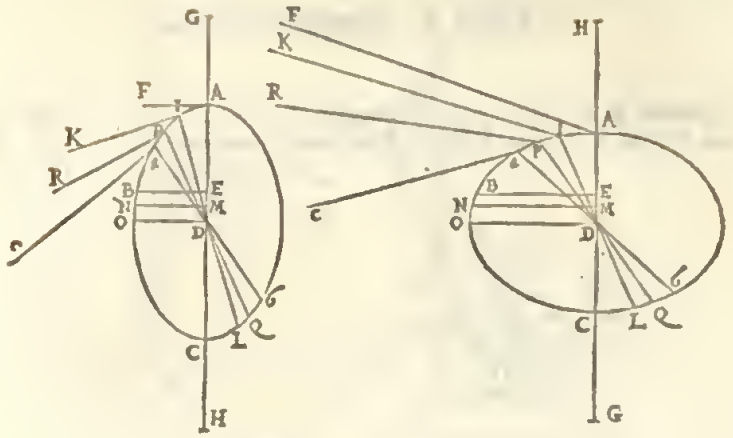
ex A C ad differentiam quadratorum ex P Q, & ex P R maiorem proportionem habet, quàm ad differentiam quadratorum ex I L, & ex I K, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſiue minor, quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F, quæ erant oſtendenda.

L E M M A XVIII.

IN ellipſi ſi diameter a b *bifariam ſecuerit rectam lineam A O terminos axium coniungentem, erit* a b *æqualis ſuo erecto* a c.

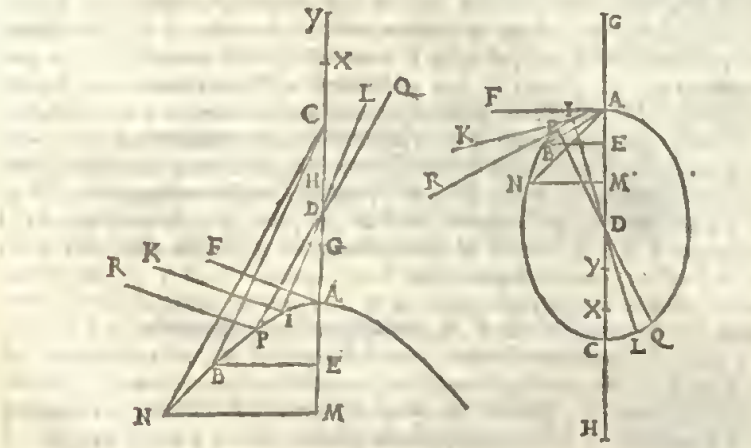
Quia axis A C bifariam diuiditur in centro D ab axi O D perpendiculari ad axim A C, quæ educitur à termino O ipſius A O ordinatim applicatæ ad
Prop. 7. huius. *diametrum* a b, *habebit diameter* a b *ad eius erectũ* a c *eandem proportionem æqualitatis quàm habet H D ad D G, igitur diameter* a b *æqualis eſt eius lateri recto* a c, *quod erat propoſitum.*

Notæ

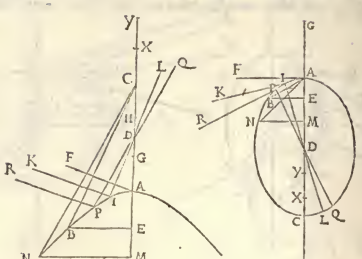


Notæ in Propoſit. XXXXIX.

QVia in hyperbola axis A C maior ponitur erecto eius A F, eſtque A H ad H C vt A C ad A F, ergo præſecta A H maior portio eſt totius C A, & ideo punctum H cadit inter C, & D, & punctum E cadit inter M, & D, igitur eadem H D ad maiorem D M habebit minorem proportio-



cum



nem, quàm ad minorem D E, & componendo H M ad M D minorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, & ideo differentia quadratorum ex P Q,
Lem. 17. huius. *& ex P R maior erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, seu maior quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F.*

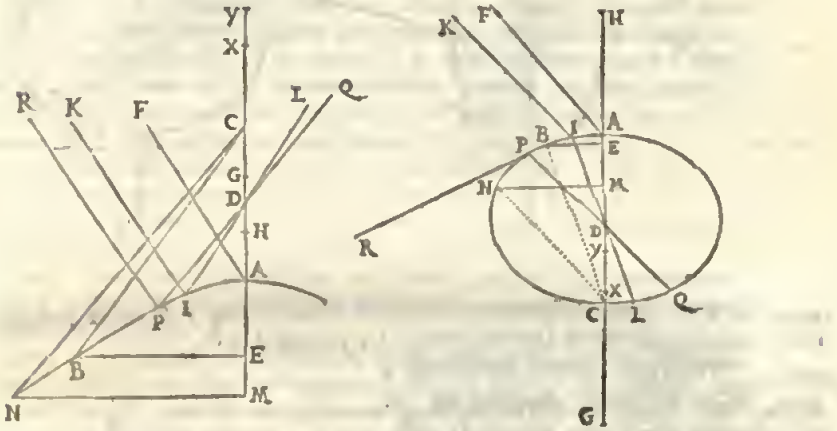
Rursus quia rectangulum C A F maius est quadrato A F, (propterea quod rectangulum illud medium proportionale est inter maius quadratum ex A C, & quadratum minus ex A F), ergo differentia quadrati A C à rectangulo C A F, scilicet differentia spatiorum maximi, & intermedij, minor erit, quàm differentia inter quadratum maximum A C, & minimum A F, sed differentia quadratorum ex A C, & ex A F minor ostensa est, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ergo multo magis differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Tandem quia quadratum A C ad semidifferentiam quadratorum ex I L, &
Prop. 20. huius. *ex I K eandem proportionem habet, quàm rectangulum E H A ad semidifferentiam quadratorum ex E H, & ex E G, vel ad semissem rectanguli ex E X in*
Lem. 16. huius. *G H, vel potius ad rectangulum sub E D, & sub G H; sed quadrati A C à rectangulo C A F differentia ad quadratum ipsum A C, seu differentia A C, & A F ad A C eandem proportionem habet, quàm H G ad H A, seu quàm*
ex Def. 2. huius. *rectangulum E H G ad rectangulum E H A, igitur ex æquali differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad semidifferentiam quadratorum ex I L, & ex I K eandem proportionem habebit, quàm rectanguli E H G ad rectangulum sub E D, & G H, estq; primùm rectangulu reliquo rectangulo æquè alto maius, cum eius basis E H maior sit, quàm E D, igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F maior erit, quàm semidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.*

Notæ

Notæ in Propoſit. XXXXX.

SI hyperbole axis A C minor fuerit eius erecto A F, quia H M maior eſt, quàm H E, & punctum H cadit inter D, & A, ergo H M ad H D ma-



iorem proportionem habebit, quàm H E ad eandem H D, & comparando antecedentes ad terminorum ſummas H M ad M D maiorem proportionem habebit, quàm H E ad E D, quare differentia quadratorum ex P Q, & ex P R minor erit, quàm differentia quadratorum ex I L, & ex I K, ſeu minor quàm differentia quadratorum ex A C, & ex A F. Lem. 17. huius.

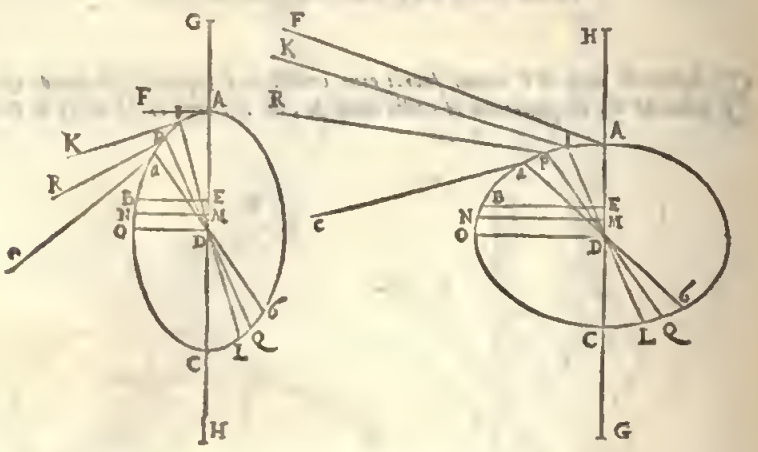
Poſtea, quia vt in precedenti nota dictũ eſt, differentia quadrati A C à rectangulo C A F ad ſemidifferentiã quadratorũ ex I L, & ex I K eandem proportionẽ habet, quàm rectangulum E H G ad rectangulum ſub E D, & ſub G H, eſtque illud rectangulum minus rectangulo iſto æquè alto, (cum illius baſis E H minor ſit, quàm E D), igitur differentia quadrati A C à rectangulo C A F minor eſt, quàm ſemidifferentia quadratorum ex I L, & ex I K.

Notæ in Propoſit. XXXXXI.

IN qualibet ellypſi ſit diameter a b æqualis eius erecto a c, eius latus erit C D, & diametri I L, & P Q cadant inter A C, & a b, earum laterum ex Lem. 18. huius.

C E, &

C E, & C M, termini E, & M cadent inter D, & A, & M cadas inter E & D, propterea M H ad M D maiorem proportionem habebit, quam H E

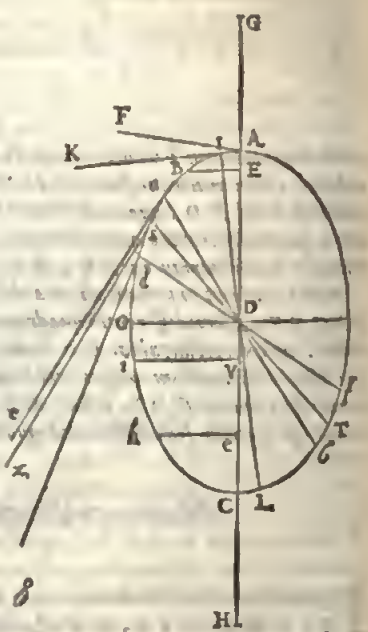


Lem. 17. huius. *ad E D, igitur differentia quadratorum laterum figur. P Q minor erit differentia quadratorum laterum figura I L, vel figura A C.*

PROP. 9. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum figuræ eius æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ axis maioris A C.*

Secetur H D in c, *vt H* c *ad* c D *eandem proportionem habeat, quàm H A ad A D, & ex puncto* c *educatur ad axim perpendicularis* c h *occurrens sectioni in* h, *& coniungatur* a h, *quàm bifariam secet diameter* f d, *cuius erectus* d g: *dico diametrum* f d *esse quæsitam. Quia H* c *ad* c D *eandem proportionem habet, quàm H A ad A D, ergo differentia quadratorum ex* f d, *& ex* d g *æqualis est differentia quadratorum ex A C, & ex A F, quod erat propositum.*

Lem. 17. huius.



PROP. 10. Addit. *In ellypsi reperire diametrum, cuius differentia quadratorum laterum eius figuræ æqualis sit differentiæ quadratorum laterum figuræ*

data

datæ diametri I L : oportet autem vt data diameter cadat inter axim maiorem A C , & diametrum a b *æqualem ſuo erecto* a c .

Sit C E latus diametri I L , & diuidatur H D in V , vt habeat H V ad V D eandem proportionem, quàm H E habet ad E D , & ducta vt prius ad axim perpendicularis V X occurrens ſectioni in X , & coniuncta A X , quam biſariam ſecet diameter T S , cuius erectus S Z ; dico hanc eſſe quæſitam . Quoniam H V ad V D eandem proportionem habet , quàm H E ad E D , igitur differentia quadratorum ex T S , & ex S Z æqualis eſt differentia quadratorum ex I L , & ex I K , quod propoſitum fuerat . Lem. 17. huius.

Deducitur ex 9. propoſitione additarum , atque ex propoſit. 51. huius , quod in ellypſi exceſſus quadrati cuiuſlibet diametri tranſuerſa ſupra quadratum erecti eius ſucceſſiue decreſcit ab axi maiori A C vſque ad diametrum a b *æqualem ſuo erecto , atque ab hac diametro defectus quadrati cuiuſlibet tranſuerſa diametri à quadrato erecti eius ſucceſſiue augetur , quouſque perueniatur ad diametrum* f d , *cuius differentia quadratorum figuræ eius æqualis ſit differentia quadratorum figuræ axis maioris A C , & vltra diametrum* f d *differentia prædictæ ſemper magis augentur quouſque perueniatur ad axim minorem Y O cuius differentia quadratorum figuræ eius maxima eſt omnium differentiarum inter quadrata laterum figuræ cuiuſlibet diametri eiuſdem ellypſis.* ex Prop. 50. huius.

Conſtat quoque ex 9. propoſitione additarum , quod in ellypſi tres diametri reperiri poſſunt , quarum differentia quadratorum figurarum laterum earum æquales ſint inter ſe .

Et ex 10. additarum reperiri poſſunt quatuor diametri , quarum differentia quadratorum laterum figurarum earum æquales ſint inter ſe : in hyperbole verò hoc non contingit , nam ab axi differentia quadratorum laterum figuræ cuiuſlibet diametri ſucceſſiue augentur , ſi axis maior fuerit ſuo erecto , at ſi minor fuerit prædicta differentia quadratorum ſucceſſiue diminuuntur . ex prop. 49. huius. ex Prop. 50. huius.

a Differentia (8. 15.) duorum quadratorum duorum laterum figuræ axis maior eſt in hyperbola (51.) , & ellypſi , quàm differentia quadratorum duorum laterum figuræ homologæ diametri ſectionis , & differentia homologi proximioris axi maior eſt differentia homologi remotioris : hoc autem ſi axis in hyperbola minor fuerit ſuo erecto (49.) ; ſi verò fuerit maior oppoſitum pronunciandum eſt (50.) , & differentia quadrati axis inclinati , & figuræ eius minor eſt ſemidifferentia quadratorum duorum laterũ figuræ ſui homologi , ſi axis inclinatus minor eſt ſuo erecto (49.) ſi verò fuerit maior exceſſus axis maior erit dimidio exceſſus quadratorum duorum laterum figuræ homologi , & minor quàm tota , &c. *Legendum puto : in qualibet ellypſi, &c. vt in textu apparet .*

b Et ſit P Q in ellypſi vna . . . . . , & educamus A B , A N , &c. *Repleui lacunam , vt in textu videre eſt .*

c Ergo E H ad H A minor eſt quàm E D ad D A , nempe E X exceſſus E G , E H ad A C exceſſum H A , A G , & quadratum A C in omnibus figuris ad differentiam duorum quadratorum A G , A F , vt quadratum A H ad differentiam duorum quadratorũ A G , & E H ad H A minor in duabus primis , & maior in duabus ſecundis, quàm E G ad G A , & iungamus ergo E H ad H A , nempe E H ad H A , quàm aggrega-

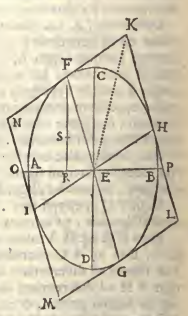
tum E H, E G in ſuum exceſſum ad aggregatum H A, E G in ſuum exceſſum æqualis exceſſui duorum quadratorum E H, E G, nempe quadratum A C ad exceſſum quadratorum duorum laterum figuræ I L minor in prima ellypſi, & maior in ſecunda, quàm quadratum A H ad aggregatum H A, A G in eorum exceſſu æqualis, &c. *Hæc omnia corrigi debuiſſe nemo negabit, atque hinc manifeſtum eſt non pauca in textu arabico deſiderari, cum propoſitio 51. vera non ſit abſque determinationibus ſuperius expoſitis.*

SECTIO VNDECIMA

Continens Propoſit. XXXII. & XXXI. Apollonij.

IN ellypſi, & ſectionibus coniugatis parallelogrammum ſub axibus contentum æquale eſt parallelogrammo à quibuſcunque duabus coniugatis diametris comprehenſo, ſi eorum anguli æquales fuerint angulis ad centrum contentis à coniugatis diametris. a

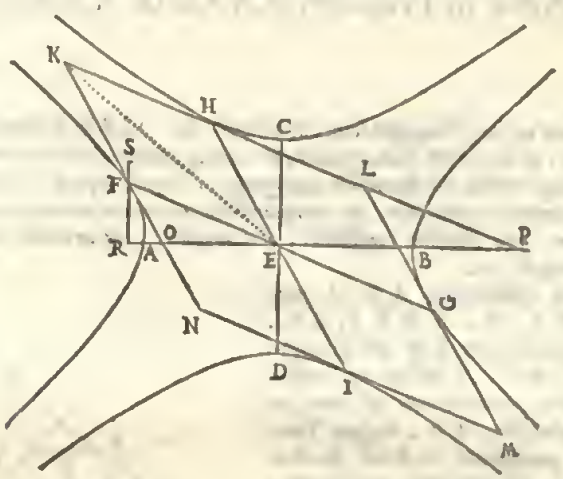
Sint duo axes A B, C D in ellipſi A C B D, ſiue in ſectionibus coniugatis A, B, C, D, & ſint F G, I H aliæ duæ coniugatæ diametri, & ducantur per puncta F, I, G, H, lineæ tangentes coniſectiones, quæ ſibi mutuo occurrant ad puncta K, L, M, N: & producatur A B ex vtraque parte vſque ad tangentes, caſque ſecet in O, P, & ſit centrum E. Dico quod A B in C D æquale eſt ſpatio parallelogrammo M K: ſit itaque F R perpendicularis ad A B; & ponamus S R mediam proportionalem inter O R, R E.



Et quia quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habet, quàm O R in R E, nempe quàm quadratum S R ad quadratum F R (37. ex 1.) erit A E ad E C nempe quadratum A E ad A E in E C, vt S R ad F R, nempe S R in O E ad F R in O E, & permutando erit quadratum A E, nempe R E in O E (39. ex 1.) b

ad

c ad S R in O E, vt A E in E C ad F R in O E, & quadratum O F ad quadratum E H, nempe triangulum E O F ad triangulum E H P (24. ex a.) propter ſimilitudinem duorum triangulorum eſt, vt O R ad R E



(4. ex 7.), & ſpatium parallelogrammum E K medium proportionale eſt inter duplum trianguli E O F, & duplum trianguli E H P; & S R media proportionalis eſt inter O R, & R E, erit duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K, vt S R ad R E; nempe S R in O E ad R E, in O E, quæ oſtendetur eſſe, vt F R in O E, quod eſt æquale duplo trianguli O F E ad A E in E C; ergo parallelogrammum E K æquale eſt ipſi E A in E C, & propterea quadruplum illius ſpatij, quod eſt parallelogrammum M K æquale eſt ipſi B A in C D. Et hoc erat propoſitum.

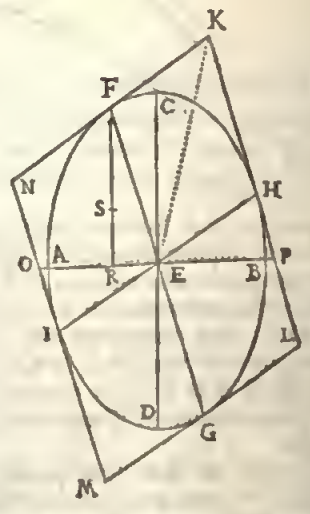
* Hic eſt finis libri ſeptimi Apollonij, quemadmodum illum diſpoſui, & puto me præueniſſe in hoc quoſcunque alios, illumquè repoſui in Bibliotheca Domini Noſtri Regis Glorioſiſſimi, Beneficentiſſimi, Victorioſi; Deus vmbram illius conſeruet ſuper omnes famulos eius, & greges, & ad finem perducat omnia illius deſideria, & cogitationes, & labor famuli eius ſit iuxta eius beneplacitum; & Laus Deo Domino ſæculorum, & orationes eius ſint ſuper Maumethum, eiuſque ſequaces. Explicit anno DXIII. ſcribente Mahamudo filio Maſudi Mediei Seirazeni decima die di Alkade Anno DCCCXXV.

* *In ſequẽtibus Paraphraſtes Arabicus impiè, & Maumedanorum more loquitur.*

Notæ in Propoſit. XXXI. & XXXII.

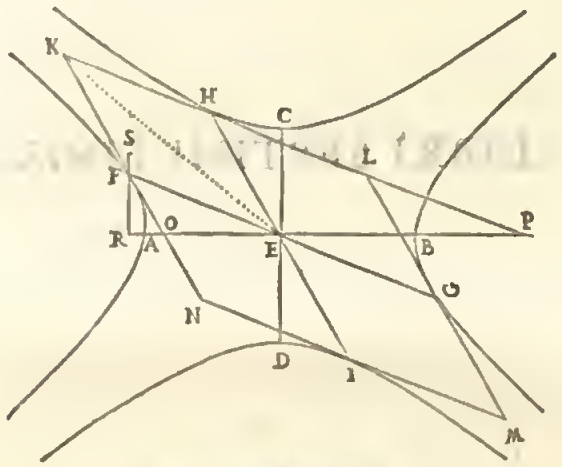
PLanum axium coniugatarum in ellipſi, &c. *Ideſt in ſectionibus coniugatis, & in ellipſi rectangulum ſub axibus coniugatis contentum æquale eſt parallelogrammo ſub diametris coniugatis in angulo æquali, et quæ ad centrum à diametris continetur. In textu arabico reperitur numerus 9. in illa propoſitione, qua ellipſim conſiderat, ſed mendoſe, vt arbitror debet potius cenſeri propoſit.* 32. a

Et quia quadratum A E ad quadratum E C eſt, vt O R in R E, nempe quadratum S R ad quadratum F R, &c. *Quoniam axis rectus D C medius proportionalis eſt inter aximtranſuerſum A B, eiuſque latus rectum, quadratum A B ad quadratum D C, vel eorundem quadrantes, ſcilicet quadratum ſemiaxis A E ad quadratum ſemiaxis E C eandem proportionem habebit, quàm axis tranſuerſus A B ad eius latus rectum, ſed* Prop. 37. lib. 1. *rectangulum E R O ad quadratum F R eandem proportionem habet, quàm axis tranſuerſus A B ad eius latus rectum, atque quadratum S R æquale eſt rectangulo E R O (eo quod S R ducta fuit media proportionalis inter E R, & R O) erit quadratum S R ad quadratum F R, vt latus tranſuerſum A B ad eius latus rectum: quare quadratum A E ad quadratum E C eandem proportionem habebit, quàm quadratum S R ad quadratum F R: & A E ad E C eandem proportionem habebit, quàm S R ad F R: & ſumptis altitudinibus A E,* Ibidem. *& O E erit quadratum A E, ſeu ei æquale rectangulum R E O ad rectangulum A E C, vt rectangulum ſub S R, & ſub O E ad rectangulum ſub F R, & ſub O E, & permutando rectangulum R E O ad rectangulum ſub S R, & ſub O E, ſeu vt R E ad S R eandem proportionem habebit, quàm rectangulum A E C ad rectangulum ſub F R, & ſub O E: & inuertendo rectangulum ſub F R, & ſub O E ad rectangulum A E C eandem proportionem habet quàm S R ad R E.* b



Et

c Et quadratum F O ad quadratum E H, nempe triangulum E F O ad triangulum E H P, &c. *Quia G F, I H ſunt diametri coniugatæ, quibus æquidiſtant contingentes F O, & L H erunt triangula E O F, & E H P ſimilia, quorum latera homologa O F, & E H; & ideo triangulum E O F ad*



triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm quadratum O F ad quadratum E H: eſtque O R ad R E, vt quadratum O F ad quadratum E H, igitur triangulum E O F ad triangulum E H P eandem proportionem habebit, quàm O R ad R E. Ducatur poſtea recta linea E K, erit triangulum E F K medium proportionale inter duo ſimilia triangula E O F, & E H P (eo quod triangulum E O F ad triangulum E F K æquè altum eandem proportionem habet quàm O F ad F K, ſeu ad latus E H ei homologum) poſita autem fuit S R media proportionalis inter O R, & R E; ergo triangulum E O F ad triangulum E F K eſt vt S R ad R E: eſtque parallelogrammum E K æquale duplo trianguli E F K; ergo duplum trianguli E O F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm S R ad R E; Et quia rectangulum ſub O E, & ſub perpendiculari R F æquale eſt duplo trianguli E O F (eum habeant baſim O E communem, & eandem altitudinem perpendicularis R F); igitur rectangulum ſub O E, & ſub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habebit, quàm S R ad R E: ſed prius rectangulum ſub O E, & ſub R F ad rectangulum A E C eandem proportionem habebat, quàm S R ad R E: ergo idem rectangulum ſub O E, & ſub R F ad parallelogrammum E K eandem proportionem habet, quàm ad rectangulum A E C; & propterea parallelogrammum

Prop. 4. huius.

mum E K æquale est rectangulo A E C ; & eorum quadrupla erunt æqualia , scilicet parallelogrammum M K æquale erit rectangulo sub B A , & sub D C comprahenso . Quod erat propositum .

LIBRI SEPTIMI FINIS.

395

ARCHIMEDIS
LIBER ASSVMPTORVM
INTERPRETE
THEBIT BEN-KORA
EXPONENTE ALMOCHTASSO

Ex Codice Arabico manuſcripto
SERENISS. MAGNI DVCIS ETRVRIÆ,
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS
Latinè vertit.

IO: ALFONSVS BORELLVS
Notis Illuſtrauit.

ARCHIMEDIS

LIBER ASSVMPTORVM

INTERPRETE

THEBIT BEN-KORA

IO: ALFONSI BORELLI

Præfatio ad Lectorem.

I pulchrum illud Epicharmi effatum tenes (amice Lector) nervos, atque artus esse sapientiæ non temerè, ac imprudenter credere, non adeò facilis esse debes, vt Archimedis nomen lemmata hæc pretiosiora efficiens tibi imposturam, aut fucum facere patiaris, atque alterius contemptissimi auctoris opusculum immeritò tanto viro tribuas; & siquidem maiores nostri æquum iudicium dixere, vt sine inuidia culpa plectatur, non ita morosus, ac difficilis esse debes, vt sua ei denegare velis leui quacumque suspicione, quæ facilè excuti possit; verum ab omni præiudicio liberum te cupio, & memorem illius adagij: Ne quid nimis. Tibi igitur sic affecto notionem huius controuersiæ omnino relinquo, quod vt liberè, & ritè exequi valeas, sedato animo nullum meum iudicium interponens, afferam primò rationes, quibus persuaderi quis posset hoc opusculum iniuriâ Archimedi tributum fuisse, & mox coniecturas recensebo, quæ eiusdem Archimedis idipsum opus esse fortè non inaniter probant; sicque pensitatis, & compositis vtrinque rationum ponderibus sententiam liberè pronuncies tuam per me licet.

Et primò animaduersione dignum est in Collect. Mathemat. Pappi Alexand. frequentissimè commemorari ea, quæ Archimedes conscripsit, præcipuè lib. 5. & lib. 8. De Spiralibus, de Solidis Polyedris, de Circuli Mensura, de Sphæra, & Cylindro, & multoties citantur, & transcribuntur Archimedeæ propositiones, neque vspiam huius Opusculi

(apud Arabes hactenus latentis) mentio vlla fit. Neque Ptol. in Magnæ Constr. lib. 2. tribuit Archimedi prop. 5. cap. 9. ibi relatam, cum tamen soleat esse adeò gratus, vt lib. 6. cap. 7. propositionem ab Archimede sumpsisse fateatur. Neque ipsemet Archimedes huius Opusculi vnquam meminit, qui alioquì valdè prolixè enumerat, & recenset ea, quæ in proprijs libris continentur, & demonstrantur. Inexcusabiles insuper errores, atque allucinationes, quæ in huiusmodi propositionibus reperiuntur, immò puerilia alia Opuscula, quæ citantur vt Archimedis, satis apertè videntur ostendere nunquam diuinum illud ingenium huiusmodi minutias somniasse; cum, vt Carpus Antiochensis ait, referente Pappo, quæ præcipua sunt in Geometria, breuiter quidem, sed diligenter conscripserit Archimedes. Tandem præcipuæ propositiones huius Opusculi similes sunt eis, quæ recensentur quidem, & demonstrantur lib. 4. Collect. Mathem. Pappi Alex., easque Archimedis esse non asserit; immò in quibusdam libris antiquis circumferri affirmat.

Quod verò dictæ rationes tanti roboris, ac efficaciæ non sint, vt penitus euincant huiusmodi Opusculum ab aliquo alio tributum Archimedi fuisse, ex modo dicendis patebit. Et primo optimè norunt, qui in Pappi libris euoluendis vllam operam impenderunt lib. 7. Collect. recensere eum prolixè, & accurate quamplurima opera Apollonij Pergæi, quorum pars maxima non extat, & enumerare propositiones, & lemmata vsque ad figuras, & tamen qui huiusmodi minutias curat, & adnotat, idem integra opera eiusdem Apollonij non commemorat. Sufficiant hæc insignia specimina. De admirandis astronomicis demonstrationibus à Ptolemæo summoperè laudatis lib. 12. cap. 1. Magnæ Constr., ne verbum quidem. De libro Comparationis Dodecaedri, & Icosaedri ab Ypsicle memorato, altum silentium. Si igitur idem Pappus opera Archimedis non ex professo, sed obiter, & sparsim commemorat, mirum non est taceuisse aliqua eius opera, vt sunt hæc lemmata.

Secundò Ptolemæus non affirmat lib. 2. prop. 5. proprio marte à se inuentam fuisse, nec eam Archimedi, aut alicui alij tribuit, quare fieri potuit, vt eam ex libro antiquo desumpserit, à quo nomen Archimedis casu expunctum fuisset, vt postea ostenderur.

Tertiò Archimedes quoque in suis libris existentibus Græcè, & Arabicè non recensetomnia opera à se conscripta, & edita, nam liber de
In prob. lib. 8. Lib. 5. pr. 27. insidentibus humido, & de Polyedris recensentur quidem à Pappo, non autem ab Archimede. Liber Mechanicus de Sphæropœia nominatur à

Carpo

Carpo Antiochenſe apud Pappum. Liber de Figuris Iſoperimetris aſſer- In prob. lib. 8.
uatur apud Arabes tantum ; non igitur adulterina huiuſmodi lemmata erunt, propterea quod Archimedes ea non nominat in paucis libris reſiduis, & fortè commemorata fuerunt in aliquibus alijs ex multis operibus eius iniuria temporum deperditis.

Quartò ſane negari non poſſunt euidentiſſimi errores in hiſce demonſtrationibus, qui certè lemmatum auctori tribuendi non ſunt, vt ſuis in locis adnotabo ; explanatorum enim imperitia ſæpenumero propoſitiones vniuerſaliter pronunciatæ violenter in ſenſu particulari, & deformi exponuntur. Neque mirum eſt opera antiquorum magni nominis paſſim, & multis modis deformata fuiſſe tranſcriptorum incuria opponendo notas marginales, detrahendo, & ſuperaddendo textui alienas ſententias, ac teſtimonia, & hoc præcipuæ in codicibus Arabicis frequentiſsimè obſeruauit Excell. Abrahamus Ecchellenſis. Sed nihilominus in tanta tranſformatione à vetuſtate, & ignorantia amanuenſium profecta veſtigium alquod ſubobſcurum admirandi, & perſpicui Archimedis ingenij dignoſcitur.

Tandem non inani coniectura ex Pappi, & Eutocij teſtimonijs probari poteſt idipſum, quod Arabes ratum habent, ſcilicet Archimedem huius libelli auctorem fuiſſe. Et primo aio præter reliqua opera iam nota edidiſſe Archimedem librum Lemmatum, quod quidem deducitur ex Eutocio in Comment. prop. 4. lib. 2. de Sphera, & Cylindro, vbi ait: Id, quod promiſerat ſe demonſtraturum, (*ſcilicet Archimedes*) in nullis exemplaribus reperire eſt, quare etiam Dionyſodorum deprehendimus nunquam in ea incidiſſe, adeoque cum non potuerit relictum (*ab Archimede*) lemma attingere diuerſam viam ſuſcepit vniuerſi problematis, quam deinceps deſcribemus. Diocles porrò idipſum in libro à ſe de Pyrijs inſcripto, promiſſum fuiſſe ab Archimede nunquam præſtitum opinatus, ſupplere contendit, cuius conatum mox apponemus, quod & ipſum pariter à ſuperius propoſitis diſcedit ; itidem enim ac Dionyſodorus alia demonſtrandi ratione problema ſtruit. IN QVODAM AVTEM VETERI LIBRO (neque enim diuturnæ pepercimus diligentiæ) ſupraſcripta incidimus theoremata haud exiguam tamen habentia obſcuritatem præ erratis, multiformiterque mendoſa in figurationibus. Eamdem equidem veritatem, quam inquirebamus, atque in parte domeſticam Archimedi linguâ Doricam ſeruabant, vſita-

vſitatiſque pridem rerum nominibus conſcripta erant, quæ nunc parabola, recti coniſectione, quæ hyperbole, obtuſi anguli ſectione vocata; vt ex his ſuſpicari liceat EADEM IPSA FORTEAN ESSE, QVÆ IN FINE SCRIBENDA PROMITTEBANTVR; quare attentius incumbentes, (cum ipſam hypotheſim, qualiter perſcripta fuerat, præmendarum copia (vt diximus) ſatis incommodam, & abſtruſam reperiremus,) ſenſum inde paucis elijcientes communi, & plana dictione (vt fieri potuit) deſcribimus. Vniuerſaliter autem primum theorema deſcribetur, vt definitis manifeſtetur, deinde reſolutis in problemate accomodabitur. *Inferius*

Præmiſſis autem problemaris, quæ hìc apponuntur, ſcilicet duplam eſſe ipſam D B ipſius B F, &c. (*Nota quod hic loquitur de lemmatibus adiunctis,*) *& paulò poſt*; animaduertendum eſt autem, & hæc quæ ab Archimede dicta ſunt conſonare ijs, quæ nos reſoluimus (*ſcilicet ijſdem adductis lemmatibus*). *Deinde* cum dixerit, quod ſuperius dictum vniuerſaliter habet determinationem, adiectis autem problematibus ab eo inuentis, hoc eſt ipſam D B duplam eſſe ipſius B F, & ipſam B F maiorem ipſa F H, &c. *Hìc manifeſtè Eutocius declarat propoſita lemmata in antiquo codice inuenta Archimedis fuiſſe.*

Hæc igitur conſentanea verbis Archimedis, qua fieri potuit, dilucidè expoſuimus.

Conſtat ergò ex Eutocij ſententia librum antiquum ab eo repertum, & recognitum, eſſe opus Archimedis, licet titulo Auctoris caruerit, & mendoſiſsimum eſſet, atque ignotum Dionyſodoro, Diocli, & pleriſque Græcorum diu iacuiſſet; etenim ex ſtylo, ex ſubiecto promiſſo, ex lingua Dorica, & ex vocibus vetuſtis Archimedi familiaribus concluſit lemmata prædicta Archimedis fuiſſe. Sed adhuc difficultas hæret, nam licet concedamus ſcripſiſſe Archimedē, & edidiſſe librum lemmatum ab Eutocio memoratum, diuerſus omnino erit ab eo, quem Thebitius Arabicè tranſtulit, nam in iſto non reperitur lemma illud, quod promiſerat Archimedes ſe demonſtraturum.

Hæc difficultas duplici coniectura ſi non frangi, ac reſolui ſaltem debilitari poteſt; liber enim antiquus lemmatum Archimedis ne dum titulo carebat ſuo, ſed erat valdè corruptus, deficiens, & mendoſus; quare non ſine diuturno, ac pertinaci labore ſenſus illius lemmatis elicere potuit

Euto-

Eutocius, vnde fieri potuit vt Græcus codex ad Arabes transmissus deterior, & magis mutilus adhuc fuerit eo exemplari, in quod incidit Eutocius, vel potius incuria, aut vitio librariorum Arabum, & amanuensium eiusdem codicis quamplurima lemmata perierunt, inter quæ assumptum in prop. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro excidit. E contrà aliquæ propositiones similes eis, quæ leguntur in hoc Arabico codice de Arbelo extant apud Pappum lib. 4. Collect. prop. 14. 15. & 16., quas ait circumferri in quibusdam libris antiquis, scilicet in libro Græco incerti Auctoris propositiones lemmaticas continente; at testimonio Thebitij magni nominis viri, & omnium Arabum, liber ex Græco translatus continens ferè eadem lemmata, quæ recensentur à Pappo, tribuitur Archimedi, sicuti prius Eutocius multiplici coniectura libri antiqui lemmatum à se reperti Archimedem auctorem fecit; quare ergo nos eisdem coniecturis persuasi eidem Achimedi tribuere dubitabimus Opusculum hoc ab Arabibus asseruatum, in quo si mendarum copiam spectes, simile omnino erit ei, quod Eutocius nactus est? Hæ sunt rationes, mi lector, quas tibi examinandas relinquo in hoc perplexo negotio nulla dissimulata difficultate.

Interim scito hoc manuscriptum Arabicè elegantissimè exaratum in Bibliotheca Serenissimi Magni Etruriæ Ducis diu asseruatum fuisse; eius tamen editionis spe facta tandem anno 1658. Serenissimus Ferdinandus Secundus Magnus Etruriæ Dux Romæ asportandum humanissimè mihi credidit, vt rei litterariæ bono latinè traduceretur, præstitumque fuit opera, & studio celeberrimi, & peritissimi Orientalium linguarum professoris Abrahami Ecchellensis, ipsoque dictante religiosissimè, & accuratè ipse calamo excepi, in eoque paucula quædam in notis animaduertenda censui tum in contextu plurimis mendis corrupto, tum in scholijs Arabicis Almochtasso non admodum in Geometria versati. Addidi in fine huius libri duas alias Archimedis propositiones ab Eutocio repertas quarum altera fortasse illa eadem est quæ hic deficit, nam Almochtasso in proemio ait, propositiones huius Opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit decimaquinta. Et licet hæc eadem lemmata anno præterito edita fuerint Londini, non tamen hac nostra editione fraudandus es, amice lector. Vale.

IN NOMINE DEI MISERICORDIS MISERATORIS

CVIVS OPEM IMPLORAMVS.

LIBER ASSVMPTORVM ARCHIMEDIS,

INTERPRETE THEBIT BEN-KORA,

Et exponente Doctore

ALMOCHTASSO ABILHASAN,

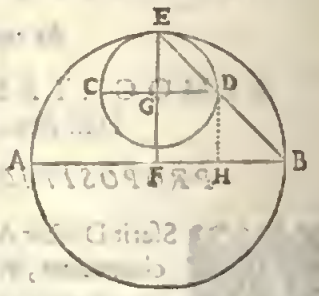
Halî Ben-Ahmad Noſuenſi.

PROPOSITIONES SEXDECIM.

ASſerit Doctor Almochtaſſo hunc librum referri ad Archimedem, in quo ſunt propoſitiones pulcherrimæ paucæ numero, vtilitatis verò maximæ de principijs Geometriæ, optimæ atque elegantiſſimæ, quas adnumerant profeſſores huius ſcientię ſummæ intermediorum, quæ legi oportet inter librum Euclidis, & Almageſtum; at verò quædam illius propoſitionum loca indigent alijs propoſitionibus, quibus propoſitiones illæ clariores euadant. Et quidem ipſe Archimedes has indicauit propoſitiones, eaſque retulit in alijs ſuis operibus, dum dixit quemadmodum demonſtrauimus in propoſitionibus rectangulorum: item & quemadmodũ demonſtrauimus in noſtra expoſitione agentes de triangulis; rurſus quemadmodum demonſtrauimus in propoſitionibus quadrilaterum; & retulit in propoſitione quinta demonſtrationem hac de re magis peculiarem. Deinde compoſuit Abuſahal Alkuhi librum, quem inſcripſit ordinationem libri Archimedis de aſſumptis, & tractauit demonſtractionem huius propoſitionis via vniuerſaliori, ac meliori, nec non ea, quę dependent ex compoſitione proportionis, quod quidẽ cum id comperi, attexui locis obſcurioribus huius libri expoſitionem, ſeu marginales poſtillas, & confirmaui quod ille indicauerat propoſitionibus, vti iudicaueram, & retuli ex propoſitionibus Abiſahal duas propoſitiones, quibus opus eſt ad propoſitionem quintã declarandam, reliquas omittens breuitatis gratia, & eo quod non ſint neceſſarię.

PROPOSITIO I.

SI mutuo se tangant duo circuli, vt duo circuli A E B, C E D in E, fuerintque eorum diametri parallelæ, vt sunt duæ diametri A B, C D, & iungantur duo puncta B, D, & contactus E [lineis] D E, B D, erit linea B E recta.



Sint duo centra G, F, & iungamus G F, & producamus ad E, & educamus D H parallelam ipsi G F. Et quia H F æqualis est ipsi G D, suntque G D, E G æquales, ergo ex æqualibus F B, F E remanebunt G F, nempe D H, & H B, quæ erunt æquales, atque duo anguli H D B, H B D æquales. Et quia duo anguli E G D, E F B sunt recti, atq; duo anguli E G D, D H B sunt æquales, remanebunt duo anguli G E D, G D E, qui inter se, & duobus angulis H D B, H B D æquales erunt; ergo angulus E D G æqualis est angulo D B F, & comprehensus angulus G D B est communis, ergo erunt duo anguli G D B, F B D (qui sunt pares duobus rectis) æquales duobus angulis G D B, G D E: igitur ipsi quoque sunt æquales duobus rectis, ergo linea E D B est recta, & hoc est, quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

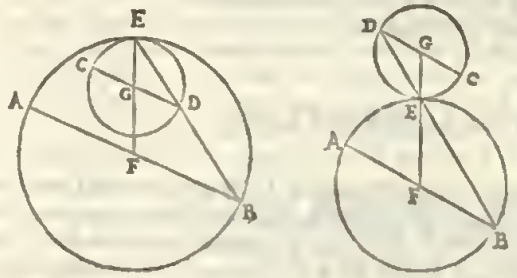
DIcit Doctor; Et quidem dici potest cum duo anguli H D B, H B D sint æquales, & angulus D H B rectus, quod erit angulus B D H semirectus, & similiter angulus E D G, & angulus G D H rectus, ergo tres anguli sunt æquales duobus rectis, igitur linea E D B est recta. Idem sequitur, si illi duo circuli se mutuo exterius contigerint.

Notæ in Propositi. I.

HAEc est vna earum Propositionum, quas Pappus in quodam libro antiquo reperit, qui, vt deduximus ex Eutocio, ab Archimede conscriptus diu apud Arabes latuit. Hæc assumitur in propositi. 14. lib. 4. Collect. Pappi, eamque supplet Commandinus, sed extat expresse lib. 7. propositi. 110. eiusdem Pappi, estque demonstratio vniuersaliſſima comprehendens casum neglectum in hac demonstratione, scilicet quando duo circuli se extertus contingunt, &

licet

licet non laboret vitio Arabici textus, non tamen illa omnino sincera est: conueniunt tamen in vniuersalitate propositionis, quàm valde peruersè scholiastes Arabicus exposuit; allucinatur enim quando ait, & quia duo anguli E G

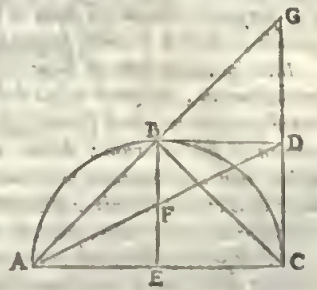


D, & E F B sunt recti, &c. *Nam inferius citatur,* & *vsurpatur haec prima propositio vniuersalissimè, scilicet existentibus angulis G,* & *F acutis, vel obtusis,* & *sic reuera sonant verba propositionis, vbi ait,* quorum diametri A B, C D sunt parallelæ, & *sic pariter habetur in praedicta propositione Pappi; quare textus omnino corrigi debuit, vt pronuncientur anguli E G D,* & *E F B* æquales, *non recti. Nescio tamen quomodo expositio Almochtassi excusari possit, qui supponit diametros A B,* & *C D perpendiculares ad rectam lineam F G E, quod quidem in vnico casu verificatur, vt dictum est. Peccat posteà demonstratio Pappi lib. 7. pr. 110., vbi conatur ostendere duo centra,* & *punctum contactus circulorum esse in vnica recta linea; quod quidem in 3. Elementi. Eucl. ostensum supponi debuerat.*

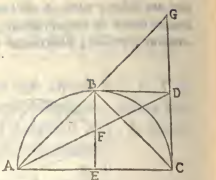
PROPOSITIO II.

SIt C B A semicirculus, quem D C, D B tangant, & B E perpendicularis super A C, & iungamus A D, erit B F æqualis ipsi F E.

Demonstratio. Iungamus A B, eamque producamus in directum, & educamus C D, quousque illi occurrat in G, & iungamus C B. Et quia angulus C B A est in semicirculo, erit rectus, remanet C B G rectus, & D B E C est parallelogrammum rectangulum, ergo in triangulo G B C rectangulo educitur perpendicularis B D ex B erecta super basim, & B D, D C erunt æquales, eo quod tangunt circulum, ergo C D est etiam æqualis ipsi D G, quemadmodum ostendimus in propositionibus,



quas confecimus de rectangulis. Et quia in triangulo G A C linea B E educta eſt parallela baſi, & iam educta eſt ex D ſemipartitione baſis linea D A ſecans parallelam in F, erit B F æqualis ipſi F E, & hoc eſt quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

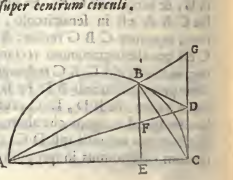
DIcit Doctor: Quod autem C D ſit æqualis ipſi D G, vti remittit ad ſuum librum de propoſitionibus rectangulorum, eo quod duo anguli D C B, D B C æquales ſunt propter æqualitatem D B, D C, & angulus D B C cum augulo D B G eſt rectus, & ſimiliter angulus D C B cum angulo C G B: neceſſe eſt, vt ſint duo anguli D G B, D B G æquales etiam, ergo duo latera D B, D G ſunt æqualia.

Rurſus ſi dicatur quod proportio C D ad D B ſit vt proportio D B ad D G, & D C æqualis ipſi D B, ergo D B æqualis eſt D G, eſſet parabola. Dicit, quod vero B F ſit æqualis F E, hoc conſtat ex eo quod caſus A D ſuper duas lineas B E, G C parallelas in triangulo A G C, exigit eorum ſectio in eadem proportione, & id quidem, quia A D ad A F eandem proportionem habet, quam G D ad B F, & quam D C ad E F, ergo G D ad B F eſt vt D C ad E F, & permutando G D ad ei æqualem D C, eſt vt B F ad E F, & propterea ipſæ etiam ſunt æquales.

Notæ in Propoſ. II.

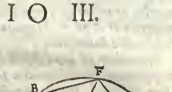
HVius ſecundæ propoſitionis expoſitio, & demonſtratio inſigniter deformata eſt; in propoſitione enim ſupponuntur duæ rectæ D C, D B tangere circulum tantummodo, non autem conſtituere angulum rectum, & ſolummodo recta linea B E perpendicularis ducitur ad diametrum A C, quare male in demonſtratione pronunciatur quadrilaterum B D C E parallelogrammum rectangulum, cum ferè ſemper ſit Trapetium: pariterque errat, quando ait rectam B D perpendicularem eſſe ſuper C G, quæ nunquam vera ſunt, niſi in unico caſu, quando ſcilicet B E cadit perpendiculariter ſuper centrum circuli.

Interim notandum eſt hanc elegantem propoſitionem, inſignem vſum habere pro inueſtigatione menſuræ circuli, & rectarum in eo ſubtenſarum; deduci namque poſſunt non contemnenda problemata; Si enim quis cupiat circulo adſcribere duas figuras ordinatas ſimiles, quarum circumſcripta ſuperet inſcriptam exceſſu minori quolibet dato, facile problema abſoluetur, pariter-



pariterque proportio diametri ad circuli peripheriam satis compendiosè deduci potest, quandoquidem inter figuram ordinatam eidem circulo inscriptam, cuius semilatus est E B, & circumscriptam duplo laterum numero, cuius duo semilatera sunt C D B, circulus intermediat; & Perimeter circumscriptæ figuræ ad Perimetrum inscriptæ eandem proportionem habet, quam diameter C A ad A E, quæ proportio minui semper magis, ac magis potest in infinitum; & tandem ex 3. propos. sequenti, ex continua semipartitione quadrantis circuli elici possunt subtensæ successiuè subdiuisæ in infinitum, & propterea dabitur proportio diametri A C ad semisubtensam B E, sed datur quadratum ipsius B E, igitur datur rectangulum A E C sub segmentis diametri, & datur E C ex iam dicta 3. propos. igitur datur quoque E A; estque B E ad C D B, vt E A ad diametrum A C, igitur quarta quantitas innotescet, scilicet rectæ C D B, quæ æqualia sunt vni lateri Poligoni circumscripti duplo laterum numero, & ideo habebitur mensura totius Perimetri tum Poligoni inscripti, cum circumscripti, quare mensura ipsius peripheriæ circuli, quæ intermedia est, facili negotio inuestigabitur.

PROPOSITIO III.



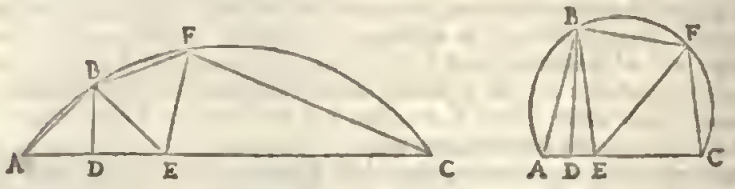
Sit C A segmentum circuli, & B punctum super illud vbicumque, & B D perpendicularis super A C, & segmentum D E æquale D A, & arcus B F æqualis arcui B A, vtique iuncta C F erit æqualis ipsi C E.

Demonstratio. Iungamus lineas A B, B F, F E, E B; & quia arcus B A æqualis est arcui B F, erit A B æqualis B F, & quia A D æqualis est E D, & duo anguli D sunt recti, & D B communis, ergo A B æqualis est B E, & propterea B F, B E sunt æquales; & duo anguli B F E, B E F sunt æquales. Et quia quadrilaterum C F B A est in circulo, erit angulus C F B cum angulo C A B ipsi opposito, immo cum angulo B E A, æqualis duobus rectis; sed angulus C E B cum angulo B E A, æquales sunt duobus rectis, ergo duo anguli C F B, C E B sunt æquales, & remanent C F E, C E F æquales; ergo C E æqualis est C F, & hoc est quod voluimus.

Notæ in Propositi. III.

Hæc est propos. 5. cap. 9. lib. 1. Almag. Ptol., sed hic vniuersalius pronunciatur; Ptolomeus enim supponit segmentum A B C semicirculum esse, & ex cognita circumferentia A F, & corda F C, & illius medietate A B, quærit chordam A B; est enim rectangulum sub C A D æquale quadrato ipsius

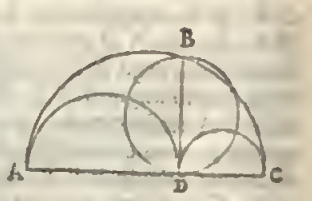
ipſius A B, eſtque nota A D medietas differentiæ inter diametrum A C, & chordam differentia F C; at propoſitio Archimedea verificatur in quolibet circuli ſegmento ſiue maiori, ſiue minori; ex datis enim circumferentijs A C, A B,



A F, & F C una cum cordis A C, & F C, haberi quidem poteſt chorda A B paulo difficilius, ſi nimirum ex chorda A C tollatur chorda F C, & differentia A E biſariam ſecetur in D, & ex arcu cognito B C datur angulus A, atque angulus D rectus eſt, ergo triangulum A B D ſpecie notum erit, & propterea proportio D A ad A B cognita erit, eſtque D A longitudine data, igitur A B longitudine innoteſcet.

Notandum eſt quod figura appoſita in hac propoſ. non exprimit omnes caſus propoſitionis, quandoquidem ſemicirculus eſt A B C, & propterea ex præcedentibus erroribus Arabici expoſitoris ſuſpicari licet non ritè eum percepiſſe Archimedis mentem.

PROPOSITIO IV.



A B C ſemicirculus, & fiant ſuper A C diametrum duo ſemicirculi, quorum vnus A D, alter vero D C, & D B perpendicularis, vtique figura proueniens, quam vocat Archimedes ARBELON, eſt ſuperficies comprehenſa ab arcu ſemicirculi maioris, & duabus circumferentijs ſemicirculorum minorum, eſt æqualis circulo, cuius diameter eſt perpendicularis D B.

Demonſtratio. Quia linea D B media proportionalis eſt inter duas lineas D A, D C, erit planum A D in D C æquale quadrato D B, & ponamus A D in D C cum duobus quadratis A D, D C communiter, fiet planum A D in D C bis cum duobus quadratis A D, D C, nempe quadratum A C, æquale duplo quadrati D B cum duobus quadratis A D, D C, & proportio circulorum eadem eſt, ac proportio quadratorum,

ergo

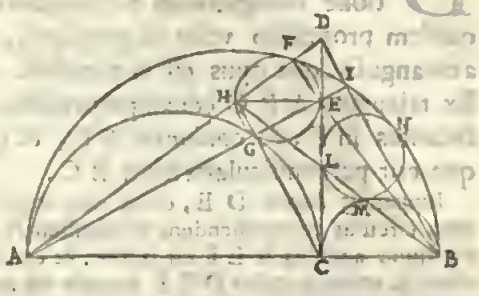
ergo circulus, cuius diameter est A C, æqualis est duplo circuli, cuius diameter est D B cum duobus circulis, quorum diametri sunt A D, D C, & semicirculus A C æqualis est circulo, cuius diameter est D B cum duobus semicirculis A D, D C; & auferamus duos semicirculos A D, D C communiter, remanet figura, quàm continent semicirculi A C, A D, D C, & est figura, quàm vocauit Archimedes Arbelos æqualis circulo, cuius diameter est D B, & hoc est quod voluimus.

Notæ in Propositi. IV.

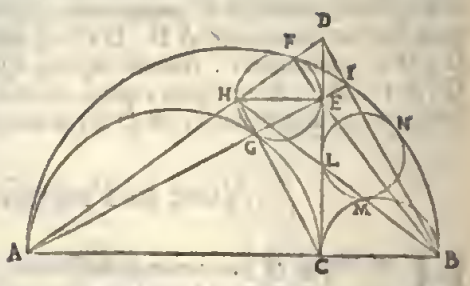
HAEc forsan est vna earum propositionum, quas Pappus legit in libro antiquo de mensura ARBELI, seu spatij à tribus semicircumferentijs circulorum comprehensi, vt ait Proclus, qua quidem elegantissima est, eiusque inuentionis Lunula Hyppocratis Chij originem extitisse puto; est enim Hyppocratis Lunula superficies plana à quadrante peripheria circuli maioris, & semisse peripheria circuli subdupli comprehensa; Arbelus vero recentiorum est spatium à triente, & à duobus sextantibus circumferentiarum trium circulorum aqualium comprehensum, & hisce duobus spatijs facile quadrata aqualia reperiri possunt; at Arbeli Archimedis, & Procli hucusque reperta non est quadratura; sed potest quidem assignari circulus pradicto spatio aqualis.

PROPOSITIO V.

SI fuerit semicirculus A B, & signatum fuerit in eius diametro punctum C vbicumque, & fiant super diametrum duo semicirculi A C, C B, & educatur ex C perpendicularis C D super A B, & describantur ad vtrasque partes duo circuli tangentes illam, & tangentes semicirculos, vtique illi duo circuli sunt æquales.



Demonstratio. Sit alter circulorum tangens D C in E, & semicirculum A B in F, & semicirculum A C in G, & educamus diametrũ H E, erit parallela diametro A B, eo quod duo anguli H E C, A C E, sunt recti, & iungamus F H, H A, ergo linea A F est recta, vti dictum est in propositione 1. & occurrent A F, C E in D, eo quod egrediuntur ab angulis A, C



A, C minoribus duobus rectis, & iungamus etiam F E, E B, ergo E F B est etiam recta, vti diximus, & est perpendicularis super A D, eo quod angulus A F B est rectus, quia cadit in semicirculum A B, & iungamus H G, G C, erit H C etiam recta; & iungamus E G, G A, erit E A recta, & producamus eam ad I, & iungamus B I, quæ sit etiam perpendicularis super A I; & iungamus D I; & quia A D, A B sunt duæ rectæ, & educta ex D ad lineam A B perpendicularis D C, & ex B ad D A perpendicularis B F; quæ se mutuo secant in E, & educta A E ad I est perpendicularis super B I, erunt B I D rectæ, quemadmodum ostendimus in Propositionibus, quas confecimus in expositione tractatus de triangulis rectangulis: & quia duo anguli A G C, A I B sunt recti, vtique B D, C G sunt parallelæ, & proportio A D ad D H, quæ est vt A C ad H E, est vt proportio A B ad B C, ergo rectangulum A C in C B æquale est rectangulo A B in H E; & similiter demonstratur in circulo L M N, quod rectangulum A C in C B æquale sit rectangulo A B in suam diametrum, & demonstratur inde etiam, quod duæ diametri circulorum E F G, L M N, sint æquales, ergo illi duo circuli sunt æquales. Et hoc est quod voluimus.

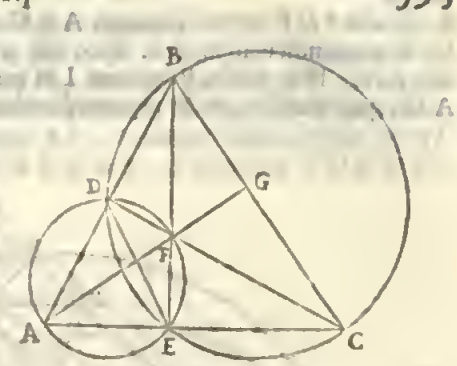
SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

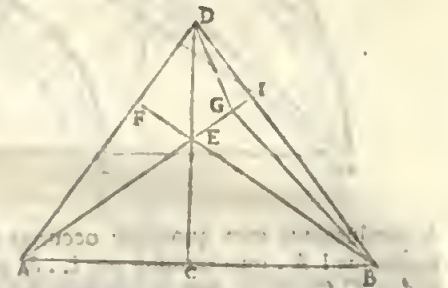
Dicit Doctor. Clarum quidem est quod citauit ex expositione triangulorum rectangulorum in præfatione; & est quidem propositio vtilis in principijs, ac præsertim in triangulis acutangulis, qua opus est in propos. 6. huius libri, & est hæc. Ex triangulo A B C eduxit perpendiculares B E, C D se mutuo secantes in F, & coniunxit A F, & produxit ad G, hæc vtique erit perpendicularis super B C.

Iungamus itaque D E, erunt duo anguli D A F, D E F æquales, quia circulus comprehendens triangulum A D F transit per punctum E, eo quod angulus A E F est rectus, & cadent in illo super eundem arcum, & etiam angulus D E B æqualis est angulo D C B, quia circulus continens triangulum B D C transit etiam per punctum E, ergo in duobus triangulis A B G, C B D sunt duo anguli B A G, B C D æquales;

& an-

& angulus B est communis, ergo A G B æqualis est angulo C D B recto, ergo A G est perpendicularis super B C. Hoc præmisso repetamus ex propos. quàm attulit Archimedes D A, A B, & perpendiculares D C, A I, B F, B I, & lineam D I. iam si B I D non fuerit linea recta, iungamus B G D rectam, erit angulus A G B rectus ex præmissa propositione, & erat angulus A I B rectus, ergo internus in triangulo B I G æqualis est opposito externo, & hoc est absurdum, igitur linea B I D est recta. Deinde attulit duas propositiones ex interpretatione Alkauhi, quarum prima est hæc.

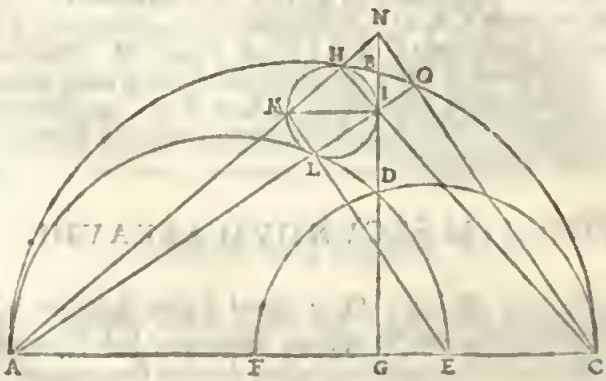




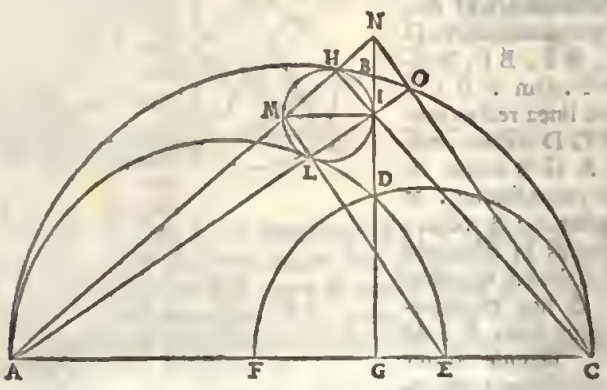
SCHOLIVM PRIMVM ALKAVHI.

SI non fuerint duo semicirculi tangentes, sed mutuo se secantes, & perpendicularis fuerit in loco mutuæ sectionis, idem sequitur.

Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F D C, & duo illi semicirculi se mutuo secantes in D, & B G perpendicularis super A C insistat,



& circulus I H L tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L, & perpendicularem in I. Dico esse æqualem circulo, qui est in altera parte. Hoc modo, Educamus I M parallelam ipsi A C, & iungamus A H, quæ transibit per M, quemadmodum demonstrauit Archimedes, Prop. 1. huius.



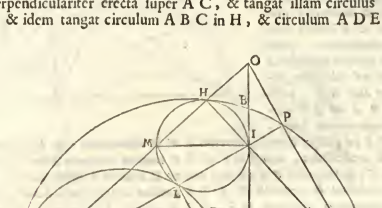
& producamus eam quousque occurrat perpendiculari N G in N, & iungamus I A, quæ transibit per L, & producamus illam ad O, & iungamus C O, O N, quæ erit linea recta, & iungamus M E, quæ transibit per L, & iungamus C H, quæ transibit per I; & linea C O N parallela est lineæ E M, & proportio A N ad N M, nempe proportio A G ad I M est vt C A ad C E, ergo rectangulum A G in C E æquale est rectangulo C A in I M; & quia G D est perpendicularis in duobus circulis C D F, E D A super duas diametros C F, E A, erit rectangulum C G in G F æquale quadrato G D, & rectangulum A G in G E æquale etiam est illi, ergo rectangulum C G in G F æquale est rectangulo A G in G E, & proportio C G ad G A est vt proportio E G ad G F, immo vt proportio C E ad F A residuam; ergo rectangulum C G in F A, est æquale rectangulo C A in I M cui æquale est rectangulum G A in C E. Et si fuerit in altera parte circulus modo præfato eadem ratione ostendemus, quod restangulum C A in diametrum illius circuli æquale sit rectangulo C G in A F, & ostendetur quod duæ diametri duorum circulorum sint æquales.

SCHOLIVM SECVNDVM ALKAVHI.

POrrò secunda est hæc. Dicit quod si duo semicirculi non sint tangentes, nec se mutuo secantes, sed separati, & perpendicularis transeat per concursum duarum linearum tangentium

tium eos, quæ sunt æquales idem sequetur.

Sint itaque semicirculi A B C, A D E, F G C, vti dispositum, & duæ lineæ N G, N D tangentes illos duos semicirculos in G, D, & æquales, sibique occurrentes in N, & linea B N transiens per punctum N perpendiculariter erecta super A C, & tangat illam circulus M N I in I, & idem tangat circulum A B C in H, & circulum A D E in L,



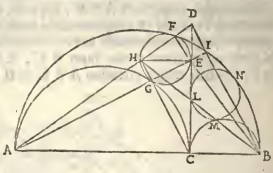
& educamus diametrum I M parallelam ipsi A C, & iungamus C H, quæ transibit per I, & iungamus M E transibit per L, & iungamus A I transibit per L, & producamus eam ad P, & iungamus C O transibit per P, eritque parallela ipsi E M, & erit proportio A O ad O M, nempe proportio A N ad M I vt proportio A C ad C E, & rectangulum A N in C E æquale rectangulo A C in I M. Et eodem modo ostendetur, quod rectangulum C N in F A sit æquale rectangulo A C in diametrum circuli, qui est ex altera parte; & quia rectangulum C N in N F æquale est quadrato G N, & est æquale quadrato D N, quod est æquale rectangulo A N in N E erit rectangulum C N in N F æquale rectangulo A N in N E, & proportio C N ad A N vt E N ad N F, & vt proportio totius C E ad totum A F, ergo rectangulum A N in C E æquale est rectangulo C N in F A, & iam ostensum est, quod A N in C E æquale est rectangulo A C in I M, & quod rectangulum C N in F A sit æquale rectangulo A C in diametrum alterius circuli: ergo duæ diametri sunt æquales, & duo circuli æquales, & hoc est quæsitum.

Prop. 1. huius. Ibidem. Scholium præc. Almoc.

Notæ in Propos. V.

HAEc *propositio parum quidem differt à postrema parte propos.* 14. 16. *& 17. lib.* 4. *Pappi Alex., si figuram, constructionem, & progressum demon-*

demonſtrationis ſpectes ; differunt tamen in concluſione , quæ demonſtranda proponitur ; oſtendit enim Pappus , ſicut , & Archimedes , ſemicircularis diametri ſegmentum maius A C ad circuli intercepti diametrum H E habere eandem proportionem , quàm maioris circuli diameter A B habet ad reliquum ſegmentum eius B C , pariterque B A ad A C eandem proportionem habet ,



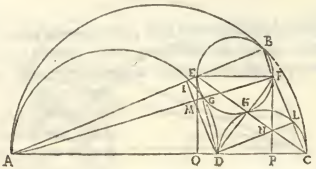
quàm C B ad reliqui circuli intercepti L M N diametrum : ex hiſce ſequitur concluſio Archimedea , nam ſi A C ad H E eandem rationem habet , quàm A B ad B C , permutando B A ad A C erit vt C B ad H E igitur eadem C B ad duas circulorum diametros H E , & L N eandem proportionem habet , & propterea circulorum diametri H E , & L N æquales ſunt inter ſe. Mirum tamen eſt hanc concluſionem , quàm præ manibus Pappus habebat , non animadvertiſſe , demonſtrat tamen quamplurima ſymptomata pulcherrima circulorum in Arbelo deſcriptorum , quæ tamen in hoc opuſculo Archimedi tributo pariter recenſeri debebant , ſi hic liber eſſet idem antiquus ille à Pappo viſus , in quo huiuſmodi lemmata circumferebantur : ſed forſan librariorum vitio , & incuria codex corruptiſſimus ad Arabes tranſmiſſus non omnes illas admirandas propoſitiones , ſed vnius tantum particulam continebat , ſicut è contra liber ille antiquus , in quo Pappus prædicta lemmata reperit , carebat concluſione in hiſce lemmatibus demonſtrata. Cæterum propoſitiones in ſcholijs additæ manifeſtæ quidem ſunt , ſed abſque duabus prioribus poſſet propoſitum facillimè demonſtrari , Reliqua dua propoſitiones ſuperadditæ ad Arabibus faciles quidem ſunt.

PROPOSITIO VI.

SI fuerit ſemicirculus A B C , & in eius diametro ſumatur punctum D , & fuerit A D ipſius D C ſexqui altera , & deſcribantur ſuper A D , D C duo ſemicirculi , & ponatur circulus E F inter tres ſemicirculos tangens eos , & educatur diameter E F in illo parallela diametro A C , reperiri debet proportio diametri A C ad diametrum E F.

Iungamus enim duas lineas A E , E B , & duas lineas C F , F B , erunt C B , A B rectæ , vti dictũ eſt in prima propoſit. Deſcribamus etiam duas lineas F G A , E H C , oſtendeturque eſſe quoque rectas ; Similiter duas lineas D E , D F , & iungamus D I , D L , & E M , F N , & producamus eas ad O , P ; Et quia in triangulo A E D , A G eſt perpendi-

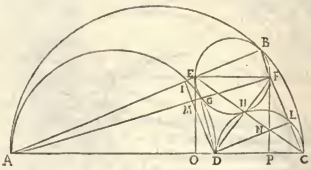
pendicularis ad E D, & D I est quoque perpendicularis ad A E, & iam se mutuo secuerunt in M, ergo E M O erit etiam perpendicularis, quemadmodum ostendimus in expositione, quàm confecimus de proprietatibus triangulorum, & cuius demonstratio iam quidem præcessit in superiori propositione; Similiter quoque erit F P perpendicularis super C A, & quia duo anguli, qui sunt apud L, & B sunt recti, erit D L parallela ipsi A B, & pariter D I ipsi C B, igitur proportio A D ad D C est vt proportio A M ad F M, immo vt proportio A O ad O P, & proportio C D ad D A vt proportio C N ad N E, immo vt proportio C P ad P O, & erat A D sexquialtera D C, ergo A O est sexquialtera O P, & O P sexquialtera C P, ergo tres lineæ A O, O P, P C sunt proportionales: & in eadem mensura, in qua est P C quatuor, erit O P sex, & A O nouem, & C A nouendecim, & quia P O æqualis est E F, erit proportio A C ad E F vt nouendecim ad sex, igitur reperimus dictam proportionem. Etiam si fuerit A D ad D C qualiscumque vt sexquitertia, aut sexquiquarta, aut alia, erit iudicium, & ratio, vti dictum est. Et hoc est quod voluimus.



Notæ in Propos. VI.

HAEc propositio nil prorsus differre videtur à 16. propos. lib. 4. Pappi Alex. est tamen pars illius, & particulariter demonstrata, quod quidem peccatum alicui expositori tribui debet; nunquam enim Archimedes propositionẽ illam, quam vniuersalissimè demonstrare potuisset, exemplis numericis tam pueriliter ostendisset. Pappus igitur quærit mensuram diametri illius circuli, qui in loco inter tres circunferentias circulares interyicitur, quod Arbelon appellatur, & ostendit quidem diametrum semicirculi maioris A C secari in duobus punctis O, & P à perpendicularibus cadentibus à terminis E, & F diametri circuli in Arbelo inscripti, ac diuidi in tria segmenta A O, O P, P C continue proportionalia in eadem ratione, quàm habet A D ad D C, & insuper

ſuper oſtendit perpendicularem E O æqualem eſſe circuli diametro E F. Itaque in quadrato ſpatio E O P F, circuli diameter E F, ſiue O P media proportionalis erit inter A O, & P C. Quam ergo proportionem habent tres continuè proportionales in eadem ratione A D ad D C ſimul ſumpta ad illarum inter-



mediam, eandem habebit diameter maioris ſemicirculi A C ad O P, ſiue E F. Quæ deinde Pappus demonſtrat perpendiculares à centris circulorum in collateralibus ſpatijs prædicti Arbeli exiſtentium eſſe multiplices diametrorum eorum circulorum à quibus educuntur ſecundum ſeriem naturalem numerorum ab vnitate creſcentium, proprietas quidem eſt admirabilis, de qua in hac propoſitione Archimedis altum ſilentium, quod forte temporum iniuria tribuendum eſt.

Poſſent in hiſce duabus propoſitionibus non pauca problemata ſuperaddi, quomodo nimirum in prædicto ſpatio à tribus ſemicirculis comprehenſo circuli innumerabiles deſcribi debeant, & alia quamplurima facilia, quæ lectorum ſagacitati relinquuntur.

PROPOSITIO VII.

SI circulus circa quadratum deſcriptus fuerit, & alius intra illum, vtique erit circumſcriptus duplus inſcripti.

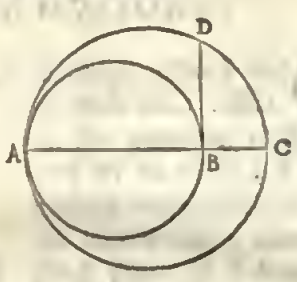
Sit itaque circulus comprehendens quadratum A B, circulus A B, & inſcriptus C D, & ſit diameter quadrati A B, & eſt diameter circuli circumſcripti, & educamus C D diametrum circuli inſcripti parallelam ipſi A E, quæ eſt ei æqualis. Et quia quadratum A B duplum eſt quadrati A E, ſiue D C, & proportio quadratorum ex dia-

metris

metris circulorum est eadem proportioni circuli ad circulum, igitur circulus A B duplus est circuli C D, & hoc est quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtasso. Iam composui tractatum de conficiendo circulo, cuius proportio ad datum circulum sit vt proportio data. Qua ratione conficiendæ sunt omnes figuræ rectilineæ, & quem vsum habeant in arte illæ figuræ, & afferam hic ex illis vnam propositionem, quæ cõgruit expositioni huius propositionis, & est tanquam epitome illarum propositionum, & illationis ex illis, & est hæc. Volumus conficere circulum, qui sit quinta pars circuli, exempli gratia.



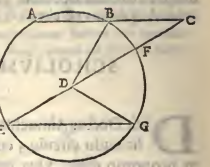
Circulus cuius habemus diametrum est A B, & addamus eius partem quintam, & est B C, & describamus super A C semicirculum A D C, & educamus perpendicularem B D, & quia proportio A B ad B C est, vt proportio quadrati A B ad quadratum B D, erit quilibet circulus factus, vel, figura super B D quæsita à nobis, & hoc, quia proportio circuli, qui est super A B, vel figuræ, quæ est super illam, ad circulum, vel figuram factam super B D facit illam figuram, & similiter positam, erit vt proportio A B ad B C, & hoc est quod voluimus.

PROPOSITIO VIII.

SI egrediatur in circulo linea A B vbicumque, & producatur in directum, & ponatur B C æqualis semidiametro circuli & iungatur ex C ad centrum circuli, quod est D, & producatur ad E, erit arcus A E triplus arcus B F.

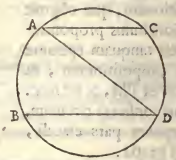
Educa-

Educamus igitur E G parallelam ipſi A B, & iungamus D B, D G: & quia duo anguli D E G, D G E ſunt æquales, erit angulus G D C duplus anguli D E G, & quia angulus B D C æqualis eſt angulo B C D, & angulus C E G æqualis eſt angulo A C E, erit angulus G D C duplus anguli C D B, & totus angulus B D G triplus anguli B D C, & arcus B G æqualis arcui A E, triplus eſt arcus B F, & hoc eſt, quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

Dicit Doctor Almochtaſſo. Cum dicit arcum B G æqualem eſſe arcui A E, id ex eo eſt propter æquidiſtantiam duarum cordarum. Sint itaque in circulo A B C cordæ A C, B D parallelæ; Dico quod duo arcus A B, C D ſunt æquales,

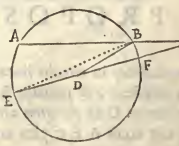


Iungamus A D, ergo duo anguli C A D, A D B ſunt æquales; & propterea duo arcus ſunt æquales, & conuerſum eodem modo demonſtratur.

Notæ in Propoſit. VIII.

HAEc quidem propoſitio elegantiſſima eſt, quæ ſi problematicè reſolui poſſet via plana, reperta iam eſſet tripartitio cuiuſlibet anguli.

Breuius tamen demonſtratio perfici poteſt hac ratione. Iuncta recta E B, quia in triangulo Iſoſcele B D C duo anguli C, & C D B æquales ſunt, eſtque pariter externus angulus B D C duplus anguli D E B in triangulo Iſoſcelio D E B, ergo angulus C duplus eſt anguli B E C, & propterea illi anguli ſimul ſumpti, ſeu externus angulus A B E triplus erit anguli B E F, & circunferentia A E tripla ipſius B F.

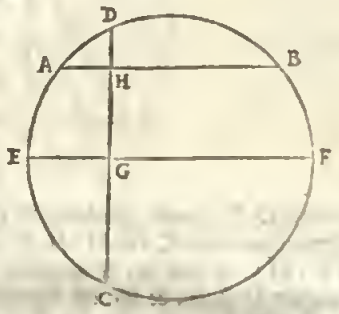


PRO-

PROPOSITIO IX.

SI mutuo se secuerint in circulo duæ lineæ A B, C D, (sed non in centro) ad angulos rectos, vtique duo arcus A D, C B sunt æquales duobus arcubus A C, D B.

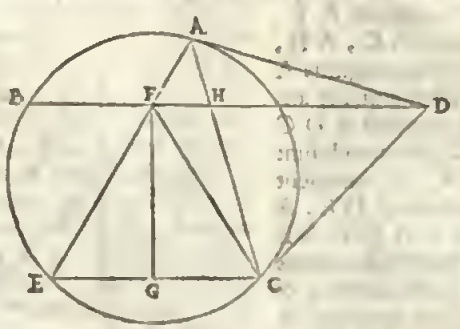
Educamus diametrum E F parallelam ipsi A B, quæ secet C D bifariam in G, erit E C æqualis ipsi E D; & quia tam arcus E D F, quam E C F est semicirculus, & arcus E D æqualis arcui E A cum arcu A D, erit arcus C F cum duobus arcubus E A, A D æqualis semicirculo, & arcus E A æqualis arcui B F, ergo arcus C B cum arcu A D æqualis est semicirculo, & remanent duo arcus E C, E A nempe arcus A C cum arcu D B æquales illi, & hoc est quod voluimus.



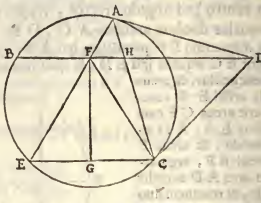
PROPOSITIO X.

SI fuerit circulus A B C, & D A tangens illum, & D B secans illum, & D C etiam tangens, & ducta fuerit C E parallela ipsi D B, & iuncta fuerit E A secans D B in F, & ducta fuerit ex F perpendicularis F G super C E; vtique bifariam secabit illam in G.

Iungamus A C, & quia D A est tangens, & A C secans circulum erit angulus D A C æqualis angulo cadenti in alterno segmento A C



nempe angulo A E C, & est æqualis angulo A F D, eo quod C E, B D sunt parallelæ, ergo anguli D A C, A F D sunt æquales, & in duobus triangulis D A F, A H D sunt duo anguli A F D, H A D æquales, & angulus D communis, propterea erit rectángulum F D in D H æquale

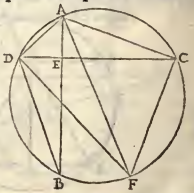


quadrato D A, immo quadrato D C, & quia proportio F D ad D C est eadem proportioni C D ad D H, & angulus D communis, erunt triangula D F C, D C H similia, & angulus D F C æqualis D C H, qui æqualis est angulo D A H, & hic est æqualis angulo A F D, ergo duo anguli A F D, C F D sunt æquales, & D F C æqualis angulo F C E, & erat D F A æqualis angulo A E C, ergo in triangulo F E C sunt duo anguli C, E æquales, & duo anguli G recti, & latus G F commune, propterea erit C G æqualis ipsi G E, ergo C E bifariam secatur in G, & hoc est, quod voluimus.

PROPOSITIO XI.

SI mutuo se secuerint in circulo duæ lineæ A B, C D ad angulos rectos in E, quod non sit in centro, vtique omnia quadrata A E, B E, E C, E D æqualia sunt quadrato diametri.

Educamus diametrum A F, & iungamus lineas A C, A D, C F, D B; Et quia angulus A E D est rectus, erit æqualis angulo A C F, & angulus A D C æqualis A F C, eo quod sunt super arcum A C, & remanent in duobus triangulis A D E, A F C duo anguli C A F, D A E æquales erunt pariter duo arcus C F, D B æquales immo, & duæ cordæ eorum æquales, & duo quadrata D E, E B æquantur

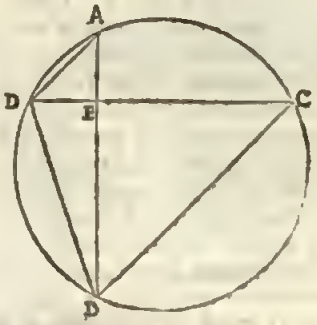


quadrato B D, nempe C F, & duo quadrata

quadrata A E, E C æquantur quadrato C A, & duo quadrata C F, C A æquantur quadrato F A, nempe diametri, igitur quadrata A E, E B, C E, E D omnia sunt æqualia quadrato diametri, & hoc est quod voluimus.

SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

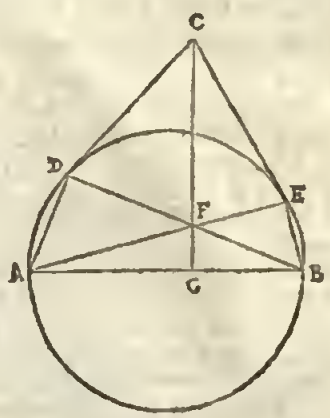
Dicit Doctor. Huius est alia facilior demonstratio ea, quam attulit Archimedes; quæ est huiusmodi. Iungamus A D, C B, B D; & quia angulus B E D est rectus, erunt duo anguli E B D, E D B æquales vni recto, & duo A D, B C, æquales semicirculo, ergo duæ cordæ eorum in potentia sunt æquales diametro; sed duo quadrata A E, D E æqualia quadrato A D, & duo quadrata C E, B E sunt æqualia quadrato C B, ergo quadrata A E, E B, C E, E D æqualia sunt quadrato diametri; & hoc est quod voluimus.



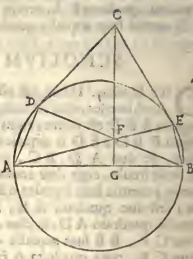
PROPOSITIO XII.

SI fuerit semicirculus super diametrum A B, & eductæ fuerint ex C duæ lineæ tangentes illum in duobus punctis D, E, & iunctæ fuerint E A, D B se muto secantes in F, & iuncta fuerit C F, & producatur ad G, erit C G perpendicularis ad A B.

Iungamus D A, E B. Et quia angulus B D A est rectus, erunt duo anguli D A B, D B A reliqui in triangulo D A B æquales vni recto, & angulus A E B rectus, igitur sunt æquales ei, & ponamus angulum F B E communem, ambo anguli D A B, A B E sunt æquales F B E, F E B, immo angulo D F E externo in F B E. Et quia C D est tangens circulum, & D B secans illum, angulus C D B æquatur angulo D A B, & pariter angulus C E F æquatur angulo E B A, ergo duo anguli C E F, C D F simul æquales sunt angulo D F E. Et iam quidem planum fit ex nostro tractatu de figuris quadrilateris, quod si educan-



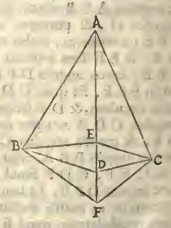
tur inter duas lineas æquales sibi occurrentes in aliquo puncto, vti sunt duæ lineæ C D, C E, duæ lineæ se mutuo secantes, vti sunt duæ lineæ D F, E F, & fuerit angulus ab illis contentus vt est angulus F æqualis duobus angulis, qui occurrunt duabus [lineis] se inuicem secantibus, vti sunt duo anguli E, D simul, erit linea egrediens à puncto concursus ad punctum sectionis, vti est linea C F æqualis cuilibet linearum sibi occurrentium, vt C D, vel C E, propterea erit C F æqualis ipsi C D, ergo angulus C F D est æqualis angulo C D F, nempe angulo D A G, sed angulus C F D cum angulo D F G est æqualis duobus rectis, ergo angulus D A G cum angulo D F G æqualis est duobus rectis, & remanent in quadrilatero A D F G duo anguli A D F, A G F æquales duobus rectis, sed angulus A D B rectus est, ergo angulus A G C est rectus, & C G perpendicularis ad A B, & hoc est quod voluimus.



SCHOLIVM ALMOCHTASSO.

DIcit Doctor de demonstratione, quàm citat ex tractatu de figuris quadrilateris. Sint duæ lineæ æquales sibi occurrentes A B, A C, & punctum concursus A, & se inuicem secantes B D, D C, & punctum sectionis D, & sit angulus B D C æqualis duobus angulis A B D, A C D, & iungamus A D; Dico quod sit æqualis A B.

Alioquin vel est minor A B, vel maior illa, & sit maior, & abscindatur A E æqualis A B, & iungamus B E, ergo duo anguli A E B, A B E sunt æquales; sed angulus A E B maior est angulo A D B, & pariter angulus A E C, qui est æqualis A C E maior est angulo A D C, omnes ergo anguli B E C, vel duo anguli simul A B E, B C E maiores sunt duobus angulis A B D, A C D, pars suo toto, quod est absurdum. Deinde sit A D minor quàm A B, & ponamus A F æqualem A B, & iungamus B F, F C, remanet, vt dictum est, quod angulus F,



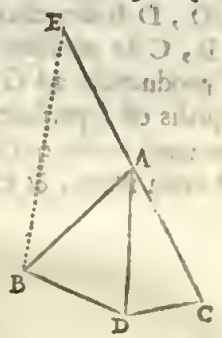
immo

immo duo anguli A B F, A C F minores sint duobus angulis A B D, A C D, totum sua parte, & hoc est absurdum, ergo manet propositum.

Notæ in Propositi. XII.

Lemma assumptum in demonstratione huius pulcherrimæ propositionis potest directè ostendi hac ratione.

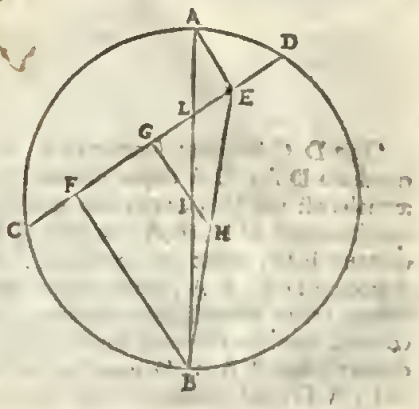
Si in quadrilatero A C D B duo latera A C, & A B æqualia fuerint, atque angulus C D B æqualis duobus angulis C, & B simul sumptis. Dico rectam A D ipsi A C, vel A B æqualem esse. Producatur C A, in E, vt A E fiat æqualis A B, iungaturque B E. Quia in triangulo Isoscelio B A E angulus E æqualis est angulo A B E, & angulus C D B æqualis est duobus angulis C, & D B A simul sumptis, ergo duo anguli C D B, & E (oppositi in quadrilatero C D B E) æquales sunt tribus angulis C, D B A, & A B E, siu duobus angulis C, & D B E, sed quatuor anguli quadrilateri E C D B æquales sunt quatuor rectis, ergo duo anguli oppositi E, C D B duobus rectis æquales sunt, & propterea quadrilaterum ipsum circulo inscribi potest, cuius circuli centrum erit A, cum tres rectæ lineæ C A, A B, A E æquales positæ sint, & propterea A D radius quoque circuli erit æqualis ipsi C A.



PROPOSITIO XIII.

SI mutuo se secent duæ lineæ A B, C D in circulo, & fuerit A B diameter illius, at non C D, & educantur ex duobus punctis A, B duæ perpendiculares ad C D, quæ sint A E, B F, vtique abscindent ex illa C F, D E æquales.

Iungamus E B, & educamus ex I, quod est centrum, perpendicularem I G super C D, & producamus eam ad H in E B. Et quia I G est perpendicularis ex centro ad C D illam bifariam diuidet in G, & quia I G, A E sunt duæ perpendiculares super illam, erunt paral-



lelæ.

lelæ, & quia B I æqualis est I A, erit B H æqualis ipsi H E, & propter earum æqualitatem, & quia B F est parallela ipsi H G, erit F G æqualis ipsi G E, & ex G C, G D æqualibus remanent F C, E D æquales. Et hoc est quod voluimus.

PROPOSITIO XIV.

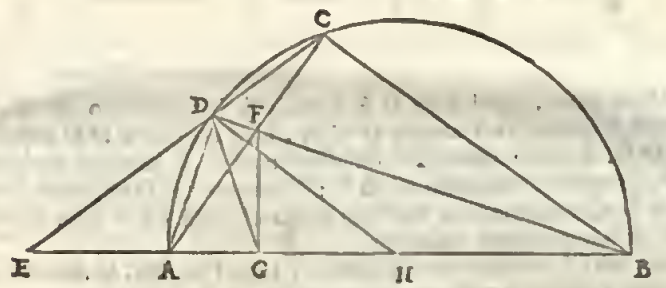
SI fuerit A B semicirculus, & ex eius diametro A B dissectæ sint A C, B D æquales, & efficiantur super lineas A C, C D, D B semicirculi; & sit centrum duorum semicirculorum A B, C D punctum E, & sit E F perpendicularis super A B, & producatur ad G: vtique circulus, cuius diameter est F G æqualis est superficiei contentæ à semicirculo maiori, & à duobus semicirculis qui sunt intra illum, & à semicirculo medio qui est extra illum, & est figura, quam vocat Archimedes Salinon.

Quia D C bifariam secatur in E, & addita est illi C A, erunt duo quadrata D A, C A dupla duorum quadratorum D E, E A, sed F G æqualis est ipsi D A, ergo duo quadrata F G, A C dupla sunt duorum quadratorum D E, E A: & quia A B dupla est A E, & C D dupla quoque E D, erunt duo quadrata A B, D C quadrupla duorum quadratorum D E, E A, immo dupla duorum quadratorum G F, A C similiter etiam duo circuli, quorum diametri sunt A B, D C dupli sunt eorum, quorum diametri sunt G F, A C, & dimidij eorum, quorum diametri sunt A B, C D æquales duobus circulis, quorum diametri sunt G F, A C, sed circulus, cuius diameter A C, est æqualis duobus semicirculis

micirculis A C, B D, ergo si auferamus ex illis duos semicirculos A C, B D, qui sunt communes, remanet figura contenta à quatuor semicirculis A B, C D, D B, A C, (quæ ea est, quàm vocat Archimedes Salinon) æqualis circulo, cuius diameter est F G, & hoc est quod voluimus.

PROPOSITIO XV.

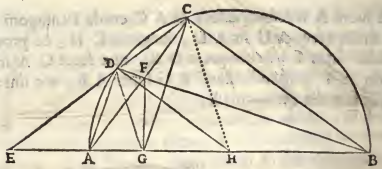
SI fuerit A B semicirculus, & A C corda Pentagoni, & semissis arcus A C sit A D, iungatur C D, & producatur vt cadat super E, & iungatur D B, quæ secet C A in F, & ducatur ex F perpendicularis F G super A B, erit linea E G æqualis semidiametro circuli.



Iungamus itaque lineam C B, & sit centrum H, & iungamus H D, D G, & A D. Et quia angulus A B C, cuius basis est latus Pentagoni, est duæ quintæ partes recti, quilibet duorum angulorum C B D, D B A est quinta pars recti, & angulus D H A duplus est anguli D B H, ergo angulus D H A est duæ quintæ partes recti. Et quia in duobus triangulis C B F, G B F duo anguli B sunt æquales, & G, C recti, & latus F B commune, erit B C æquale ipsi B G: & quia in duobus triangulis C B D, G B D duo lateta C B, B G sunt æqualia, & similiter duo anguli ad B, & latus B D commune, erunt duo anguli B C D, B G D æquales, & quilibet eorum est sex quintæ partes recti, & est æqualis angulo D A E externo quadrilateri B A D C, quod est in circulo, ergo remanet angulus D A B æqualis angulo D G A, & erit D A æqualis ipsi D G. Et quia angulus D H G est duæ quintæ partes recti, & angulus D G H sex quintæ partes recti, remanet angulus H D G duæ quintæ partes recti, & erit D G æqualis G H. Et quia A D E externus quadrilateri A D C B, quod est in circulo, est æqualis angulo C B A, & est

duæ

duæ quintæ partes recti, & æqualis angulo G D H. Et quia in duobus triangulis E D A, H D G sunt duo anguli E D A, H D G æquales, & pariter duo anguli D G H, D A E, & duo latera D A, D G, erit E A æquale H G, & ponamus A G commune, erit E G æquale A H, & hoc est quod voluimus,



Et hinc patet, quod linea D E æqualis sit semidiametro circuli, quia angulus A æqualis est angulo D G H, ideo erit linea D H æqualis lineæ D E. Et dico quod E C diuiditur media, & extrema proportione in D, & maius segmentum est D E: & hoc quia E D est corda hexagoni, & D C decagoni, & hoc iam demonstratum est in libro elementorum, & hoc est quod voluimus.

Impie vt Mahumetanus Paraphrastes loquitur.

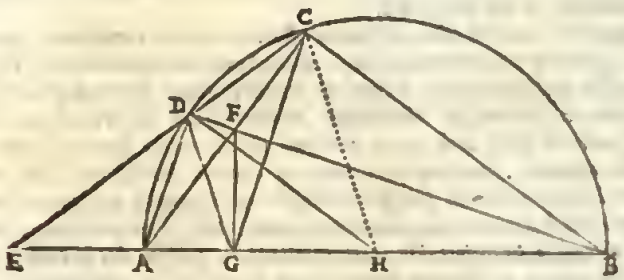
Finis libri Assumptorum Archimedis. Laus Deo soli, & orationes eius sint super Dominum nostrum Mahometum, & suos socios.

Notæ in Propositi. XV.

EX hac propositione non pauca colligi possunt; Si enim coniungantur rectæ lineæ C H, & C G, erit triangulum R C E isosceles simile triangulo H D E, & similiter positum; pariterque triangulum H C G simile quidem, erit ipsi G D A, & in vtrisque bases similiter secantur, nam angulus B C E in tres partes aquales diuiditur à rectis lineis H C, & G C, quarum qualibet duæ quintæ partes est vnius recti, atque angulus E C G rursus bifariam diuiditur à recta C A; non secus tres anguli E D A, A D G, & G D H æquales sunt inter se, atque quilibet eorum duæ quintæ vnius recti. Et efficiuntur quatuor rectæ lineæ E A, A D, D G, D C, inter se, & lateri decagoni regularis circulo inscripti æquales. Pari modo rectæ lineæ E D, E G, G C, H C, H A, æquales sunt inter se, & lateri hexagoni regularis circulo inscripti. Tandem recta linea C B subtendens tres partes decimas circumferentiæ totius circuli æqualis est rectæ lineæ C E, scilicet compositæ ex latere hexagoni, & latere decagoni regularium eidem circulo inscriptorum. Praterea

recta

recta linea E G ſecatur in A extrema, ac media ratione, cuius maius ſegmentum eſt E A latus decagoni, & recta A H ſimiliter diuiditur in G, cuius maius ſegmentum eſt G H decagoni latus, & tota E H ſecatur in A; & G extrema, ac media ratione, pariterque recta E B ſimiliter ſecatur in H, cuius



minus ſegmentum H B eſt aquale lateri exagoni circulo inſcripti. Breuius tamen propoſitio ſic demonſtrari poſſet.

Quia oſtenſa eſt C D aqualis D G, & A D aqualis eſt eidem D C; cum ambo ſint latera decagoni, ergo D G aqualis eſt D A. Poſtea iuncta A C, quia angulus A H D, vel C H D quinta pars eſt duorum rectorum, ergo angulus C D H ad baſim iſoſceliȝ, duæ quinta partes erit duorum rectorum, & ideo angulus C D H duplus erit anguli D H E, eſtque externus angulus C D H aqualis duobus internis, & oppoſitis D H E, & D E H in triangulo D E H, ergo angulus C D H duplus quoque erit reliqui anguli E, & propterea angulus D H E aqualis erit angulo E, & ſubtenſa latera D E, D H aqualia quoque erunt, ſed prius D A, D G aqualia erant ſubtendentia angulos aquales, & reliqui anguli eiuſdem ſpeciei ſunt, igitur E A aqualis eſt H G. Reliqua manifeſta ſunt.

In prafatione huius operis memini non eſſe omnino improbabile hunc libellum Archimedis non alium fuiſſe ab illo antiquo lemmatum libro ab Eutocio reperto, quod præcipuè ex verbis eiuſdem Eutocij in Comment. propoſit. 4. lib. 2. de Sphæra, & Cylindro comprobatum fuit: illa fideliſſimè translata ex textu Græco ab amicis doctiſſimis cum iam in prafatione excuſa eſſent aliam tranſlationem ex Arabico Manuſcripto Sereniſſimi Magni Ducis miſit Excell. Abrahamus Ecchellenſis deſumptam ex editione Abuſahli Alkuhi qui pariter librum ordinationis lemmatum Archimedis conſcripſit, ve in procmio huius operis teſtatur Almochtaſſo. Verba eius ſunt hæc, qua paulò clarius propoſitum confirmare videntur: & meminit Eutocius Aſcalonita in Comment. huius libri, quod Archimedes promiſerit demonſtrationem huius in hoc ſuo libro, quod in nullo exemplari reperitur, quod promiſit. Atque ita vnuſquiſque tam Dyoniſodorus, quàm Diocles poſt illum progreſſus eſt per aliam viam, quàm ille (ſcilicet Archimedes) in hoc libro in diuiſione Sphæræ in duas partes, quæ datam habeant proportionem. Dixit, & ego reperi in

Veteri Libro Theoremata satis obscura propter multitudinem errorum, qui in eo sunt, nec non menda, quæ occurrunt in figuris propter ignorantiam amanuensium, crantque in eo Doricæ dictiones, quarum vsus Archimedi familiaris erat, & vocabula ipsi propria; hinc vtebatur loco sectionum parabolæ, & hyperbolæ, rectanguli, & obtusanguli coni sectionibus quamobrem operam ipsi nauaui, donec assecutus sum istam propositionem, & est ista, &c.

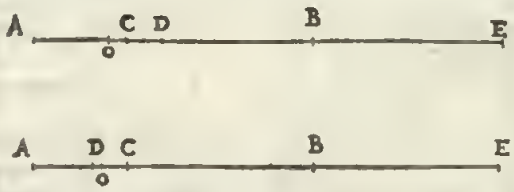
Modo quia in prædicto libro antiquo ab Eutocio reperto recensentur duæ propositiones, quarum vnam promiserat se demonstraturum Archimedes, & vtraque in nostro opusculo iniuria temporum deficit: earum altera forsan erit 16. illa propositio in proœmio ab Almochtasso numerata vbi ait propositiones huius opusculi sexdecim esse, cum tamen postrema sit 15. quare inutile forsan non erit eas hic reponere, præcipuè quia Eutocius non rite eas restituit, nec omninò repurgauit à mendis, quibus scatebat exemplar antiquum ab ipso inuentum. Et primo noto, quod Eutocius eas vocat theorematα, cum potius problemata sint, & sic etiam ab eodem Eutocio postmodum appellantur. Forsan hoc accidit, quia in libro illo antiquo in formam theorematum scripta erant, sed Eutocius vt ad propositionem Archimedis ea accomodaret, forma problematica ea exposuit. Rursus Eutocius primum theorema se expositurum pollicetur, vt deinde analysi problematis Archimedei accomodetur. Vnde conijcere licet alterum theorema additum, vel alteratum ab Eutocio, vel ab aliquo alio fuisse, in quo proponit, quod, si aliqua recta linea secta sit in duo segmenta, quorum vnum duplum sit alterius, solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato maioris, & sub minore segmento maximum erit omnium similium solidorum, quæ ex diuisione eiusdem rectæ lineæ in quolibet alio eius puncto consurgunt. Et hoc quidem ostenditur per sectiones conicas, contra artis præcepta; peccatum enim est non paruum apud Geometras, problema planum per conicas sectiones resoluere cum via plana absolui possit, hoc autem preclari nonnulli viri pariter adnotarunt, & præstiterunt, vt nuper accepi.

PROPOSITIO XVI.

SI recta linea A B sit tripla A C, non vero tripla ipsius A D; Dico parallelepipedum rectangulũ contentum sub quadrato C B in A C maius esse parallelepipedo sub quadrato D B in A D.

Producatur A B in E, vt sit B E æqualis B C. Quoniam B C dupla erat ipsius A C, erit E C quadrupla ipsius A C, & propterea rectangulum A C E æquale erit quadruplo quadrati A C, scilicet æquale erit quadrato C B: Est vero in primo casu, rectangulum A D E maius rectangulo A C E, in secundo vero minus, (eo quod punctum D in primo casu propinquius est semipartitioni totius A E, quam C, in secuudo verò remotius); igitur si fiat C D ad D O, vt quadratum C B ad rectangulum

gulum A D E, erit in primo casu D O maior, quàm C D, in secundo vero minor; & propterea A O minor erit, quàm A C in vtroque casu. Et quia quadratum C B ad rectangulum A D E est vt C D ad D O, igitur solida parallelepipeda reciproca erunt æqualia, scilicet solidum qua-



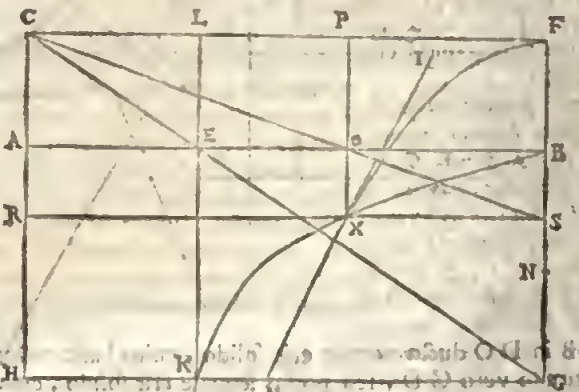
drato C B in D O ducto æquale erit solido, cuius basis rectangulum A D E, altitudo vero C D, seu potius æquale erit solido, cuius basis rectangulum E D C, altitudo vero A D, & propterea vt quadratum B C ad rectangulum E D C, ita erit reciproce A D ad D O, & comparando antecedentes ad terminorum differentias in primo casu, & ad eorundem summas in secundo casu, erit quadratum B C ad quadratum D B vt A D ad A O, & denno solidum parallelepipedum rectangulum contentum sub quadrato B C in A O æquale erit ei, cuius basis quadratum D B, altitudo vero A D: Est vero A O ostensa minor, quàm A C in vtroque casu, igitur parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est eo, cuius basis est idem quadratum B C, altitudo A O; ideoque parallelepipedum, cuius basis quadratum B C, altitudo A C maius est quolibet parallelepipedo, cuius basis quadratum B D, altitudo A D: quare patet propositum.

PROPOSITIO XVII.

SIt A B tripla ipsius A E, maior vero quàm tripla alterius C A, secari debet eadem A B citra, & vltra E, in O, ita vt parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale sit parallelepipedo, cuius basis quadratum E B, altitudo A C.

Fiat rectangulum A C B F, & producantur latera C A, F B, & fiat rectangulum C F N æquale quadrato E B, & ducta diametro C E G com-

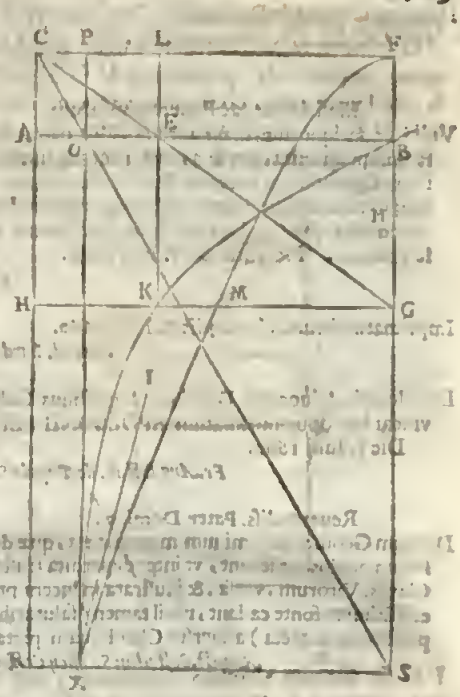
Prop.52. lib.1. plicantur parallelogramma rectangula A L, A K, L B, B K, atque axe F G, latere recto F N describatur parabole F M secans H G in M; erit
Prop.11. lib.1. igitur in parabola quadratum M G æquale rectangulo G F N sub abscissa, & latere recto contento, ideoque idem quadratum F G ad rectangulum N F G, atque ad quadratum M G eandem proportionem habebit: est vero quadratum F G ad rectangulum N F G, vt F G ad F N, cum



F G sit illorum altitudo communis, nec non vt C F G ad C F N sumpta nimirum C F communi altitudine, ergo rectangulum C F G ad C F N eandem proportionem habebit, quam quadratum F G ad quadratum M G, & permutando rectangulum C F G ad quadratum F G erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, sed vt rectangulum C F G ad quadratum F G, ita est C P ad F G, & E A ad A C, igitur E A ad A C erit vt rectangulum C F N ad quadratum G M, seu vt quadratum E B, vel K G ad quadratum G M: est vero A C minor, quam A E, quæ triens est totius A B, igitur M G minor est, quam G K. Postea
Prop.4. & 12. lib.2. per B circa asymptotos A C F describatur hyperbole B K, quæ transibit per punctum K, cum parallelogramma A F, & C K æqualia sint propter diagonalem C E G, quare punctum M paraboles cadet intra hyperbolem B K, sed parabole F M occurrit asymptoto C F in vertice F, & occurrit etiam asymptoto C A in aliquo alio puncto, cum C
Prop.26. lib.1. A sit parallela axi F G paraboles, & hyperbole semper intra asymptotos incedat, igitur parabola F M bis hyperbolæ occurrit supra, & infra punex 1.& 2. lib.2. ctum M: sint occursus X, à quibus ductis parallelis ad asymptotos complicantur parallelogramma R P, & A F, quæ erunt æqualia inter asymptotos, & hyperbolen constituta, & propterea C O S parallelogrammo-
Prop.19. lib.2. rum diameter erit, & vna linea recta: & quia O A ad A C est vt C F ad F S, sic vt rectangulum C F N ad rectangulum S F N: erat autem quadratum E B æquale rectangulo C F N ex constructione, & quadra-

tum

tũ O B, siue X S in parabola æquale est rectangulo S F N, ergo A O ad A C est vt quadratum E B ad quadratum O B, & propterea parallelepipedum, cuius basis quadratum O B, altitudo O A æquale erit parallelepipedo basi quadrato E B, altitudine A C contento, quod erat propositum.



Prop. 11. lib. 1.

Ex hisce propositionibus deducit insuper Eutocius aliqua, quæ non omnino firma, & certa mihi videntur, nam ex eo quod recta linea vt L X tangis vtramq; coniectionem (hyperbolen scilicet B X, & parabolen F X) in eodem puncto X concludit hyperbolen interius contingere parabolen quàm deinceps non secat ad easdem partes axis illius. Hoc autem omnino necessarium nõ est ex demonstratis à me in prop. 20. 21. & 22. Addit. lib. 6. Apoll. fieri enim potest, vt Parabole exterius hyperbolen tangat in X, & postea hinc inde eam secet, Potest insuper hyperbole secare eandem parabolam in eodem puncto X, licet ambo in eodem puncto tangantur ab aliqua recta linea, vt est L X, quod quidem admotasse fuit operepretium.

FINIS

Dominus Carolus de Datis videat, & referat an in hoc opere sit aliquid quod repugnet fidei Catholicæ, & bonis moribus. Die 3. Iulij 1660.

Vinc. de Bardis Vicar. Gener. Florent.

Illustrissime, ac Reuerendiss. Dom.

Vidi hæc antiquorum, maximorumq; Geometrarum Apollonij, atq; Archimedis Opera nunquam edita, nec in ijs reperi aliquid fidei Catholicæ, & bonis moribus aduersum; Quamobrem maximo Reip. literariæ bono, & gloria eorum qui in ijs vertendis, atq; illustrandis studium, atque operam felicissimè collocarunt euulganda censeo: dummodo quædam loca notentur Arabicorum interpretum, quibus Maumedanos se præbent. Florentiæ die 7. Iulij 1660.

Carolus Dati manupropria.

Imprimatur seruatis seruandis 7. Iulij 1660.

Vinc. d. Bardis Vicar. Gener. Flor.

Excellentiss. Aduocatus Dominus Augustinus Coltellini S. Offic. Florentiæ Consultor videat hoc opus intitulatum APOLLONII PERGÆI, &c. & referat.

Die 7. Iulij 1660.

Fr. Ang. Oltau. de Populo S. Offic. Flor. Canc. de mand.

Reuerendiss. Pater Domine.

Duorum Geometriæ luminum monumenta, quæ diu in tenebris sepulta, adeò studiosorum oculos latuerunt, vt inter deperdita frustra desiderarentur, & nunc Opera Clariss. Virorum, versa, & illustrata in lucem prodeunt remoranda non puto; cum etsi Ethnico fonte cadant, nihil tamen (salutaribus monitis Arabica interpretum superstitione detecta) aduersus Christianam pietatem contineant.

Augustl. Coltellini S. Officij Consultor, & librorum censor.

Stante supradicta attestatione Imprimatur. Die 16. Iulij 1660.

Fr. Ang. Oltau. de Populo S. Off. Florent. Cancell. demand.

Alexander Victorius Senator Serenis. Magni Ducis Auditor.

REGISTRVM.

* ** *** **** ABCDEFGHIKLMNOPQRSTVXYZ
Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Sſ Tt Vu Xx Yy Zz
Aaa Bbb Ccc Ddd Eee Fff

Omnes sunt duerni, excepto * qui est ternus.

Errata præcipua sic corrige.

PAgina 7. linea 27. ad margine . *prop. 7 huius* . pag. 14. lin. 4. *ad differentiam* . p. 24. l. 21. marg. *prop. 2. addit* . p. 31. l. 27. marg. *in lib. 1.* lin. 34. & *B A* . lin. 40. *I D, D K* . p. 32. l. 15. & *D H* . p. 36. l. 21. *figura*) p. 40. l. 17. (*53. ex 5.*) l. 33. *intercipiuntur, &* . l. 38. *ergo C A* . p. 46. l. 5. *ita inquam* . p. 49. l. 35. *comprehenditur insuper* . p. 50. l. 46. *B G 6, & A e 6* . p. 56. l. 15. marg. 4. & 13. l. 48. *pariterque L D* . p. 62. l. 7. *sit D A* . p. 70. l. 14. marg. 56. 57. *lib.* 1. & 30. *lib.* 2. p. 72. l. 13. *maior quam* . p. 73. l. 13. mar. 33. 34. *lib.* 1. p. 78. l. 4. *reddantur, & textus* . p. 86. l. 17. *applicetur que recta* . p. 96. l. 7. *super bipartitionem axis* . p. 99. l. 11. *ex vero P F minor quam D P* . l. 44. *lege* 44. 45. *in qua* . p. 109. l. 20. dele postillam. p. 110. l. 31. marg. apponé *d* . p. 111. l. 31. *aut minor angulo* . p. 119. l. 35. & *inuertendo* . ibidem marg. 30. *huius* . p. 130. l. 26. dele omnia ab O G vſq; ad comparando. p. 138. l. 8. *oppoſita* . p. 139. l. 18. mar. *d* . p. 141. l. 8. mar. 14. *lib.* 1. p. 146. l. 18. mar. 12. 13. *lib.* 1. p. 151. l. 18. mar. 8. & 11. *addit. lib.* 5. l. 19. *M L, & R L* . l. 22. *aqualibus axium* . p. 161. l. 13. *ductam in hyperbola*) p. 168. l. 30. *quod eſt* . p. 172. l. 29. *ſed in primo caſu recta linea* . l. 30. *baſium F I* . ibid. *puncta I, & F ; nec F I ſecat bifariam ſubtenſas G E, M K ; propterea* . p. 175. l. 26. mar. *n* . l. 35. *ad duas* . p. 176. l. 15. mar. *d* . p. 183. l. 1. mar. *d* . p. 189. l. 29. mar. *lemma 7* . l. 47. *applicata* . p. 190. l. 8. mar. *prop. 3. præmiſ.* p. 193. l. 6. *XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV.* p. 196. l. 15. *nempe X a* . p. 197. l. 29. *ad L P* . p. 202. l. 33. mar. 18. *huius* . p. 207. l. 6. *quod* . l. 33. mar. *a* . p. 213. l. 11. *hyperbolen E Z* . p. 214. l. 38. mar. *ex 20. huius* . p. 217. l. 21. *ideoque ei æqualis omnino erit* . *Simili ratiocinio oſtendetur qualibet alia intercepta K L æquidiſtans* . p. 223. l. 6. mar. *Schol. prop. 6. addit.* p. 228. l. 18. *ergo comparando homologorum differentias* . ibid. mar. *lem. 3. lib.* 1. p. 233. l. 4. mar. *prop. 7. & ex 8. addit.* p. 235. l. 37. *hyperbolen H I K* . p. 240. l. 3. mar. *f* . p. 244. l. 14. & *I F R, ſeu H F N, & I F S* . p. 248. l. 35. *ſit ſectio* . p. 250. l. 4. *quod L O* . p. 256. l. 11. *parallela* . p. 259. l. 11. *quàm A C* . p. 260. l. 16. *per eundem* . p. 262. l. 1. *eundem* . l. 4. *A D, &* . l. 41. & *eam, quæ* . p. 264. l. 13. *fecabit rectum* . p. 268. l. 22. *centr E A C* . p. 269. l. 8. mar. *ex prop. 5. lib.* 1. l. 9. 10. 20. expunge recta. l. 15. *ſectionis F A G* . p. 275. l. 10. *rectangula A D F* . p. 280. l. 14. *G E A eundem* . p. 291. l. 3. *XXIX. XXVII.* p. 298. l. 6. *XXIIX. XXVI.* p. 303. l. 16. *rectum* . p. 306. l. 23. *ad perfectionem prop.* 26. p. 313. l. 7. mar. *prop. 26. huius* . p. 318. l. 25. *quam G H E ad E H, &* (*quando G cadit inter E, & H*) , *multo maiorem quàm G E* . p. 319. l. 17. *E H ab ipſo quadrato G E* , p. 321. l. 9. *quadrato E G* . l. 11. *XXXV. XXXVI.* p. 323. l. 2. *diametri ad eoſdem partes* . p. 325. l. 7. 21. & 23. (*16. ex. 7.*) p. 326. l. 11. *qua eſt dupla* . l. 14. *M E ad* . l. 20. (*16. ex 7.*) p. 327. *quàm D H A ad A H, & in primo caſu multo maiorem, quàm* , p. 328. l. 33. *latus C O* . p. 329. l. 12. *quam E D O in O E* . p. 331. l. 27. *ut axis transuerſus A C* . p. 335. l. 7. *ipſius P R ſupra P Q* . l. 11. *aggregati M G, H E* . p. 338. l. 18. *G E, & E H* . p. 341. l. 3. *axis tranſuerſę C A* . p. 343. l. 9. mar. dele b . p. 344. l. 7. mar. *b* . p. 346. l. 15. mar. *c* . p. 347. l. 7. *ad quadratum Q P R, &* . p. 350. l. 13. *O H, & G E* . p. 356. l. 14. mar. *lem. 15* . p. 386. l. 31. mar. *lib. 4. Coll. prop.* 14. p. 391. l. 9. mar. *lib. 4. Coll. prop.* 13. p. 392. l. 15. *quæ erit* . p. 404. l. 37. *A B E, A C E* .

Errata in figuris.

Pag. 12. in eius figura deeſt recta N Q, & D terminus axis . pag. 22. fig. 1. deeſt recta I N . pag. 30. in parabola deeſt N in occurſu B F, G H . pag. 37. deeſt P in puncto incidentiæ perpendicularis à puncto I ſuper S K . pag. 46. deeſt A in vertice axis . pag. 93. deeſt recta L O . pag. 112. in tribus ſequentibus figuris deeſt ramus I B . pag. 123. fig. 1. litteræ C, Q commutari debent . pag. 140. fig. 2. & pag. 146. producantur F I , H I ad K . pag. 168. fig. 2. linea curua A Z duci debet inter A G, & A D . pag. 368. fig. 3. in puncto I ponatur X .

416 Z 1.1.68

1.1.68 477

005635723

005635723